9 Equazioni differenziali

9.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Siano $P, Q : I \to \mathbb{C}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, indichiamo con equazione differenziale lineare del primo ordine ogni equazione del tipo

$$\begin{cases} u'(t) + P(t)u(t) = Q(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{9.1}$$

con $t_0 \in I$ e $u_0 \in \mathbb{C}$.

Teorema 9.1. *Se P, Q sono continue, allora $\forall\, t_0 \in I, \forall\, u_0 \in \mathbb{C}\ \exists!\ u(t) : I \to \mathbb{C}$ soluzione dell'equazione* (9.1) *e vale*

$$u(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau} \left(u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} P(\tau)d\tau} Q(s)ds \right)$$

Dimostrazione . Moltiplicando ambo i membri della prima delle (9.1) per la funzione positiva

$$e^{\int_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau}$$

otteniamo

$$v'(t) = e^{\int_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau} Q(t)$$

dove

$$v(t) = e^{\int_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau} u(t)$$

integrando si ha allora

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} P(\tau)d\tau} Q(s)ds$$

da cui, dato che $v(t_0) = u_0$, segue la tesi. □

ESERCIZIO 9.1: Consideriamo un corpo di massa m che si muove di moto rettilineo in un mezzo resistente e in presenza un campo gravitazionale (forza peso); risolvere l'equazione del moto in funzione della velocità $v(t)$

$$mv'(t) + kv(t) = mg$$

dove $k > 0$ è la costante di attrito viscoso e g è l'accelerazione di gravità supposta costante.

9.1.1 Equazione di Bernoulli

Consideriamo un'equazione della forma

$$u'(t) + P(t)u(t) = Q(t)u^n(t) \tag{9.2}$$

dove $P(t), Q(t)$ sono funzioni continue ed $n \neq 0, 1$.
La (9.2), detta equazione di Bernoulli, si riduce mediante la sostituzione

$$v(t) = u^{-n+1}(t)$$

ad un'equazione lineare del primo ordine, infatti dividendo la (9.2) per $u^n(t)$ e sostituendo si ha

$$v'(t) + (-n+1)P(t)v(t) = (-n+1)Q(t)$$

calcolando il suo integrale e sostituendo a $v(t)$ l'espressione u^{-n+1} si ottiene l'integrale della (9.2).

ESERCIZIO 9.2: Risolvere l'equazione

$$u'(t) + tu(t) = t^3u^3(t) \tag{9.3}$$

Svolgimento . Dividendo tutti i membri per u^3 si ha

$$u'(t)u^{-3}(t) + tu^{-2}(t) = t^3$$

sostituendo $v = u^{-2}$ si ha allora

$$v'(t) - 2tv(t) = -2t^3$$

dato che $v'(t) = -2u^{-3}(t)u'(t)$; che risolta ci dà

$$v(t) = t^2 + 1 + ce^{t^2}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$, l'integrale generale della (9.3) è dato pertanto da

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 + ce^{t^2}}}$$

□

9.2 Equazioni differenziali lineari di ordine superiore

Siano assegnate le funzioni continue $a_0, a_1, ..., a_n, f : I \to \mathbb{C}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo e supponiamo che $a_n(t) \neq 0 \ \forall \ t \in I$.
Per ogni funzione $u : I \to \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^n$ indicheremo con $L(u)$ la funzione

$$L(u) = a_n(t)u^{(n)}(t) + ... + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) \tag{9.4}$$

Il più generale problema di risoluzione di un'equazione differenziale lineare di ordine n, fissate le condizioni iniziali all'istante $t_0 \in I$, può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} L(u) = f \\ u(t_0) = \alpha_0 \\ u'(t_0) = \alpha_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases} \tag{9.5}$$

dove $\alpha_j \in \mathbb{C} \ \forall\ j = 1, ..., n-1$.

Teorema 9.2 (Esistenza ed unicità per le equazioni lineari). *Nelle ipotesi sopra poste, il problema (9.5) ammette una ed una sola soluzione $u : I \to \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^n$.*

Osservazione: Se le funzioni a_j e la funzione f sono reali, allora la soluzione u di (9.5) è reale.

Risulta semplice verificare, inoltre, che l'applicazione $L : \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ definita dall'equazione (9.4) è lineare e suriettiva.

Teorema 9.3 (Spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea). *Nelle ipotesi fatte*

$$\dim \mathrm{Ker}\ L = n$$

Dimostrazione . Mostriamo come si può costruire un isomorfismo tra Ker L e lo spazio $\mathbb{C}^n$: fissato $t_0 \in I$ considero l'applicazione $\sigma : \mathrm{Ker}\ L \to \mathbb{C}^n$ così definita

$$\sigma(u) = \Big(u(t_0), u'(t_0), ..., u^{(n-1)}(t_0)\Big) \qquad \forall\ u \in \mathrm{Ker}\ L$$

tale σ è senz'altro lineare (dato che l'operaztore di derivazione è lineare) e inoltre è biunivoca, infatti il teorema 9.2 di esistenza ed unicità ci assicura che $\forall\ \alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ esiste unica $u \in \mathrm{Ker}\ L$ tale che $\sigma(u) = \alpha$. □

Corollario 9.4. *Esistono $u_1, ..., u_n \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$, soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $L(u) = 0$ di ordine n; inoltre, tutte e sole le soluzioni u sono esprimibili come combinazioni lineari delle u_j.*

Definizione 9.1. Siano $u_1, ..., u_n \in \mathcal{C}^{n-1}(I, \mathbb{C})$, diciamo matrice wronskiana delle n funzioni date la matrice

$$\mathcal{W}(t) \equiv \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

diciamo wronskiano il determinante della matrice wronskiana

$$W(t) = \det \mathcal{W}(t)$$

Teorema 9.5. *Siano $u_1, ..., u_n$ soluzioni in I dell'equazione $L(u) = 0$ e sia $W(t)$ il loro wronskiano; sono equivalenti i seguenti fatti*

1. *$u_1, ..., u_n$ sono linearmente indipendenti;*
2. *$W(t) = 0 \ \forall \ t \in I$;*
3. *$\exists \ t_0 \in I$ tale che $W(t_0) = 0$.*

Dimostrazione . 1. $\Rightarrow$ 2.: per ipotesi esistono $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = 0$$

derivando allora si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1' + ... + \lambda_n u_n' = 0 \\ \quad \vdots \\ \lambda_1 u_1^{(n-1)} + ... + \lambda_n u_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

cioè le colonne della matrice wronskiana sono linearmente indipendenti.

2. $\Rightarrow$ 3.: ovvio.

3. $\Rightarrow$ 1.: per ipotesi esistono $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non tutti nulli tali che

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1'(t_0) + ... + \lambda_n u_n'(t_0) = 0 \\ \quad \vdots \\ \lambda_1 u_1^{(n-1)}(t_0) + ... + \lambda_n u_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

Sia allora $\bar{u}(t) = \lambda_1 u_1(t) + ... + \lambda_n u_n(t)$, questa è soluzione di $L(u) = 0$ perché combinazione lineare dell u_j e nel punto t_0 ammette condizioni iniziali nulle; notiamo inoltre che anche la funzione $u(t) = 0 \ \forall \ t \in I$ è soluzione di $L(u) = 0$ con le stesse condizioni iniziali, quindi, per il teorema 9.2 di esistenza ed unicità deve essere $\bar{u}(t) = 0 \ \forall \ t \in I$, cioè le u_j sono linearmente indipendenti.

□

”
Richiamo

Siano $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineare e $b \in \mathbb{K}^m$, si ha la seguente

Proposizione 9.1. *Lo spazio S delle soluzioni dell'equazione $Ax = b$ è dato da*

$$S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} = \tilde{x} + \text{Ker } A$$

dove $\tilde{x} \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione particolare dell'equazione $Ax = b$.

”

Ne segue allora che

Proposizione 9.2 (Spazio delle soluzioni dell'equazione completa). *Sia $\tilde{u}$ una soluzione dell'equazione $L(u) = f$, allora lo spazio S di tutte le soluzioni dell'equazione $L(u) = f$ è dato da*

$$S = \tilde{u} + \text{Ker } L$$

9.2.1 Dipendenza continua dai dati iniziali

Teorema 9.6. *Sia $t_0 \in I$ consideriamo l'applicazione $T : \mathbb{K}^n \to \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ che associa alla n-upla $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_{n-1})$ la soluzione $T(\alpha) = u$ di $L(u) = f$ soddisfacente le condizioni iniziali*

$$u(t_0) = \alpha_0,\ u'(t_0) = \alpha_1, ...,\ u^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}$$

Per ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq I$ si ha che T è continua.

Dimostrazione . Consideriamo i casi:

1. $f = 0$, cioè T è lineare, quindi, per il teorema 1.17, continua.
2. Caso generale. Sia $T_0 : \mathbb{K}^n \to \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ tale che $T_0(\alpha)$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata soddisfacente le condizioni iniziali $\alpha \in \mathbb{K}^n$. Considero una soluzione $\tilde{u}$ di $L(u) = f$ con i dati iniziali nulli, si ha allora che
$$T(\alpha) = \tilde{u} + T_0(\alpha) = u \tag{9.6}$$
infatti u è soluzione e inoltre
$$\begin{cases} u(t_0) = \tilde{u}(t_0) + T_0(\alpha)(t_0) = T_0(\alpha)(t_0) = \alpha_0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = \tilde{u}^{(n-1)}(t_0) + T_0^{(n-1)}(\alpha)(t_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$$
L'equazione (9.6) ci mostra allora la continuità di T in quanto somma di funzioni continue.

$\square$

Osservazione: Il teorema è valido quali che siano le norme in $\mathbb{K}^n$ e in $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

9.2.2 Metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie

In questa sezione mostreremo un metodo che permette di costruire le soluzioni dell'equazione completa $L(u) = f$ a partire dalle soluzioni dell'equazione omogenea $L(u) = 0$ e dalla f.

Siano $u_1, ..., u_n$ n soluzioni linearmente indipendenti di $L(u) = 0$.
Sappiamo che le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni del tipo

$$c_1 u_1(t) + ... + c_n u_n(t)$$

dove $c_j \in \mathbb{C}\ \forall\ j = 1, ..., n$.
Il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie consiste nel cercare le soluzioni dell'equazione completa $L(u) = f$ in una forma del tipo

$$d_1(t) u_1(t) + ... + d_n(t) u_n(t)$$

dove le d_j sono opportune funzioni.

Teorema 9.7. *Sia $\mathcal{W}(t)$ la matrice wronskiana delle u_j e $W(t)$ il suo determinante; indichiamo con $W_j(t)$ il complemento algebrico del termine della n-esima riga e della j-colonna di $\mathcal{W}(t)$. Fissato $t_0 \in I$, la funzione*

$$\tilde{u}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{W_j(\tau)}{W(\tau)} \frac{f(\tau)}{a_n(\tau)} d\tau \right) u_j(t)$$

è soluzione di $L(u) = f$.

Dimostrazione . Assegnato $t_0 \in I$, definiamo

$$d_j(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{W_j(\tau)}{W(\tau)} \frac{f(\tau)}{a_n(\tau)} d\tau \qquad \forall\ j = 1, ..., n$$

si prova facilmente che tali funzioni sono di classe $\mathcal{C}^1$ e verificano il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{d}' \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{d}' \cdot \mathbf{u}' = 0 \\ \quad \vdots \\ \mathbf{d}' \cdot \mathbf{u}^{(n-1)} = \frac{f}{a_n} \end{cases}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare standard e si sono indicate, per semplificare la notazione, le n-uple di funzioni con i vettori: $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)$ e $\mathbf{f}^{(k)} = (f_1^{(k)}, ..., f_n^{(k)})$.
Posto $\tilde{u} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}$ risulta evidentemente

$$\tilde{u}' = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{u})' = \mathbf{d}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}'$$

in particolare, dato che $\mathbf{d}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e $\mathbf{u}$ di classe $\mathcal{C}^n$, si ha anche

$$\tilde{u}'' = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{u}')' = \mathbf{d}' \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}'' = \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}''$$

così procedendo si ottiene

$$\tilde{u}^{(n-1)} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}^{(n-1)}$$

a sua volta quest'uguaglianza ci dice che $\tilde{u}$ è di classe $\mathcal{C}^n$ e si ha

$$\tilde{u}^{(n)} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{u}^{(n)} + \frac{f}{a_n}$$

Poiché $L(u_j) = 0$ si ha che $\tilde{u}$ è soluzione dell'equazione completa, infatti

$$L(\tilde{u}) = \mathbf{d} \cdot L(\mathbf{u}) + f = f$$

□

ESEMPIO 9.3: Consideriamo l'equazione del moto di un corpo di massa m sotto l'azione di una forza elastica di costante k e di una forza esterna $F(t)$ dipendente dal tempo:

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$ [1]

Notiamo che la funzione

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

al variare di $c_j \in \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (si è posto $\omega^2 = \frac{k}{m}$). Cerchiamo allora due funzioni $d_1, d_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} d_1' \cos \omega t + d_2' \sin \omega t = 0 \\ d_1'(-\omega \sin \omega t) + d_2'(\omega \cos \omega t) = \frac{F(t)}{m} \end{cases}$$

abbiamo allora che

$$d_1'(t) = \frac{1}{W(t)} \det \begin{pmatrix} 0 & \sin \omega t \\ \frac{F(t)}{m} & \omega \cos \omega t \end{pmatrix} = -\frac{F(t)}{m\omega} \sin \omega t$$

$$d_2'(t) = \frac{1}{W(t)} \det \begin{pmatrix} \cos \omega t & 0 \\ -\omega \sin \omega t & \frac{F(t)}{m} \end{pmatrix} = \frac{F(t)}{m\omega} \cos \omega t$$

fissato allora $t_0 \in \mathbb{R}$ troviamo la soluzione

$$\tilde{u}(t) = -\cos \omega t \int_{t_0}^{t} \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin \omega\tau d\tau + \sin \omega t \int_{t_0}^{t} \frac{F(\tau)}{m\omega} \cos \omega\tau d\tau$$

9.3 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Siano $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$, con $a_n \neq 0$, consideriamo il problema omogeneo

$$a_n u^{(n)}(t) + a_{n-1} u^{(n-1)}(t) + ... + a_0 u(t) = 0 \tag{9.7}$$

Osservazione: La funzione $u(t) = e^{\lambda t}$ è soluzione di (9.7) se e solo se $\lambda \in \mathbb{C}$ è radice del polinomio

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_1 \lambda + a_0$$

Definizione 9.2. Il polinomio $p(\lambda)$ è detto polinomio caratteristico dell'equazione (9.7) e l'equazione $p(\lambda) = 0$ è detta equazione caratteristica di (9.7).

”
RICHIAMO

Proposizione 9.3 (Determinante di Vandermonde).

$$V(\lambda_1, ..., \lambda_n) \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j<i} (\lambda_i - \lambda_j)$$

[1] Usiamo la notazione di Newton per cui $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Dimostrazione . Applicando una riduzione a scala con le seguenti operazioni elementari $R_n = R_n - \lambda_1 R_{n-1},\ R_{n-1} = R_{n-1} - \lambda_1 R_{n-2}, \ldots$ si ottiene che

$$\begin{aligned}
V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & (\lambda_n - \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{pmatrix} \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) V(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)
\end{aligned}$$

per cui iterando otteniamo la tesi. □

”

Osservazione: Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono tutti distinti, le funzioni $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione . Calcoliamo il wronskiano

$$\begin{aligned}
W(t) &= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_k t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_k e^{\lambda_k t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_k^{k-1} e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} \\
&= e^{\sum_j \lambda_j t} \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

quindi, per la proposizione 9.3

$$W(t) = e^{\sum_j \lambda_j t} \prod_{j<i} (\lambda_i - \lambda_j)$$

per cui $W(t) \neq 0 \iff \lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. □

Definizione 9.3. Sia $p(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j x^j$ un polinomio con coefficienti in $\mathbb{K}$, indicheremo con $p(D)$ l'operatore in $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ definito da

$$p(D)(v) = \sum_{j=1}^{k} a_j v^{(j)} \qquad \forall\ v \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$$

Lemma 9.4. *Siano p, q due polinomi, allora*

$$(p+q)(D)(v) = p(D)(v)+q(D)(v) \quad e \quad (p\cdot q)(D)(v) = p(D)\circ q(D)(v) \qquad \forall\ v \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$$

Osservazione: Se $p(\lambda)$ è il polinomio caratteristico, allora l'equazione (9.7) può essere scritta nella forma $p(D)(u) = 0$.

Teorema 9.8. *Siano $\lambda_1, ..., \lambda_k$ le radici distinte del polinomio caratteristico di (9.7) di molteplicità $\mu_1, ..., \mu_k$ rispettivamente, allora n soluzioni linearmente indipendenti di (9.7) sono*

$$t^j e^{\lambda_j t} \qquad \forall\ j = 0, 1, ..., \mu_{i-1} \text{ con } i = 1, ..., k$$

Dimostrazione . Per ipotesi si ha che

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} a_j(\lambda - \lambda_j)^{\mu_j} \quad \text{e} \quad p(D)(u) = \prod_{j=1}^{k} a_j(D - \lambda_j \mathrm{id})^{\mu_j} = 0$$

Consideriamo, fissato j, la soluzione dell'equazione di ordine μ_j:

$$(D - \lambda_j \mathrm{id})^{\mu_j} = 0 \tag{9.8}$$

Mostriamo che le funzioni $e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, ..., t^{\mu_j - 1} e^{\lambda_j t}$ sono μ_j soluzioni linearmente indipendenti di (9.8): si ha infatti

$$\begin{cases} (D - \lambda_j \mathrm{id})(e^{\lambda_j t}) = 0 \\ (D - \lambda_j \mathrm{id})(t^s e^{\lambda_j t}) = st^{s-1} e^{\lambda_j t} \end{cases} \implies (D - \lambda_j \mathrm{id})^{\mu_j}(t^s e^{\lambda_j t}) = 0 \quad \text{se } s \leqslant \mu_j - 1$$

inoltre tali funzioni sono linearmente indipendenti dato che

$$\alpha_1 e^{\lambda_j t} + \alpha_2 t e^{\lambda_j t} + ... + \alpha_{\mu_j} t^{\mu_j - 1} e^{\lambda_j t} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 t + ... + \alpha_{\mu_j} t^{\mu_j - 1} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha_s = 0 \quad \forall\ s = 1, ..., \mu_j$$

Facendo lo stesso discorso per ogni $j = 1, ..., k$ otteniamo n soluzioni, ci resta solo da dimostrare che tali soluzioni sono linearmente indipendenti: procediamo per induzione su k

- se $k = 1$ non c'è niente da dimostrare;
- vediamo ora che $(k-1) \Rightarrow k$: devo dimostrare che

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + ... + p_k(t)e^{\lambda_k t} = 0 \iff p_j(t) = 0 \ \forall\ j = 1, .., k$$

(notiamo che $\deg p_j = \mu_j - 1$). Dividendo tutto per $\lambda_1 t$ e derivando si ha

$$p_1'(t) + [(\lambda_2 - \lambda_1)p_2(t) - p_2'(t)]e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + ... + [(\lambda_k - \lambda_1)p_k(t) - p_k'(t)]e^{(\lambda_k-\lambda_1)t} = 0$$

derivando μ_1 volte elimino p_1 ed ottengo

$$q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + ... + q_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_1)t} = 0$$

dove $\deg q_j = \deg p_j$. Per ipotesi induttiva ho allora che $q_j = 0 \ \forall\ j = 2, ..., k$ cioè $p_j = 0 \ \forall\ j = 1, ..., k$.

□

Passiamo ora allo studio dell'equazione non omogenea

$$a_n u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + ... + a_0 u(t) = f(t) \tag{9.9}$$

con $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$.
Abbiamo già illustrato un metodo generale, quello della variazione delle costanti arbitrarie, che ci permette di trovare una soluzione particolare di un'equazione non omogenea; quando si tratta, però, di equazioni non omogenee a coefficienti costanti, la soluzione particolare si trova, talvolta, in modo più semplice.
Mostriamo alcuni casi per cui ciò è possibile:

1. Supponiamo che il secondo membro della (9.9) sia della forma

$$f(t) = P(t)e^{\alpha t}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e P è un polinomio della variabile t; distinguiamo i seguenti casi

a) se α non è radice del polinomio caratteristico della omogenea associata alla (9.9), si può cercare una soluzione particolare del tipo

$$\tilde{u}(t) = Q(t)e^{\alpha t}$$

dove Q è un polinomio dello stesso grado di P da determinare.

b) se α è radice di molteplicità μ del polinomio caratteristico, una soluzione particolare sarà della forma

$$\tilde{u}(t) = t^\mu Q(t)e^{\alpha t}$$

dove Q è un polinomio dello stesso grado di P da determinare.

2. Supponiamo
$$f(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t$$
dove $\beta, A, B \in \mathbb{R}$, la forma della soluzione particolare viene definita nel modo seguente
   a) se $i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico
   $$\tilde{u}(t) = A_1\cos\beta t + B_1\sin\beta t$$
   con $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ da determinare.
   b) se $i\beta$ è radice di molteplicità μ del polinomio caratteristico
   $$\tilde{u}(t) = t^\mu(A_1\cos\beta t + B_1\sin\beta t)$$
   con $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ da determinare.
3. Supponiamo
$$f(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$$
dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e P, Q sono polinomi. Allora
   a) se $\alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico, la soluzione particolare va cercata nella forma
   $$\tilde{u}(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + Q_1(t)\sin\beta t)$$
   dove P_1, Q_1 sono polinomi da determinare di grado uguale a quello più elevato dei polinomi P, Q.
   b) se $\alpha + i\beta$ è radice di molteplicità μ del polinomio caratteristico, la soluzione particolare è del tipo
   $$\tilde{u}(t) = t^\mu e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + Q_1(t)\sin\beta t)$$
   dove P_1, Q_1 sono polinomi da determinare di grado uguale a quello più elevato dei polinomi P, Q.

9.3.1 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione
$$u''(t) + a_1u'(t) + a_0u(t) = 0 \tag{9.10}$$
con $a_0, a_1 \in \mathbb{K}$. Cerchiamo $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che la funzione
$$u(t) = e^{\lambda t}$$
è soluzione di (9.10) e troviamo l'equazione caratteristica
$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{9.11}$$
Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ le radici di (9.11), distinguiamo i casi

Radici reali distinte Le soluzioni $u_j(t) = e^{\lambda_j t}$ per $j = 1, 2$ sono linearmente indipendenti, quindi l'integrale generale di (9.10) assume la forma

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

al variare di $c_j \in \mathbb{R}$.

Radici reali coincidenti Da quanto visto la funzione $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ è una soluzione di (9.10), bisogna trovare una seconda soluzione linearmente indipendente. Come è facile verificare, si ha che la funzione cercata è $u_2(t) = te^{\lambda_1 t}$, per cui l'integrale generale di (9.10) è dato da

$$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t}$$

al variare di $c_j \in \mathbb{R}$.

Radici complesse Siccome le radici complesse sono coniugate abbiamo

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Le due soluzioni linearmente indipendenti di (9.10) sono date dalla parte immaginaria e dalla parte reale delle funzioni trovate[2]

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \mathfrak{Im}\ e^{\lambda_1 t} = \mathfrak{Im}\left(e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)\right) = e^{\alpha t}\cos\beta t \\ u_2(t) &= \mathfrak{Re}\ e^{\lambda_2 t} = \mathfrak{Re}\left(e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)\right) = e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale vale

$$u(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t) \tag{9.12}$$

al variare di $c_j \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 9.4: Un importante caso particolare della soluzione (9.12) si ha quando le radici del polinomio caratteristico sono puramente immaginarie.
Ciò accade quando la (9.10) assume la forma

$$u''(t) + au(t) = 0 \qquad \text{con } a > 0$$

L'equazione caratteristica è allora

$$\lambda^2 + a = 0$$

per cui le radici sono

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a} = \pm i\beta$$

e quindi la soluzione (9.12) diventa

$$u(t) = c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t$$

[2] Per chiarimenti si veda l'appendice B.

ESERCIZIO 9.5: Consideriamo un circuito elettrico di resistenza R, coefficiente di induzione L alimentato da una forza elettromotrice $\mathcal{E}$; supponiamo che nel circuito si scarichi un condensatore di capacità C.
L'equazione cui deve soddisfare la differenza di potenziale V ai capi del condensatore è

$$LC\frac{d^2V}{dt}(t) + RC\frac{dV}{dt}(t) + V(t) = \mathcal{E}$$

Si discuta, al variare dei parametri R, L e C la soluzione dell'equazione.

9.3.2 Equazione di Eulero

Siano $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ con $a_n \neq 0$, l'equazione

$$a_n u^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{t}u^{(n-1)} + \frac{a_{n-2}}{t^2}u^{(n-2)} + ... + \frac{a_0}{t^n}u = 0 \tag{9.13}$$

che può essere riscritta nella forma

$$a_n t^n u^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_0 u = 0$$

è detta equazione di Eulero.

Osservazione: Si noti che si tratta di un'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti e continui in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$.

L'importanza dell'equazioni (9.13) sta nel fatto che con un'opportuna sostituzione si può trasformare in un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti: basta porre $t = e^x$ sulla semiretta positiva e $t = e^{-x}$ sulla semiretta negativa.

Osservazione: In pratica basta seguire le seguenti operazioni:

1. Si pone nella (9.13) $u = t^\lambda$ e si sopprime il fattore $t^{\lambda-n}$ comune a tutti gli addendi; in tal modo si ottiene direttamente l'equazione caratteristica della trasformata dell'equazione (9.13) mediante la sostituzione $t = e^x$ o $t = e^{-x}$.

2. Si trova a questo punto l'integrale della trasformata, esso sarà del tipo

$$u(x) = c_1u_1(x) + ... + c_nu_n(x)$$

al variare di $c_j \in \mathbb{K}$.

3. Si pone nell'integrale trovato $x = \log|t|$ e si ottiene

$$u(t) = c_1u_1(\log|t|) + ... + c_nu_n(\log|t|)$$

che, al variare di $c_j \in \mathbb{K}$, fornisce la soluzione di (9.13) sia in $]-\infty, 0[$ sia in $]0, +\infty[$.

ESERCIZIO 9.6: Integrare l'equazione

$$u'' + \frac{u'}{t} + \frac{u}{t^2} = 0 \tag{9.14}$$

Svolgimento . Ponendo $u(t) = t^\lambda$ si ottiene l'equazione caratteristica

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \lambda^2 + 1 = 0$$

le cui radici sono $\lambda_{1,2} = \pm i$. Quindi la funzione

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

al variare di $c_j \in \mathbb{R}$ fornisce l'integrale generale dell'equazione trasformata mediante la sostituzione $t = e^x$ o $t = e^{-x}$; pertanto la funzione

$$u(t) = c_1 \cos(\log |t|) + c_2 \sin(\log |t|)$$

fornisce, al variare di $c_j \in \mathbb{R}$, l'integrale generale di (9.14) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

9.4 Un problema con condizioni ai limiti

A volte può interessare trovare le soluzioni di un'equazione differenziale che soddisfino condizioni diverse da quelle "iniziali" considerate finora.

Siano $a_0, a_1, a_2, f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue e siano $\alpha_0, \alpha_1, \alpha, \beta_0, \beta_1, \beta \in \mathbb{K}$.
Consideriamo il problema

$$\begin{cases} a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = f \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \alpha \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \beta \end{cases} \tag{9.15}$$

nel quale sono imposte alla soluzioni u condizioni agli estremi dell'intervallo.

Osservazione: Notiamo che non sempre il problema (9.15) ha soluzione.

ESERCIZIO 9.7: Dimostrare che il problema

$$\begin{cases} u'' + u' = \sin t \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

Svolgimento . Le soluzioni dell'equazione differenziale sono le funzioni

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{4} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t$$

al variare di $c_j \in \mathbb{R}$; dalla condizione $u(0) = 0$ segue che deve essere $c_1 = 0$ e quindi si ha $u(\pi) = \frac{\pi}{2}$, in contrasto con la condizione al limite. $\square$

ESEMPIO 9.8: Al contrario è facile verificare che il problema

$$\begin{cases} u'' + u' = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni del tipo $u(t) = c \sin t$ con $c \in \mathbb{K}$.

Un enunciato semplice ed interessante si ottiene confrontando il problema (9.15) con il problema omogeneo associato

$$\begin{cases} a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = 0 \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0 \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{9.16}$$

Teorema 9.9. *Supponiamo che sia $a_2(t) \neq 0 \ \forall\ t \in [a,b]$:*

1. *Se il problema (9.16) ha solo la soluzione $u(t) = 0 \ \forall\ t \in [a,b]$ allora il problema (9.15) ha una ed una sola soluzione quali che siano f, α, β.*

2. *Se, viceversa, esiste f tale che (9.15) ha almeno una soluzione quali che siano α, β, allora (9.16) ha solo la soluzione $u(t) = 0 \ \forall\ i \in [a,b]$.*

9.4.1 Gli autovalori della derivata seconda

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{9.17}$$

con $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ e $a < b$.
I numeri λ per cui il problema (9.17) ammette soluzioni diverse dalla soluzione identicamente nulla $u(t) = 0 \ \forall\ t$ sono detti autovalori e sono i numeri

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{b-a} \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}^*$$

come è facile vedere, le soluzioni corrispondenti, dette autofunzioni sono

$$e_k(t) = \sin\left(k\pi \frac{t-a}{b-a}\right)$$

Da quanto si è detto nel paragrafo precedente segue allora che il problema

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = f \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione se e solo se $\lambda \neq \lambda_k$ (ad esempio se $\lambda \leqslant 0$) qualunque siano α, β, f.

ESEMPIO 9.9: Si verifica facilmente che se $\lambda = \lambda_k$ il problema

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzione se e solo se

$$\int_a^b f(t) e_k(t) dt = 0$$

9.5 Equazioni differenziali a variabili separabili

Siano $A : I_1 \to \mathbb{R}, B : I_2 \to \mathbb{R}$ continue sugli intervalli $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ rispettivamente, fissati $t_0 \in I_1$ e $u_0 \in I_2$, consideriamo il problema

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)B(u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{9.18}$$

che prende il nome di equazione differenziale a variabili separabili.

Lemma 9.5. *Siano $F : I_1 \to \mathbb{R}$, $G : J \to \mathbb{R}$ continue, supponiamo G strettamente monotona e che, per un certo $t_0 \in I_1$ e per un certo $u_0 \in \overset{\circ}{J}$ si abbia $F(t_0) = G(u_0)$. Si ha allora che esiste un intervallo I tale che*

$$I \subseteq I_1 \qquad e \qquad F(I) \subseteq J$$

per cui la funzione $u : I \to J$ definita da

$$u(t) = G^{-1}(F(t))$$

è soluzione dell'equazione

$$F(t) = G(u)$$

Dimostrazione . Poiché G è continua, $G(J)$ è un intervallo e, poiché $u_0 \in \overset{\circ}{J}$ e G è strettamente monotona, $G(u_0) \in G(\overset{\circ}{J})$; dunque $F(u_0) \in G(\overset{\circ}{J})$ e, poiché F è continua, esiste I intervallo tale che

$$t_0 \in I \subseteq I_1 \quad \text{e} \quad F(J) \subseteq G(J)$$

$\square$

Teorema 9.10. *Valgono le seguenti tesi:*

1. *Se $B(u_0) = 0$ allora $u(t) = u_0 \ \forall \ t \in I_1$ è soluzione di* (9.18)

2. *Se* $B(u_0) \neq 0$ *e se* $u_0 \in \overset{\circ}{I_2}$ *allora* $\exists!\ u(t) : I \to J$ *soluzione di* (9.18) *dove* $I \subseteq I_1$ *è un intervallo tale che*

$$t_0 \in I \quad \textit{(anzi se } t_0 \in \overset{\circ}{I_1} \textit{ allora } t_0 \in \overset{\circ}{I}\textit{)}$$

e $J \subseteq I_2$ *è il massimo intervallo tale che*

$$u_0 \in \overset{\circ}{J} \quad B(u) \neq 0\ \forall\ u \in J$$

e risulta

$$\int_{u_0}^{u} \frac{d\sigma}{B(\sigma)} = \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau$$

3. *Se* $B(u_0) \neq 0$ *e* u_0 *è fra due radici di* B*, allora esiste una soluzione di* (9.18) *definita in tutto* I_1*.*

Dimostrazione . 1. Ovvia.

2. Consideriamo una funzione u definita e di classe $\mathcal{C}^1$ in un intervallo I tale che $t_0 \in I \subseteq I_1$; si ha inoltre che $u(t_0) = u_0$ e che $B(u(t)) \neq 0\ \forall\ t \in I$. Una tale u soddisfa la (9.18) se e solo se

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(\tau)}{B(u(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau$$

ossia se e solo se

$$G(u) \equiv \int_{u_0}^{u} \frac{d\sigma}{B(\sigma)} = \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \equiv F(t)$$

La tesi segue allora dal fatto che G è invertibile in J (dato che $G'(u) \neq 0$ in J) e dal lemma 9.5.

3. Poiché u_0 è fra due radici di B in I_2 allora $u_0 \in \overset{\circ}{I_2}$; poiché B è continua, esistono $u_1, u_2 \in I_2$ tali che $u_0 \in [u_1, u_2] \subseteq I_2$,

$$B(u_1) = B(u_2) = 0 \quad \text{e} \quad B(u) \neq 0\ \forall\ u \in]u_1, u_2[$$

Possiamo considerare, ad esempio, il caso in cui B sia positivo su $]u_1, u_2[$.
Poniamo di nuovo, per ogni $u \in]u_1, u_2[$

$$G(u) \equiv \int_{u_0}^{u} \frac{d\sigma}{B(\sigma)} \qquad F(t) \equiv \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau$$

Come si è detto, $G :]u_1, u_2[\to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e strettamente crescente e $F : I_1 \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1$. Siano ora

$$\alpha = \lim_{u \to u_1^+} G(u) \qquad \beta = \lim_{u \to u_2^-} G(u)$$

allora anche $G^{-1}:]\alpha,\beta[\to]u_1,u_2[$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e strettamente crescente; inoltre

$$\lim_{v\to\alpha^+} G^{-1}(v) = \lim_{v\to\beta^-} G^{-1}(v) = 0$$

poiché $(G^{-1})'(v) = B(G^{-1}(v))$. Posto, infine,

$$\varphi(v) = \begin{cases} u_1 & \text{su }]-\infty,\alpha] \\ G^{-1}(v) & \text{su }]\alpha,\beta[\\ u_2 & \text{su } [\beta,+\infty[\end{cases}$$

(tale φ è di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}$), si ha allora che la funzione

$$u(t) = \varphi \circ F(t) \ \forall\, t \in I_1$$

risolve il problema (9.18).

□

Osservazione: Notiamo che nel caso in cui u_0 è un punto estremo di I_2, il teorema appena enunciato non vale, infatti il problema

$$\begin{cases} u'(t) = -t(\sqrt{u(t)}+1) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione: in questo caso si ha

$$A(t) = -t,\ B(u) = \sqrt{u}+1 \quad I_1 = \mathbb{R},\ I_2 = [0,+\infty[$$

quindi una eventuale soluzione dovrebbe essere tale che

$$\begin{array}{ll} u(0)=0,\ u(t)\geqslant 0,\ u'(t)\leqslant 0 & \text{per } t>0 \\ u'(t)>0 & \text{per } t<0 \end{array}$$

ESEMPIO 9.10: Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)(u^2(t)-1)e^t \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

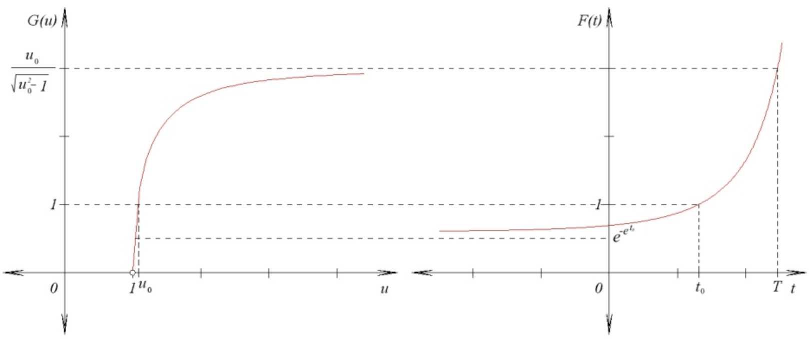
dove $t_0, u_0 \in \mathbb{R}$, si ha allora

$$A(t) = e^t,\ B(u) = u(u^2-1) \quad I_1 = I_2 = \mathbb{R}$$

Notiamo subito che se u è soluzione con dato iniziale $u(t_0) = u_0$ allora $-u$ è soluzione con dato iniziale $u(t_0) = -u_0$; consideriamo quindi il problema solo per $u_0 \geqslant 0$:

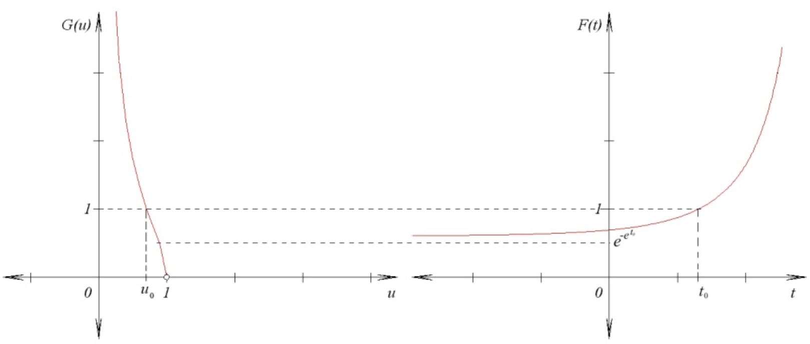
1. Se $u_0 = 0$ allora $u(t) = 0 \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ è soluzione; se $u_0 = 1$ allora $u(t) = 1 \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ è soluzione.

2. Sia ora $u_0 > 1$, separando le variabili e integrando
$$\int_{u_0}^{u} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma^2-1)} = \int_{t_0}^{t} e^{\tau} d\tau$$
ottengo
$$G(u) \equiv \frac{\sqrt{u^2-1}}{u} \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2-1}} = e^{e^t - e^{t_0}} \equiv F(t)$$
la soluzione $u(t)$ non si esplicita, proviamo allora a studiarne qualitativamente il grafico: partiamo dai grafici di F e G



si ha
$$J =]1, +\infty[, \; G(J) =]0, \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2-1}}[\quad \text{e} \quad I =]-\infty, T[$$
dove T dipende dai dati iniziali, si ha allora che la funzione $u(t) = G^{-1}(F(t))$ è ben definita in I, è strettamente crescente e si ha
$$\exists \lim_{t \to -\infty} u(t) = u_1 \text{ con } 1 < u_1 < u_0 \qquad \lim_{t \to T} u(t) = +\infty$$

3. Sia ora $0 < u_0 < 1$, separando e integrando ottengo
$$G(u) \equiv \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} = e^{e^t - e^{t_0}} \equiv F(t)$$



si ha allora che la funzione $u(t) = G^{-1}(F(t))$ è ben definita in $\mathbb{R}$, è strettamente decrescente e si ha

$$\exists \lim_{t\to-\infty} u(t) = u_2 \text{ con } u_0 < u_2 < 1 \qquad \lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$$

in definitiva il grafico delle soluzioni è quello mostrato in figura 9.1.

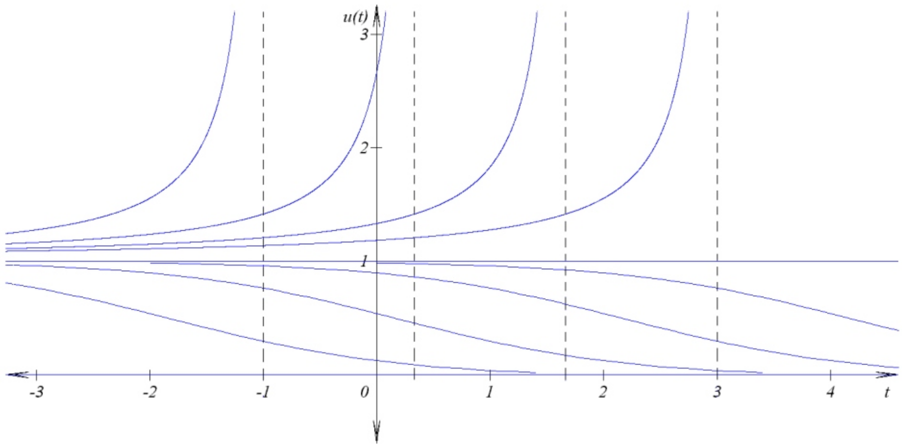


Figura 9.1: Studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione $u'(t) = u(t)(u^2(t) - 1)e^t$.

9.6 Un classico problema semi-lineare

Sia $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} u'' + g(t,u) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{9.19}$$

Teorema 9.11. *Se g è continua ed esiste $L < \pi^2$ tale che*

$$\frac{g(t,u_2) - g(t,u_2)}{u_2 - u_1} \leqslant L \qquad \forall\, t \in [0,1],\ \forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R} \text{ con } u_1 \neq u_2 \tag{9.20}$$

allora (9.19) ammette una ed una sola soluzione.

Ci limiteremo a dimostrare la tesi del teorema 9.11 sostituendo a (9.20) l'ipotesi più restrittiva

$$\left|\frac{g(t,u_2) - g(t,u_2)}{u_2 - u_1}\right| \leqslant L \qquad \forall\, t \in [0,1],\ \forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R} \text{ con } u_1 \neq u_2 \tag{9.21}$$

Affronteremo, inoltre, il problema seguendo due procedimenti un po' diversi:

1. col primo, mediante il metodo delle contrazioni, dimostreremo la tesi nell'ipotesi che sia $L < 8$;

2. col secondo, apportando qualche modifica al primo, nell'ipotesi $L < \pi^2$.

Prima della dimostrazione premettiamo alcune considerazioni e alcuni risultati utili.

Innanzitutto ricordiamo che il problema

$$\begin{cases} u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{9.22}$$

in cui $f \in \mathcal{C}([0,1])$, ammette una ed una sola soluzione u perché 0 non è autovalore della derivata seconda.[3]
Ponendo $u = A(f)$ resta allora definito l'operatore lineare $A : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$.

Proposizione 9.6. *Vale la disuguaglianza*

$$\|A(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{8}\|f\|_\infty \qquad \forall\ f \in \mathcal{C}([0,1])$$

Dimostrazione del teorema 9.11: primo procedimento. Valga l'ipotesi (9.21).
Evidentemente u risolve (9.19) se e solo se $u = A(-g \circ u)$. Si cercano allora i punti fissi dell'operatore

$$T(u) = A(-g \circ u) \qquad \forall\ u \in \mathcal{C}([0,1])$$

Siano $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0,1])$, per la proposizione 9.6 si ha

$$\begin{aligned} \|T(u_2) - T(u_1)\|_\infty &= \|A(-g \circ u_2) - A(-g \circ u_1)\|_\infty \\ &= \|A(g \circ u_1 - g \circ u_2)\|_\infty \\ &\leqslant \frac{1}{8}\|g \circ u_2 - g \circ u_1\|_\infty \\ &\leqslant \frac{L}{8}\|u_2 - u_1\|_\infty \end{aligned}$$

Dunque se $L < 8$ allora T è una contrazione in $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ e, poiché $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ è completo, per il teorema 1.7, T ha unico punto fisso in $\mathcal{C}([0,1])$. □

Per il secondo procedimento ci servono altri risultati:

Proposizione 9.7 (Disuguaglianza di Poincaré). *Per ogni funzione $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tale che $u(0) = u(1) = 0$ si ha*

$$\int_0^1 u^2(t)dt \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 (u'(t))^2 dt \tag{9.23}$$

[3] Si ha infatti

$$u(t) = \int_0^t \int_0^x f(x)dxdy - t\int_0^1 \int_0^1 f(x)dxdy$$

Proposizione 9.8. *Per ogni funzione* $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ *tale che* $u(0) = 0$ *si ha*

$$u^2(t) \leqslant \int_0^1 (u'(t))^2 dt \qquad \forall\ t \in [0,1]$$

Dimostrazione . Infatti

$$u^2(t) = \left(u(0) + \int_0^t u'(\tau)d\tau\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 |u'(t)|dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

□

Consideriamo ora in $\mathcal{C}([0,1])$ la norma $\|\cdot\|_2$ indotta dal prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(t)v(t)dt$$

Notiamo che, come è facile verificare, $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_2)$ non è completo[4].

Proposizione 9.9. *Valgono le disuguaglianze*

1. $\|A(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{\pi^2}\|f\|_2 \qquad \forall\ f \in \mathcal{C}([0,1])$
2. $\|A(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_2$

Dimostrazione . 1. Se $f \in \mathcal{C}([0,1])$ risolve il problema (9.22) allora

$$\int_0^1 f(t)u(t)dt = \int_0^1 u''(t)u(t)dt = -\int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

dalla disuguaglianza (9.23) di Poincaré e dalla disuguaglianza (1.1) di Schwarz si ottiene allora

$$\pi^2 \int_0^1 u^2(t)dt \leqslant -\int_0^1 f(t)u(t)dt \leqslant \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 u^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

cioè

$$\pi^2\|A(f)\|_2 = \pi^2\|u\|_2 \leqslant \|f\|_2$$

2. Inoltre, dalla proposizione 9.8 segue

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty^2 &\leqslant \int_0^1 (u'(t))^2 dt = -\int_0^1 f(t)u(t)dt \\ &\leqslant \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 u^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|f\|_2\|u\|_\infty \end{aligned}$$

□

[4] Il suo completamento è dato dallo spazio $\mathcal{L}^2([0,1])$.

Dimostrazione del teorema 9.11: secondo procedimento. Valga l'ipotesi (9.21).
Sappiamo che $u \in \mathcal{C}([0,1])$ risolve (9.19) se e solo se $u = A(-g \circ u)$ e cioè se u è punto fisso dell'operatore T sopra definito. Fissati $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0,1])$, per il punto 1 della proposizione 9.9 si ha

$$\|T(u_2) - T(u_1)\|_2 \leqslant \frac{L}{\pi^2}\|u_2 - u_1\|_2$$

Dunque, se $L < \pi^2$, T è una contrazione rispetto alla metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_2$.
Dal punto 2 della proposizione 9.9 segue che

$$\begin{aligned}\|T(u_2) - T(u_1)\|_\infty &= \|A(g \circ u_1 - g \circ u_2)\|_\infty \\ &\leqslant \|g \circ u_2 - g \circ u_1\|_2 \\ &\leqslant L\|u_2 - u_1\|_2\end{aligned}$$

Sia ora $\bar{u} \in \mathcal{C}([0,1])$; poiché T è una contrazione sappiamo che la successione $(T^n(\bar{u}))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy secondo la metrica indotta da $\|\cdot\|_2$; d'altra parte

$$\|T^{n+k}(\bar{u}) - T^n(\bar{u})\|_\infty \leqslant L\|T^{n+k-1}(\bar{u}) - T^{n-1}(\bar{u})\|_\infty$$

quindi $(T^n(\bar{u}))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy anche secondo la metrica d_∞, rispetto alla quale $\mathcal{C}([0,1])$ è completo.
Dunque $(T^n(\bar{u}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un elemento $u \in \mathcal{C}([0,1])$ in entrambe le norme, allora $T(u) = u$.
L'unicità della soluzione u, e cioè del punto fisso u di T segue evidentemente dal fatto che T è una contrazione nella norma $\|\cdot\|_2$. □

Osservazione: L'ipotesi (9.20) è soddisfatta, per esempio, se g è non crescente rispetto ad u, oppure se g è la somma di una funzione non crescente rispetto ad u e di una funzione soddisfacente l'ipotesi (9.21).

Dal teorema 9.11 segue il seguente

Corollario 9.12. *Nelle ipotesi del teorema 9.11, il problema*

$$\begin{cases} u'' + g(t,u) = f(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{9.24}$$

ammette unica soluzione quale che sia la funzione continua f su $[0,1]$.

Dimostrazione . Basta sostituire a g la funzione $g_1(t,u) = g(t,u) - f(t)$. □

Osservazione: Se vale (9.20) ma $L \geqslant \pi^2$ la tesi dipende dalla particolare funzione g (lo stesso se vale (9.21)).
Per esempio se $L = n\pi^2$ con $n \in \mathbb{N}^*$ e se $g(t,u) = Lu$, il problema (9.24) ha soluzione solo per certe f, come sappiamo, dato che L è autovalore della derivata seconda.
Se, invece, $L \neq n\pi^2\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ sappiamo che (9.24) ammette soluzione per ogni f continua.