Esercizi sul moto di caduta libera

Esercizio 1. Una pallina da tennis viene lasciata cadere dal punto più alto di una torre. Sapendo che il tempo che impiega a raggiungere il suolo è pari a $2,5\ s$, si determini:
a) la velocità con cui giunge a terra;
b) l'altezza della torre.

Esercizio 2. Un ragazzo lancia una palla da un terrazzo alto $4\ m$ con una velocità di $10\ m/s$ ***verso il basso***. Si determini:
a) il tempo che la palla impiega per raggiungere il suolo;
b) la velocità con cui giunge a terra.

Esercizio 3. Un ragazzo lancia una palla da un terrazzo alto $4\ m$ con una velocità di $10\ m/s$ ***verso l'alto***. Si determini:
a) la quota massima raggiunta dalla palla;
b) il tempo che la palla impiega per raggiungere la quota massima;
c) il tempo che la palla impiega per raggiungere il suolo;
d) la velocità con cui giunge a terra.

Esercizio 4. Un bambino lancia una caramella in aria e la riprende dopo $1,6\ s$.
a) Quale altezza (rispetto alla quota iniziale) ha raggiunto la caramella?
b) Con quale velocità l'ha lanciata?
c) Qual è la velocità della caramella quando la riprende? Cosa si osserva?

Esercizio 5. Il Professor Distratto lancia in aria una moneta che raggiunge, rispetto alla quota iniziale, la quota massima di $6\ m$.
a) Qual è la velocità con cui ha lanciato la moneta?
b) Il Professore riprende al volo la moneta: per quanto tempo resta in aria?

Esercizio 6. Un sasso viene lanciato verso l'alto da $2\ m$ dal suolo con una velocità pari a $25\ m/s$.
a) Qual è la velocità del sasso quando si trova a $12\ m$ di altezza?
b) Calcola la quota massima raggiunta.
c) Con quale velocità ripassa dalla stessa quota di $12\ m$ quando scende verso terra? Cosa si osserva?

Esercizio 7. Un sasso viene lasciato cadere da un punto molto alto. Dimostrare che lo spazio percorso durante ogni secondo successivo aumenta con lo stesso rapporto dei numeri dispari consecutivi $(1, 3, 5, 7, ...)$

Esercizio 8. Per misurare l'altezza di una rupe a picco sul mare si lascia cadere una pietra; il tonfo della pietra che colpisce l'acqua viene udito dopo $3,8\ s$. Quanto è alta la rupe? (Velocità del suono $= 340\ m/s$).

Esercizio 9. Un fisico lancia un sasso da un'altezza di $20\ m$; sapendo che il sasso arriva a terra dopo $3,2\ s$, determinare la velocità iniziale del sasso. E' stato lanciato verso l'alto oppure verso il basso?

Esercizio 10. Un sasso viene lanciato verso l'alto da un'altezza di $1\ m$ dal suolo con una velocità pari a $30\ m/s$; dopo $2\ s$ un altro sasso viene lanciato verso l'alto dalla stessa altezza con una velocità di $30\ m/s$. Determinare la quota alla quale si incontrano.

Esercizio 11. Una persona, seduta accanto ad una finestra alta $2\ m$, vede passare una pallina diretta verso il basso. La persona misura il tempo, uguale a $0,3\ s$, che la pallina impiega ad attraversare la lunghezza della finestra. Da che altezza, rispetto alla cornice superiore della finestra, è stata lasciata cadere la pallina (con velocità iniziale nulla)?

Esercizio 12. All'istante $t = 0\ s$ una pallina A viene lasciata cadere da un'altezza di $75\ m$ e una pallina B viene lanciata verso l'alto da $1\ m$ dal suolo con velocità iniziale tale da arrivare proprio alla quota massima di $75\ m$.
a) Dopo quanto tempo si incontrano?
b) A quale altezza dal suolo?

Esercizio 13. Una pallina viene lanciata con velocità v_0 verso l'alto. Sappiamo che deve raggiungere una quota h e che a metà tragitto la sua velocità si è dimezzata. Ce la farà a raggiungere la quota h?

Esercizio 14. Una pallina viene lasciata cadere (con velocità iniziale nulla) all'istante $t = 0\ s$ da un'altezza h. Dopo $t^*(< \sqrt{2\,h/g})$ secondi se ne lancia un'altra con velocità iniziale v_0 diretta verso il basso. Se vogliamo che le due palline si incontrino prima di giungere al suolo, qual è il minimo modulo di v_0 ?

Esercizio 15. (*Non è un esercizio sulla caduta libera!!*) Un corpo si sta muovendo di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione pari a $2\ m/s^2$; sapendo che all'istante $t = 1\ s$ occupa la posizione $x = 6\ m$ e che all'istante $t = 4\ s$ si trova in $x = 27\ m$, determinare:
a) la posizione x all'istante $t = 15\ s$;
b) la velocità all'istante $t = 20\ s$.

Soluzione degli esercizi sul moto di caduta libera

Esercizio 1. *Una pallina da tennis viene lasciata cadere dal punto più alto di una torre. Sapendo che il tempo che impiega a raggiungere il suolo è pari a* $2,5\ s$*, si determini:*
a) la velocità con cui giunge a terra;
b) l'altezza della torre.

Soluzione. a) La velocità della pallina all'istante t generico è $v = 0 - 9,8 \cdot t$, quindi all'istante $t = 2,5\ s$ la velocità risulta essere pari a $(0\ m/s) + (-9,8\ m/s^2) \cdot (2,5\ s) = -24,5\ m/s$.
b) Indicata con h l'altezza della torre, la legge oraria della pallina da tennis è $y = h + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8) \cdot t^2$; sostituendo $t = 2,5\ s$ dobbiamo ottenere $y = 0\ m$, quindi

$$0\ m = h - 0,5 \cdot 9,8\ m/s^2 \cdot (2,5\ s)^2 \quad \Rightarrow \quad h \approx 30,63\ m\ .$$

Esiste un'altro metodo per determinare l'altezza della torre: dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y - y_0)$ abbiamo

$$(-24,5\ m/s)^2 - (0\ m/s)^2 = 2 \cdot (-9,8\ m/s^2) \cdot (0\ m - h) \quad \Rightarrow \quad h \approx 30,63\ m\ .$$

Esercizio 2. *Un ragazzo lancia una palla da un terrazzo alto* $4\ m$ *con una velocità di* $10\ m/s$ ***verso il basso****. Si determini:*
a) il tempo che la palla impiega per raggiungere il suolo;
b) la velocità con cui giunge a terra.

Soluzione. a) La legge oraria della palla è $y = 4 + (-10) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8) \cdot t^2$, quando toccherà il suolo avremo $y = 0\ m$, quindi

$$0\ m = 4\ m - 10\ m/s \cdot t - 4,9\ m/s^2 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t \approx 0,34\ s \ \text{(l'altra soluzione va scartata).}$$

b) Primo metodo: la velocità della palla all'istante t generico è $v = -10 - 9,8 \cdot t$, quindi all'istante $t = 0,34\ s$ la velocità risulta essere pari a $-10\ m/s - (9,8\ m/s^2) \cdot (0,34\ s) \approx -13,33\ m/s$.
Secondo metodo: dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y - y_0)$ risulta:

$$v_f^2 = (-10\ m/s)^2 - 2 \cdot 9,8\ m/s^2 \cdot (0\ m - 4\ m) \quad \Rightarrow \quad v_f = -\sqrt{100\ m^2/s^2 + 19,6\ m/s^2 \cdot 4\ m} \approx -13,36\ m/s.$$

Osservazione. Nell'ultimo calcolo di v_f abbiamo scelto il segno negativo in quanto la velocità è rivolta verso il basso. Una domanda lecita è la seguente: come mai con il primo metodo abbiamo trovato $-13,33\ m/s$ mentre con il secondo $-13,36\ m/s$? La differenza sta nell'approssimazione che è stata fatta per il tempo t nel primo metodo: c'è stata una propagazione dell'errore. Il secondo metodo, invece, utilizza ***solo*** i dati del problema.

Esercizio 3. *Un ragazzo lancia una palla da un terrazzo alto* $4\ m$ *con una velocità di* $10\ m/s$ ***verso l'alto****. Si determini:*
a) la quota massima raggiunta dalla palla;
b) il tempo che la palla impiega per raggiungere la quota massima;
c) il tempo che la palla impiega per raggiungere il suolo;
d) la velocità con cui giunge a terra.

Soluzione. a) Dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y - y_0)$, ponendo $y_0 = 4\ m$, $v_i = 10\ m/s$ e $v_f = 0\ m/s$ (quando la palla raggiunge la quota massima la sua velocità è nulla) si ha

$$(0\ m/s)^2 - (10\ m/s)^2 = 2 \cdot (-9,8\ m/s^2) \cdot (y_{max} - 4\ m) \quad \Rightarrow \quad y_{max} \approx 9,1\ m\ .$$

b) La velocità della palla all'istante generico t è $v = 10 - 9,8 \cdot t$; quando la palla raggiunge la quota massima la velocità è nulla, quindi

$$0\ m/s = 10\ m/s - 9,8\ m/s^2 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t \approx 1,02\ s\ ;$$

possiamo determinare di nuovo la quota massima partendo dalla legge oraria $y = 4 + 10 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8) \cdot t^2 = 4 + 10 \cdot t - 4,9 \cdot t^2$ e sostituendo il valore ottenuto per t:

$$y_{max} = 4\ m + 10\ m/s \cdot (1,02\ s) - 4,9\ m/s^2 \cdot (1,02\ s)^2 \quad \Rightarrow \quad y_{max} \approx 9,1\ m\ .$$

Osservazione. Possiamo risolvere i punti a) e b) calcolando le coordinate del vertice della parabola avente la stessa equazione della legge oraria: si trova $t = 1,02\ s$ (ascissa del vertice) e $y_{max} = 9,1\ m$ (ordinata del vertice).

c) Sostituendo $y = 0\ m$ nella legge oraria della palla, abbiamo

$$0\ m = 4\ m + 10\ m/s \cdot t - 4,9\ m/s^2 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t \approx 2,38\ s \ \text{(l'altra soluzione va scartata).}$$

d) Primo metodo. Per determinare la velocità di impatto con il suolo è sufficiente sostituire il valore ottenuto per t nell'espressione della velocità:

$$v_f = 10\ m/s - 9,8\ m/s^2 \cdot (2,38\ s) \quad \Rightarrow \quad v_f \approx -13,32\ m/s\ .$$

Secondo metodo. Dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y - y_0)$, ponendo $y_0 = 4\ m$, $v_i = 10\ m/s$ e $y = 0\ m$ troviamo

$$v_f = -\sqrt{(10\ m/s)^2 - 2 \cdot 9,8\ m/s^2 \cdot (0\ m - 4\ m)} \approx -13,36\ m/s\ .$$

I risultati ottenuti con i due metodi sono diversi ($-13,32\ m/s$ "contro" $-13,36\ m/s$): la motivazione è già stata data nell'osservazione dell'esercizio 2.

Osservazione. La velocità finale è uguale alla velocità finale trovata nell'esercizio 2: **non è affatto un caso!**

Esercizio 4. *Un bambino lancia una caramella in aria e la riprende dopo* $1,6\ s$.
a) Quale altezza (rispetto alla quota iniziale) ha raggiunto la caramella?
b) Con quale velocità l'ha lanciata?
c) Qual è la velocità della caramella quando la riprende? Cosa si osserva?

Soluzione. a) - b) La caramella impiega $0,8\ s$ per raggiungere la quota massima; indicando con v_i la velocità con cui è stata lanciata, abbiamo

$$0\ m/s = v_i - 9,8\ m/s^2 \cdot (0,8\ s) \quad \Rightarrow \quad v_i = 7,84\ m/s\ .$$

Per determinare l'altezza massima raggiunta dalla caramella, dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y - y_0)$, abbiamo:

$$(0\ m/s)^2 - (7,84\ m/s)^2 = -19,6\ m/s^2 \cdot (y_{max} - y_0) \quad \Rightarrow \quad y_{max} - y_0 \approx 3,14\ m\ .$$

c) Quando la caramella viene ripresa dal bambino, la sua velocità ha modulo pari al modulo della velocità iniziale, ma verso opposto (è infatti rivolta verso il basso). In poche parole abbiamo $v = -7,84\ m/s$.

Esercizio 5. *Il Professor Distratto lancia in aria una moneta che raggiunge, rispetto alla quota iniziale, la quota massima di* $6\ m$.
a) Qual è la velocità con cui ha lanciato la moneta?
b) Il Professore riprende al volo la moneta: per quanto tempo resta in aria?

Soluzione. a) Dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y - y_0)$ abbiamo

$$(0\ m/s)^2 - v_i^2 = -19,6\ m/s^2 \cdot (6\ m) \quad \Rightarrow \quad v_i \approx 10,84\ m/s\ .$$

b) Calcoliamo il tempo che impiega a raggiungere la quota massima; dalla formula $v = v_i - 9,8 \cdot t$ abbiamo:

$$0\ m/s = 10,84\ m/s - 9,8\ m/s^2 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t \approx 1,11\ s\ ;$$

dopo aver raggiunto la quota massima, la moneta torna nella mano del professor Distratto dopo altri $1,11\ s$; in tutto resta in aria per circa $2 \cdot 1,11\ s = 2,22\ s$.

Esercizio 6. *Un sasso viene lanciato verso l'alto da* $2\ m$ *dal suolo con una velocità pari a* $25\ m/s$.
a) Qual è la velocità del sasso quando si trova a $12\ m$ *di altezza?*
b) Calcola la quota massima raggiunta.
c) Con quale velocità ripassa dalla stessa quota di $12\ m$ *quando scende verso terra? Cosa si osserva?*

Soluzione. a) Dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y - y_0)$ abbiamo

$$v_f^2 - (25\ m/s)^2 = -19,6\ m/s^2 \cdot (12\ m - 2\ m) \quad \Rightarrow \quad v_f \approx 20,71\ m/s\ .$$

b) Osservato che quando raggiunge la quota massima y_{max} la velocità del sasso è nulla, sempre dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-9,8) \cdot (y - y_0)$ abbiamo:

$$(0\ m/s)^2 - (25\ m/s)^2 = -19,6\ m/s^2 \cdot (y_{max} - 2\ m) \quad \Rightarrow \quad y_{max} \approx 33,89\ m\ .$$

c) La velocità con cui ripassa dalla stessa quota di $12\ m$ ha lo stesso modulo della velocità calcolata al punto a), ma verso opposto: la velocità, dunque, è $v \approx -20,71\ m/s$.

Esercizio 7. *Un sasso viene lasciato cadere da un punto molto alto. Dimostrare che lo spazio percorso durante ogni secondo successivo aumenta con lo stesso rapporto dei numeri dispari consecutivi* $(1, 3, 5, 7, ...)$

Soluzione. La legge oraria del sasso è $y = h - 4,9\,t^2$; lo spazio percorso tra gli istanti $t = n\ s$ e $t = (n+1)\ s$ è pari a $4,9 \cdot (n+1)^2 - 4,9 \cdot n^2 = 4,9 \cdot \left(n^2 + 2\,n + 1 - n^2\right) = 4,9 \cdot (2\,n + 1)$. □

Esercizio 8. *Per misurare l'altezza di una rupe a picco sul mare si lascia cadere una pietra; il tonfo della pietra che colpisce l'acqua viene udito dopo* $3,8\ s$. *Quanto è alta la rupe? (Velocità del suono* $= 340\ m/s$*).*

Soluzione. Indicato con t^* l'istante in cui la pietra cade in acqua, l'altezza h della rupe può essere espressa in due modi diversi:

$$\begin{cases} h = \dfrac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (t^*)^2 \\ h = 340 \cdot (3,8 - t^*) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h = \dfrac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (t^*)^2 \\ \dfrac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (t^*)^2 = 340 \cdot (3,8 - t^*) \end{cases}$$

le soluzioni sono $t^* \approx 3,61\ s$ (l'altra soluzione dell'equazione di 2° grado va scartata) e $h \approx 63,9\ m$.

Esercizio 9. *Un fisico lancia un sasso da un'altezza di* $20\ m$*; sapendo che il sasso arriva a terra dopo* $3,2\ s$*, determinare la velocità iniziale del sasso. E' stato lanciato verso l'alto oppure verso il basso?*

Soluzione. La legge oraria del sasso è $y = 20 + v_i\,t - 4,9\,t^2$; sappiamo che sostituendo $t = 3,2\ s$ troviamo $y = 0\ m$, quindi:

$$0 = 20 + v_i \cdot 3,2 - 4,9 \cdot (3,2)^2 \quad \Rightarrow \quad v_i = 9,43\ m/s\ .$$

Il risultato che abbiamo ottenuto è positivo, quindi il sasso è stato lanciato verso l'alto.

Esercizio 10. *Un sasso viene lanciato verso l'alto da un'altezza di* $1\ m$ *dal suolo con una velocità pari a* $30\ m/s$*; dopo* $2\ s$ *un altro sasso viene lanciato verso l'alto dalla stessa altezza con una velocità di* $30\ m/s$*. Determinare la quota alla quale si incontrano.*

Soluzione. Primo metodo. Al momento del lancio del secondo sasso, il primo sasso si trova a $\approx 41,4\ m$ si altezza dal suolo, con velocità $v = 10,4\ m/s$. Indicando con $t = 0\ s$ l'istante in cui viene lanciato il secondo sasso, le leggi orarie dei due sassi sono $y = 41,4 + 10,4\,t - 4,9\,t^2$ e $y = 1 + 30\,t - 4,9\,t^2$; risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 1 + 30\,t - 4,9\,t^2 \\ y = 41,4 + 10,4\,t - 4,9\,t^2 \end{cases}$$

troviamo le soluzioni $t \approx 2,06\ s$; $y \approx 42,02\ m$. In definitiva, i due sassi si incontrano dopo circa $2,06\ s$ dal lancio del secondo sasso ad una quota $y_{max} \approx 42,02\ m$.

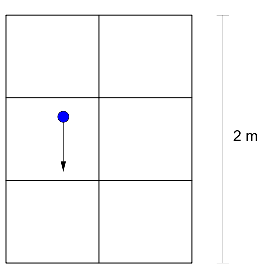
Secondo metodo (più veloce). Indicato con $t = 0\ s$ l'istante in cui viene lanciato il primo sasso, le due leggi orarie sono $y = 1 + 30\,t - 4,9\,t^2$ e $y = 1 + 30\,(t-2) - 4,9(t-2)^2$ (con $t > 2\ s$); ora basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = 1 + 30\,t - 4,9\,t^2 \\ y = 1 + 30\,(t-2) - 4,9(t-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + 30\,t - 4,9\,t^2 \\ 1 + 30\,t - 4,9\,t^2 = 1 + 30\,(t-2) - 4,9(t-2)^2 \end{cases}$$

svolgendo i calcoli si trova: $t \approx 4,06\ s$; $y \approx 42,02\ m$. Il tempo t trovato con il secondo metodo è maggiore di $2\ s$ rispetto al risultato trovato con il primo metodo; non c'è niente di strano, dal momento che abbiamo preso come riferimento di partenza ($t = 0\ s$) due istanti diversi.

Esercizio 11. *Una persona, seduta accanto ad una finestra alta $2\ m$, vede passare una pallina diretta verso il basso. La persona misura il tempo, uguale a $0,3\ s$, che la pallina impiega ad attraversare la lunghezza della finestra. Da che altezza, rispetto alla cornice superiore della finestra, è stata lasciata cadere la pallina (con velocità iniziale nulla)?*

Soluzione. Indichiamo con $t = 0\ s$ l'istante in cui la pallina viene lasciata cadere e con t^* l'istante in cui la pallina si trova all'altezza della cornice superiore della finestra; la pallina si troverà all'altezza della cornice inferiore della finestra all'istante $(t^* + 0,3\ s)$.



In questo intervallo di tempo (che inizia all'istante $t = t^*$ e finisce all'istante $t = t^* + 0,3\ s$) la pallina ha percorso $2\ m$ (è la lunghezza della finestra):

$$(4,9\ m/s^2) \cdot (t^* + 0,3\ s)^2 - 4,9 \cdot (t^*)^2 = 2\ m$$

risolvendo l'equazione si ricava $t^* \approx 0,53\ s$. La pallina è quindi stata lasciata cadere da un'altezza pari a $4,9 \cdot (0,53)^2 \approx 1,38\ m$ rispetto alla cornice superiore della finestra.

Esercizio 12. *All'istante $t = 0\ s$ una pallina A viene lasciata cadere da un'altezza di $75\ m$ e una pallina B viene lanciata verso l'alto da $1\ m$ dal suolo con velocità iniziale tale da arrivare proprio alla quota massima di $75\ m$.*
a) Dopo quanto tempo si incontrano?
b) A quale altezza dal suolo?

Soluzione. Vediamo le due leggi orarie: per la pallina A abbiamo $y = 75 - 4,9\,t^2$, mentre per quanto riguarda la pallina B, osserviamo che la sua velocità iniziale deve essere pari a $\sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot (75-1)} \approx 38,08\ m/s$ per cui la sua legge oraria è $y = 1 + 38,08\,t - 4,9\,t^2$. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = 75 - 4,9\,t^2 \\ y = 1 + 38,08\,t - 4,9\,t^2 \end{cases}$$

si trovano i risultati $t \approx 1,94\ s$, $y \approx 56,5\ m$. In definitiva le due palline si incontrano dopo $1,94\ s$ ad una quota di $56,5\ m$.

Esercizio 13. *Una pallina viene lanciata con velocità v_0 verso l'alto. Sappiamo che deve raggiungere una quota h e che a metà tragitto la sua velocità si è dimezzata. Ce la farà a raggiungere la quota h?*

Soluzione. La velocità minima v_{min} che permette alla pallina di raggiungere la quota h è pari a $\sqrt{2\,g\,h}$. Dalla formula $v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot (-g) \cdot (y - y_0)$ abbiamo

$$\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - v_0^2 = -2\,g\left(\frac{h}{2} - 0\right)$$

ricavando v_0 abbiamo

$$-\frac{3}{4}\,v_0^2 = -gh \quad\Rightarrow\quad v_0 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} < \sqrt{2\,gh}\ ;$$

possiamo affermare quindi che la pallina non arriverà alla quota h. Anche se non richiesto, determiniamo la massima quota y_{max} raggiunta (che sarà ovviamente minore di h):

$$0^2 - \left(2\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2 = -2\,g(y_{max} - 0) \quad\Rightarrow\quad y_{max} = \frac{2}{3}\,h < h\ .$$

Esercizio 14. *Una pallina viene lasciata cadere (con velocità iniziale nulla) all'istante $t = 0\ s$ da un'altezza h. Dopo $t^*(< \sqrt{2\,h/g})$ secondi se ne lancia un'altra con velocità iniziale v_0 diretta verso il basso. Se vogliamo che le due palline si incontrino prima di giungere al suolo, qual è il minimo modulo di v_0 ?*

Soluzione. Il tempo che la prima pallina impiega a giungere al suolo è pari a $\sqrt{\dfrac{2\,h}{g}}$. Indicando con $t = 0\ s$ l'istante in cui viene lanciata la seconda pallina, la sua legge oraria è $y = h - v_0\,t - \dfrac{g}{2}\,t^2$ (con $v_0 > 0$); per trovare quanto tempo impiega a giungere al suolo basta risolvere l'equazione $0 = h - v_0\,t - \dfrac{g}{2}\,t^2$:

$$t_{1,2} = \begin{cases} \nearrow\ t_1 = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\,gh}}{-g} = -\dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2\,gh}}{g} \\[2ex] \searrow\ t_2 = \dfrac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2\,gh}}{-g} = \dfrac{\sqrt{v_0^2 + 2\,gh} - v_0}{g} \end{cases}$$

la soluzione t_1 è sempre < 0 e va quindi scartata; la soluzione "buona" è t_2 (> 0). Affinché le due palline si incontrino prima di giungere al suolo, dobbiamo avere

$$t^* + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2\,gh} - v_0}{g} < \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{v_0^2 + 2\,gh}}{g} < \sqrt{\frac{2\,h}{g}} - t^* + \frac{v_0}{g}$$

svolgendo i calcoli si trova che

$$v_0 > g\,t^*\frac{\sqrt{\dfrac{2\,h}{g}} - \dfrac{t^*}{2}}{\sqrt{\dfrac{2\,h}{g}} - t^*}\ .$$

Esercizio 15. *(Non è un esercizio sulla caduta libera!!) Un corpo si sta muovendo di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione pari a $2\ m/s^2$; sapendo che all'istante $t = 1\ s$ occupa la posizione $x = 6\ m$ e che all'istante $t = 4\ s$ si trova in $x = 27\ m$, determinare:*
a) la posizione x all'istante $t = 15\ s$;
b) la velocità all'istante $t = 20\ s$.

Soluzione. La legge oraria è $x = x_0 + v_0\,t + \dfrac{1}{2} \cdot 2\,t^2 = x_0 + v_0\,t + t^2$; per determinare x_0 e v_0 possiamo sfruttare le condizioni scritte nel testo dell'esercizio:

$$\begin{cases} 6 = x_0 + v_0 \cdot 1 + 1^2 \\ 27 = x_0 + v_0 \cdot 4 + 4^2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_0 = 3\ m \\ v_0 = 2\ m/s \end{cases}$$

Possiamo ora rispondere agevolmente alle richieste specifiche a) e b):
a) all'istante $t = 15\ s$ la posizione è $x = 3 + 2 \cdot 15 + 15^2 = 258\ m$;
b) all'istante $t = 20\ s$ la velocità è $v = 2 + 2 \cdot 20 = 42\ m/s$.