

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA



DOTTORATO DI RICERCA IN FISICA - XVI CICLO

Metodi di Computer Algebra
applicati allo studio della
Teoria delle Onde Gravitazionali

Tesi di

Gianluca Cruciani

Tutori

Prof. Remo Ruffini

Coordinatore

Prof. Pasquale Sodano

Dott. Donato Bini

A. A. 2002/2003

Premessa

Fra i diversi argomenti che, negli ultimi decenni, hanno costituito la spina dorsale della ricerca teorica connessa con gli aspetti fenomenologici della Relatività Generale, quello rappresentato dallo studio delle onde gravitazionali può considerarsi, forse, il più rilevante dal punto di vista delle aspettative sperimentali e, contemporaneamente, uno dei più presenti nell'ampia rassegna delle indagini speculative che non cessano di ramificarsi dal tronco originario della rivoluzione einsteiniana del secolo scorso.

Scopo principale di questo lavoro è rendere palese il fatto che, nelle modalità con cui tali indagini prendono corpo e alimento dagli strumenti matematici necessari al loro sviluppo, può ravvisarsi una sostanziale unità metodologica che risulta pienamente evidenziata dall'uso di quelle tecniche di elaborazione informatica collettivamente designate, per brevità, col nome di *computer algebra*.

In particolare, si mostrerà, anche attraverso il conseguimento di risultati originali in ambiti diversi ma sempre afferenti il tema principale sopra citato, come tali metodiche risultino particolarmente efficaci laddove il fulcro della trattazione teorica sia costituito dai prodotti della perturbazione di un tensore metrico rappresentativo di uno spazio-tempo di background, o dallo studio delle proprietà di simmetria del medesimo.

Per quanto riguarda il software usato per l'esecuzione dei calcoli e la produzione dell'apparato grafico di supporto, esso consta di:

- un ambiente di calcolo simbolico e numerico
(**Mathematica**TM - verss. **4.x** - della *Wolfram Research*)
- un applicativo di calcolo tensoriale per il medesimo ambiente
(**MathTensor**TM - vers. **2.2** - di *S. Christensen e L. Parker*)

L'adozione di modalità tipografiche distinte, l'inclusione tra coppie di righe orizzontali e la speciale numerazione delle righe, riferita all'inserimento di formule ed al corrispondente output del software, caratterizzano, nel testo, l'inserimento di brani di "quaderni"

(notebooks), i documenti generati dai suddetti programmi:

Quaderno x

(Eventuali commenti)

In[1] := Formula input

Out[1] = Formula output

in cui verrà rispettato, in generale, un principio di diretta implementabilità, per cui le medesime righe di input, trasferite all'interno di un quaderno vuoto, debbono poter essere elaborate in modo da produrre l'output indicato. Tale output, peraltro, potrà essere in parte o del tutto soppresso nella trascrizione, quando non sia rilevante ai fini della comprensione delle procedure di calcolo.

Sempre per una scelta di rispetto del codice generato, si sono ridotti al minimo indispensabile gli interventi di carattere estetico, relativi all'articolazione irregolare delle linee testuali dei quaderni, generalmente utile ad una migliore comprensione del contenuto.

L'autore renderà reperibili i documenti completi, nel formato proprietario con estensione *.nb*, nella propria sottopagina web del corso di dottorato dell'Università di Perugia.

Convenzioni

Per la notazione tensoriale nel testo esplicativo verranno usate le consuete convenzioni di [1] (indici latini assumono valori compresi tra 1 e 3, indici greci tra 0 e 3; la contrazione del tensore di Riemann che dà luogo al tensore di Ricci viene operata sugli indici primo e terzo). Si adotteranno inoltre, salvo esplicita indicazione, le *unità geometriche* per le quali $G = c = 1$.

Nelle parti direttamente connesse agli sviluppi di calcolo, costituite dalla trasposizione di quaderni di computer algebra, si farà, invece, uso di convenzioni adattate al tipo di applicativo usato, allo scopo di assicurare la massima funzionalità e chiarezza alle procedure algoritmiche; in particolare, la convenzione sugli indici tensoriali è sostituita dall'uso permanente di indici latini (che sono intesi variare da 1 a 4 secondo identificazioni di coordinata che verranno di volta in volta specificate). Le linee di testo esplicative di queste porzioni di elaborato sono scritte in carattere *inclinato*.

Introduzione

Che cos'è un'onda gravitazionale?

Fu Albert Einstein stesso ad introdurre questo concetto nel 1916, individuandone l'essenziale natura di corollario, nella teoria geometrica da lui stabilita ed universalmente nota come “della Relatività Generale”, al postulato di costanza e finitezza della velocità di propagazione delle perturbazioni del campo gravitazionale nel vuoto.

In approssimazione di campo debole (vedi, ad es., la classica derivazione di Landau-Lifšits [2]), l'equazione rappresentativa di una perturbazione ondulatoria del campo di gravità, se $h_{\mu\nu}$ è il tensore che perturba la metrica piatta di Minkowski, venne subito individuata in analogia completa con il campo elettromagnetico, come

$$\square h^\mu{}_\nu = 0 \tag{1}$$

con \square ad indicare l'operatore di D'Alembert $\partial^\alpha \partial_\alpha$.

Fu altresì subito chiaro che, data la non linearità del modello complessivo, formulare una teoria esatta dell'evoluzione di un sistema fisico caratterizzato da processi che implicano l'emissione e l'interazione di onde gravitazionali con la materia o con altre onde avrebbe comportato l'esigenza di confrontarsi con problemi relativamente nuovi e di difficile soluzione. Anche nel più semplice dei casi, infatti, quello cioè del moto di una particella massiva puntiforme in orbita attorno ad un corpo che generi un campo gravitazionale di background, ciò comporta l'esigenza di considerare non solo l'azione perturbatrice della particella sul suddetto campo, che modifica lo spazio-tempo con riflessi *primari* sul proprio moto, ma anche la perdita di energia della particella stessa, corrispondente all'irraggiamento prodotto, dagli importanti effetti dinamici, riconducibili ad una sorta di attrito frenante (*reazione di radiazione*); poiché ad ogni variazione cinematica del sistema corrisponde una diversa modalità nella generazione delle perturbazioni ondulatorie, la complessità del quadro teorico formatosi risulta già chiaramente evidenziata.

L'impianto di questa tesi, volta a rappresentare alcuni aspetti di tali complessità teoriche nel linguaggio dell'analisi tensoriale quale appare dall'uso dello strumento informatico, è

il seguente:

- nel primo Capitolo verrà illustrato un metodo per ricavare la consistenza delle cosiddette equazioni di Einstein *rilassate*, che costituiscono la base del formalismo post-newtoniano di quadrupolo e delle sue varianti più recenti (post-Minkowskiano e DIRE -ad integrazione diretta delle equazioni-), finalizzate, in modo particolare, alla creazione di supporti teorici e “templates” sperimentali (stampi, matrici per l’analisi dei dati osservativi) per i modelli di coalescenza di sistemi binari collassati, la più promettente fonte di segnali localizzati per le strutture di rivelazione di onde gravitazionali attualmente nelle prime fasi operative;
- nel Cap. II si tratterà di uno dei più importanti percorsi della ricerca relativistica connessi allo studio evolutivo di una soluzione spazio-temporale: la perturbazione delle metriche a simmetria sferica statica (Schwarzschild e Reissner-Nordstrøm, rispettivamente di buco nero neutro ed elettricamente carico). Alcuni sviluppi nella teoria dei GRB (Gamma-Ray Bursts -i lampi di luce gamma che costituiscono le tracce degli eventi astrofisici isolati di più grande impegno energetico che si possano osservare, dell’ordine di $10^{47} J$)[3, 4, 5] lasciano, infatti, supporre che sia possibile un’interpretazione del fenomeno in chiave di formazione di un EMBH (buco nero elettromagnetico, ossia dotato di carica elettrica, il cui corrispondente spazio-tempo indotto è, per l’appunto, quello di Reissner-Nordstrøm): nell’attesa che, come è stato recentemente proposto per i modelli tradizionali (vedi, ad es., [6]), si individuino anche per questo paradigma teorico le modalità interpretative dei dati sperimentali che possano, eventualmente, ricondurlo ad una correlazione con alcune tipologie di *bursts* gravitazionali, è chiaro come la comprensione dei dettagli inerenti le perturbazioni del tensore metrico di pertinenza ne siano un’essenziale premessa;
- infine, nel Cap. III si passerà dal considerare il problema della generazione delle onde gravitazionali a trattare quello della loro mutua interazione e degli effetti che questa produce su generiche particelle-test e su campi specifici (quelli di neutrino, in particolare), attraverso una disamina delle caratteristiche intrinseche della soluzione del sistema di Einstein che più fedelmente si presta alla rappresentazione di una simile situazione fisica, ossia la metrica di Ferrari-Ibañez.

Capitolo 1

Approssimazione post-newtoniana ed equazioni di Einstein rilassate

Gli studi statistici sulla frequenza degli eventi di coalescenza di sistemi binari collassati trovano agli albori degli anni '90 del secolo scorso i primi risultati di una certa affidabilità, in particolare con [7], [8]. In essi è ricavata una stima del tasso di occorrenza di tali eventi (riferiti a coppie di stelle di neutroni e coppie di buchi neri) pari a circa 3 all'anno, in un raggio di 200 Mpc.

Tale considerazione fu di scorta alle precedenti iniziative di progettazione di esperimenti di rivelazione di onde gravitazionali, intraprese da diverse comunità scientifiche nazionali ed internazionali, con l'uso di strumenti a risonanza ed interferometrici, alcuni dei quali operativi allo stato attuale o in fase di pre-attività.

È, infatti, opinione pressoché unanime che sia quella citata in precedenza la classe di eventi astrofisici localizzati che dovrebbe fornire la miglior traccia osservativa in termini di produzione e conseguente rivelazione di onde gravitazionali.

La possibilità di associare ad un fenomeno dinamico una reazione radiativa suscettibile di rivelazione sperimentale scaturisce dal verificarsi di almeno due precondizioni essenziali:

- la stabilità della metrica di background indotta dagli oggetti che costituiscono il sistema dinamico;
- la possibilità di individuare nella reazione radiativa la causa preponderante della deviazione dalla geodeticità del moto di quella componente del sistema che si sceglie di trattare come piccola perturbazione (nel caso dell'approccio perturbativo).

Queste precondizioni garantiscono, dal punto di vista teorico, la consistenza della trattazione analitica (la prima) e la possibilità di un’analisi semiclassica (la seconda).

La proposta di un modello teorico dell’emissione di GW (acronimo, largamente usato, di “gravitational waves”) algebricamente basato su di uno sviluppo del potenziale classico newtoniano $-C/x^2$ è, sostanzialmente, coevo all’introduzione del concetto stesso di GW. DeSitter, infatti, ne produsse la sua formulazione originale [9] nello stesso anno (1916) dell’articolo fondativo di Einstein sulla Relatività Generale [10].

Successivamente, molti autori, fra i quali val la pena di ricordare in particolare H. Bondi, R. K. Sachs, R. Penrose, T. Damour, L. Blanchet, svilupparono in modo sempre più particolareggiato le tecniche di approssimazione progressiva alle equazioni del moto e della reazione di radiazione di sistemi binari gravitanti che ancora oggi chiamiamo, in varie declinazioni, “Post-Newtoniane”.

In essa la forza agente su di un sistema dinamico binario caratterizzato da massa totale M e separazione \vec{x} viene formalizzata (abbandonando per un istante, onde rendere più comprensibile la scrittura, le unità geometriche in favore del SI) come:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{GM}{x^3}\vec{x} \left[1 + O(\eta) + \sum_{n=3}^p O(\eta)^{n/2} \right], \quad (1.1)$$

in cui p è definito come l’**ordine** dell’approssimazione post-newtoniana e $\eta = v^2/c^2$ ne costituisce il parametro caratteristico di sviluppo, i cui esponenti nei singoli termini della (1.1) distinguono gli apporti correttivi in:

- termine **precessionale** ($n = 2$)
- altri termini **cinetici non dissipativi** ($n = 4, n = 6, \dots, 2h$)
- termini di **reazione radiativa** ($n = 3, n = 5, \dots, 2h + 1$)

Alla base delle differenti metodiche di sviluppo dei termini d’interazione di natura non lineare sta la possibilità di riscrivere il sistema di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

in modo che risulti conveniente definire il tensore metrico rinormalizzato all’elemento di volume (chiamato anche \mathfrak{g} (“g gotico”) per la ricorrenza di questa simbologia nei testi classici) in termini di un tensore di campo $h^{\mu\nu}$ che ne misuri la deviazione dalla metrica minkowskiana $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$:

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (1.3)$$

ed in riferimento al quale, una volta scelto un sistema di coordinate *armonico* per cui

$$h^{\mu\alpha},_{\alpha} = 0, \quad (1.4)$$

si pervenga alla equazione ondulatoria finale

$$\square h^{\mu\nu} = -16\pi \tau^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

dove \square è l'operatore di D'Alembert in spazio piatto $\nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$, mentre $\tau^{\mu\nu}$ è il *tensore energia-impulso efficace*:

$$\tau^{\mu\nu} = -g(T^{\mu\nu} + t_{LL}^{\mu\nu}) + \frac{1}{16\pi}(h^{\rho\mu},_{\sigma} h^{\sigma\nu},_{\rho} - h^{\mu\nu},_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma}). \quad (1.6)$$

In questa espressione $t_{LL}^{\mu\nu}$ risulta essere lo *pseudotensore energia-impulso*, ricavato per la prima volta da L. D. Landau ed E. M. Lifšits ([2], §96), il cui ruolo è quello di integrare (sotto opportune condizioni di gauge per il tensore metrico) $T_{\mu\nu}$, il tensore energia-impulso che compare in (1.2), con i termini di 4-impulso del campo gravitazionale indotti dalla non linearità delle equazioni.

È a partire dalla (1.5), detta *equazione di Einstein in coordinate armoniche* oppure *rilassata*, per la possibilità formale di risolverla in termini di funzionali che non dipendono dal moto delle sorgenti del campo, che tuttora prendono le mosse tutte le procedure di integrazione volte a ricavare le espressioni dei termini post-newtoniani di approssimazione della dinamica del sistema (che costituiscono il riferimento di calcolo per l'emissione di GW e del relativo segnale in ricezione da parte degli apparati sperimentali), differenziandosi reciprocamente per il metodo d'integrazione adottato (diretto o iterativo), per la definizione dei domini in cui considerare funzioni di Green sincroniche o ritardate e per le modalità risolutive delle rispettive patologie di convergenza.

Nel seguito del capitolo, si mostra come sia possibile ricavare l'equazione rilassata attraverso l'uso di un funzionale tensoriale che derivi, in forma, dalle espressioni completamente svolte del tensore $G_{\mu\nu}$ di Einstein in funzione delle componenti del tensore metrico. Si tratta dell'applicazione di una funzionalità caratteristica dell'applicativo di calcolo tensoriale *MathTensor*, che ingloba le regole di conversione dei tensori di curvatura in funzione dei simboli di Christoffel e, successivamente, di questi nelle componenti del tensore metrico.

A titolo di esempio, l'espressione del tensore di Einstein (due volte covariante) è ricavabile in termini delle connessioni affini come:

Quaderno 1

Caricamento del pacchetto di calcolo tensoriale "MathTensor":

In[1] := <<mathtens.m

Out[1]= <Output soppresso >

Disattivazione degli automatismi di innalzamento/abbassamento degli indici tensoriali:

In[2] := Off[MetricgFlag]

Creazione di un oggetto F a due indici (di dimensione arbitraria) con le caratteristiche di un tensore simmetrico:

In[3] := DefineTensor[F, {{2, 1}, 1}]

Out[3]= <Output soppresso >

Definizione del tensore F quale tensore di Einstein esplicitato nella dipendenza dai simboli di Christoffel del secondo tipo, qui indicati come G_{yz}^x :

In[4] := F[ui_, uj_] =

Expand[ScalarRtoAffine[
 RicciToAffine[
 EinsteinG[ui, uj]/.
 EinsteinToRicciRule]]]

Out[4]= $(G_{qr}^p) (G_{ps}^s) (g^{qj}) (g^{ri}) - (G_{qr}^p) (G_{ps}^q) (g^{ri}) (g^{sj}) -$
 $\frac{1}{2} (G_{qr}^p) (G_{ps}^s) (g^{qr}) (g^{ij}) + \frac{1}{2} (G_{qr}^p) (G_{ps}^q) (g^{rs}) (g^{ij}) +$
 $(g^{pi}) (g^{qj}) (G_{pq,r}^r) - \frac{1}{2} (g^{pq}) (g^{ij}) (G_{pq,r}^r) -$
 $(g^{pi}) (g^{qj}) (G_{pr,q}^r) + \frac{1}{2} (g^{pq}) (g^{ij}) (G_{qr,p}^r)$

Si può esplicitare la (1.5) nella forma già ridotta dall'imposizione del gauge armonico di deDonder in funzione del potenziale perturbativo h (cfr. ad es. Pati-Will [11]):

Attivazione dei 9 tensori simmetrici di rango 2 necessari alla definizione dell'eq. rilassata:

```
In[5] := DefineTensor[{eta,h,einst,einstrel,
                    boxh,T,tau,lambda,tLL,m},{2,1,1}]
```

in cui “eta” è la metrica di Minkowski, “lambda” è il tensore del contributo di campo non lineare, “tau” lo pseudotensore energia-impulso efficace, “m” il tensore che rappresenta una generica metrica perturbata (il simbolo “g” è riservato dal sistema). L'equazione rilassata in forma implicita (la quantità uguagliata a zero, cioè), dove è indicato con “boxh” il D'Alembertiano di h, si scrive :

```
In[6] := einst[um_,un_] :=
        boxh[um,un] + 16π tau[um,un]
```

Definizione del D'Alembertiano come $\eta^{\alpha\beta} h^{\mu\nu}_{,\alpha\beta}$:

```
In[7] := boxh[um_,un_] :=
        eta[ua,ub] OD[h[um,un],la,lb]
```

Nella definizione di tau interviene la quantità $\sqrt{-g}$, qui indicata con “ev” (acronimo di “elemento di volume”) :

```
In[8] := tau[um_,un_] :=
        ev T[um,un] + lambda[um,un]/(16π)
```

Nella definizione di Λ , contributo non lineare di campo, compare lo pseudotensore di Landau-Lifšits “tLL” :

```
In[9] := lambda[um_,un_] :=
        16π ev tLL[um,un] +
        (OD[h[um,ua],lb] OD[h[un,ub],la] -
         OD[h[um,un],la,lb] h[ua,ub])
```

Riduzione di tLL dopo l'imposizione del gauge armonico di deDonder su h :

```
In[10] := tLL[um_, un_] :=
(m[1a, 1b] m[uc, ud] OD[h[um, ua], 1c]
  OD[h[un, ub], 1d] +
m[1a, 1b] m[um, un] OD[h[ua, uc], 1d]
  OD[h[ud, ub], 1c] / 2 -
m[1b, 1c]
  (m[ua, um] OD[h[un, uc], 1d] +
   m[ua, un] OD[h[um, uc], 1d])
  OD[h[ud, ub], 1a] +
(2m[um, ua] m[un, ub] -
  m[um, un] m[ua, ub])
  (2m[1c, 1d] m[1e, 1f] -
   m[1d, 1e] m[1c, 1f]) OD[h[uc, uf], 1a]
  OD[h[ud, ue], 1b] / 8) / (16π ev)
```

Questa è l'espressione esplicita dell'equazione rilassata:

```
In[11] := einstrel[um_, un_] =
  Tsimplify[Expand[einst[um, un]]]
Out[11] = 1/2 (mab) (mmn) (hac,d) (hbd,c) +
  (ham,b) (hbn,a) + (mab) (mcd) (ham,c) (hbn,d) -
  (mbc) (man) (hbd,a) (hcm,d) -
  (mbc) (mam) (hbd,a) (hcn,d) -
  1/4 (mcf) (mde) (mam) (mbn) (hcf,a) (hde,b) +
  1/2 (mcd) (mef) (mam) (mbn) (hcf,a) (hde,b) +
  1/8 (mcf) (mde) (mab) (mmn) (hcf,a) (hde,b) -
  1/4 (mcd) (mef) (mab) (mmn) (hcf,a) (hde,b) +
  (etaab) (hmn,ab) - (hab) (hmn,ab) + 16 ev π (Tmn)
```

Si può verificare facilmente che l'espressione sopra considerata dello pseudotensore di Landau-Lifšits, che contiene l'informazione sostanziale riguardo la non-linearità della risposta alle perturbazioni dello spazio-tempo, risulta coincidere con quella che si ottiene dalla definizione [2] una volta che si tenga conto della forma della metrica e delle proprietà che essa induce:

Attivazione di altri tre tensori simmetrici di rango 2 :

In[12] := DefineTensor[{TLL, x}, { {2, 1}, 1 }]

Pseudotensore di Landau-Lifšits in funzione di “g gotico” con $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \rightarrow x^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} \rightarrow m^{\mu\nu}$ (da L. D. Landau, E.M. Lifšits: “Teoria dei Campi” - form. (96.9)):

In[13] := TLL[ui_, uj_] =

$$\begin{aligned}
 & (\text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{ui}, \mathbf{uj}], 11] \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{u1}, \mathbf{u2}], 12] - \\
 & \quad \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{ui}, \mathbf{u1}], 11] \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{uj}, \mathbf{u2}], 12] + \\
 & \quad \text{m}[\mathbf{ui}, \mathbf{uj}] \text{m}[\mathbf{11}, \mathbf{12}] \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{u1}, \mathbf{u3}], 14] \\
 & \quad \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{u4}, \mathbf{u2}], 13] / 2 - \\
 & \quad \text{m}[\mathbf{ui}, \mathbf{u1}] \text{m}[\mathbf{12}, \mathbf{13}] \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{uj}, \mathbf{u3}], 14] \\
 & \quad \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{u2}, \mathbf{u4}], 11] - \\
 & \quad \text{m}[\mathbf{uj}, \mathbf{u1}] \text{m}[\mathbf{12}, \mathbf{13}] \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{ui}, \mathbf{u3}], 14] \\
 & \quad \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{u2}, \mathbf{u4}], 11] + \\
 & \quad \text{m}[\mathbf{u3}, \mathbf{u4}] \text{m}[\mathbf{11}, \mathbf{12}] \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{ui}, \mathbf{u1}], 13] \\
 & \quad \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{uj}, \mathbf{u2}], 14] + \\
 & \quad (2 * \text{m}[\mathbf{ui}, \mathbf{u1}] \text{m}[\mathbf{uj}, \mathbf{u2}] - \\
 & \quad \quad \text{m}[\mathbf{ui}, \mathbf{uj}] \text{m}[\mathbf{u1}, \mathbf{u2}]) \\
 & \quad (2 * \text{m}[\mathbf{13}, \mathbf{14}] \text{m}[\mathbf{15}, \mathbf{16}] - \\
 & \quad \quad \text{m}[\mathbf{14}, \mathbf{15}] \text{m}[\mathbf{13}, \mathbf{16}]) \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{u3}, \mathbf{u6}], 11] \\
 & \quad \text{OD}[\mathbf{x}[\mathbf{u4}, \mathbf{u5}], 12] / 8) / (16 * \pi * \mathbf{ev})
 \end{aligned}$$

Out[13] = $\frac{1}{16 \text{ ev } \pi}$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} (m_{pq}) (m^{ij}) (x^{pr},_s) (x^{qs},_r) - (x^{pi},_p) (x^{qj},_q) + \right. \\
 & \quad (m_{pq}) (m^{rs}) (x^{pi},_r) (x^{qj},_s) - (m_{qr}) (m^{pj}) \\
 & \quad \left. (x^{qs},_p) (x^{ri},_s) - (m_{qr}) (m^{pi}) (x^{qs},_p) (x^{rj},_s) + \right. \\
 & \quad \frac{1}{8} (- (m_{ru}) (m_{st}) + 2 (m_{rs}) (m_{tu})) \\
 & \quad (2 (m^{pi}) (m^{qj}) - (m^{pq}) (m^{ij})) \\
 & \quad \left. (x^{ru},_p) (x^{st},_q) + (x^{pq},_q) (x^{ij},_p) \right)
 \end{aligned}$$

Essendo $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$, le derivate di “g gotico” eguagliano quelle di h cambiate di segno, quindi :

In[14] := **Unprotect**[OD];

OD/ : OD[x[i_, j_], a_] := -OD[h[i, j], a];

Protect[OD];

In[15] := **TLL**[ui, uj]

Out[15] = $\frac{1}{16 \text{ ev } \pi}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} (m_{pq}) (m^{ij}) (h^{pr},_s) (h^{qs},_r) - (h^{pi},_p) (h^{qj},_q) + \right. \\ & (m_{pq}) (m^{rs}) (h^{pi},_r) (h^{qj},_s) - (m_{qr}) (m^{pj}) \\ & (h^{qs},_p) (h^{ri},_s) - (m_{qr}) (m^{pi}) (h^{qs},_p) (h^{rj},_s) + \\ & \left. \frac{1}{8} (- (m_{ru}) (m_{st}) + 2 (m_{rs}) (m_{tu})) (2 (m^{pi}) (m^{qj}) - (m^{pq}) (m^{ij})) \right. \\ & \left. (h^{ru},_p) (h^{st},_q) + (h^{pq},_q) (h^{ij},_p) \right) \end{aligned}$$

Il gauge armonico si traduce in una condizione sulle derivate di h nel modo seguente :

In[16] := **Unprotect**[OD];

OD/ : OD[h[i_, u1], l1] := 0;

OD/ : OD[h[u1, i_], l1] := 0;

OD/ : OD[h[i_, u2], l2] := 0;

OD/ : OD[h[u2, i_], l2] := 0;

Protect[OD];

In[17] := **TLL**[ui, uj]

Out[17] = $\frac{1}{16 \text{ ev } \pi}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} (m_{pq}) (m^{ij}) (h^{pr},_s) (h^{qs},_r) + (m_{pq}) (m^{rs}) \right. \\ & (h^{pi},_r) (h^{qj},_s) - (m_{qr}) (m^{pj}) (h^{qs},_p) (h^{ri},_s) - \\ & (m_{qr}) (m^{pi}) (h^{qs},_p) (h^{rj},_s) + \\ & \left. \frac{1}{8} (- (m_{ru}) (m_{st}) + 2 (m_{rs}) (m_{tu})) \right. \\ & \left. (2 (m^{pi}) (m^{qj}) - (m^{pq}) (m^{ij})) (h^{ru},_p) (h^{st},_q) \right) \end{aligned}$$

e le due espressioni dello pseudotensore di Landau-Lifšits coincidono :

In[18] := **Simplify**[

Tsimplify[**TLL**[ui, uj] - **Dum**[**tLL**[ui, uj]]]]

Out[18] = 0

Capitolo 2

Analisi perturbativa della metrica di Reissner-Nordstrøm

Relativamente alla trattazione di sistemi gravitanti sottoposti a piccole perturbazioni, si è subito portati ad una scelta di fondo: attenersi pienamente allo spirito del modello einsteiniano ed aggredire il problema della risposta del tensore metrico alla presenza di agenti perturbanti, oppure considerare direttamente la variazione della curvatura spazio-temporale da essi indotta?

Le complicazioni formali indotte dalla prima opzione si sono riflesse nella lunga storia del problema della *stabilità del buco nero di Schwarzschild*, affrontato per la prima volta da Tullio Regge e John A. Wheeler [12] nel 1957 e portato a conclusione da Frank J. Zerilli [13, 14, 15] nel 1970, con tappe intermedie segnate da lavori di J. Mathews [16], K. Thorne [17], C. Vishveshwara [18, 19] ed altri, alle prese con la complessità tecnica del problema, inerente il controllo dello sviluppo del tensore di Ricci perturbato e le adeguate condizioni di gauge che permettono la soluzione del sistema di Einstein ridotto.

Tali complicazioni indussero successivamente a considerare il problema delle perturbazioni di curvatura della soluzione di Kerr (buco nero rotante), portando al cosiddetto *formalismo BPT* (dal nome dei principali autori coinvolti, Bardeen, Press e Teukolsky)[20, 21, 22, 23], imperniato sulla trattazione alla Newman-Penrose [24] delle variazioni del tensore di Riemann.

Più recentemente, tuttavia, riproponendosi il problema di derivare le equazioni di Einstein relative alle perturbazioni statiche della soluzione di buco nero elettricamente carico, si è scelto di recuperare l'approccio *alla Zerilli* onde fruirne dei vantaggi in termini di completezza e pulizia del quadro teorico, tenendo conto dell'attuale maggior versatilità nella

gestione dei calcoli tensoriali indotta dall'uso della computer algebra.

2.1 Lo schema di Regge-Wheeler

Nel 1957 la questione della stabilità del buco nero di Schwarzschild trova la sua prima formulazione analitica rigorosa in un articolo, rimasto come un riferimento imprescindibile, di Tullio Regge e John Archibald Wheeler [12], in cui, con alcune limitazioni dovute ad errori formali ed incompletezze varie, la risposta fornita è positiva.

Il problema perturbativo è posto in maniera del tutto convenzionale, considerando la metrica

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{SCHW}} + h_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

in cui $h_{\mu\nu}$ è la perturbazione, in forma di tensore simmetrico a componenti “piccole” rispetto alle corrispondenti della soluzione di Schwarzschild $g_{\mu\nu}^{\text{SCHW}}$. In quest'ambito, risultò lecito e conveniente valersi dei risultati dell'indagine riemanniana nel campo dei gruppi continui di trasformazioni ad un parametro, identificando in $h_{\mu\nu}$ un movimento infinitesimo nel parametro reale perturbativo che preserva le geodetiche di $g_{\mu\nu}$, in particolare quelli formalizzati da Eisenhart [25], a partire dai quali la variazione del tensore di Ricci può scriversi:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma^{\rho}_{\mu\nu;\rho} - \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma;\nu} \quad (2.2)$$

con

$$\delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (h_{\beta\rho;\gamma} + h_{\gamma\rho;\beta} - h_{\beta\gamma;\rho}) \quad (2.3)$$

Naturalmente, trattandosi di pure perturbazioni di metrica (ossia rimanendo escluso il contributo al tensore energia-impulso dell'agente perturbante), il sistema di Einstein (1.2) si riduce a (vedi, ad es., [2], §95)

$$\delta R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.4)$$

Tale equazione viene trattata nell'ambito di un'analisi *multipolare*, ossia tesa alla differenziazione dei contributi all'emissione radiativa secondo un indice di multipolo L che si riferisce ai diversi modi oscillatori del buco nero ($L = 0$ per variazioni puramente radiali, $L = 1$ per le componenti dipolari, etc.). È, inoltre, assunta la *radialità* e la perfetta periodicità temporale delle perturbazioni (ossia, viene fattorizzato ovunque, nelle equazioni (2.4), un termine del tipo e^{ikt} , per mantenere le notazioni originali) nonché l'adozione di una direzione privilegiata ($\phi = 0$, nell'usuale sistema di coordinate sferiche), onde sbarazzarsi, nella scrittura dei fattori angolari, di qualsiasi riferimento azimutale (in termini

“quantistici” questo equivale a porre $m = 0$ in un’analisi alla Schrödinger). Tali fattori angolari dipendono, secondo il complesso schema armonico tensoriale, dalla base dello spazio di Hilbert delle funzioni complesse a quadrato sommabile definite sulla sfera tridimensionale unitaria immersa in \mathcal{E}^3 , i cui elementi hanno la proprietà di essere autofunzioni di L^2 e L_z . Questa è costituita da funzioni a due indici $Y_{Lm}(\theta, \phi)$ (le *armoniche sferiche scalari*) le cui espressioni possono scriversi:

$$Y_{Lm}(\theta, \phi) = (-1)^{m/2} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(L-|m|)!}{(L+|m|)!}} (\cos^2 \theta - 1)^{|m|/2} \cdot \left[\frac{\partial^{|m|}}{\partial(\cos \theta)^{|m|}} P_L(\cos \theta) \right] e^{im\phi}. \quad (2.5)$$

In queste condizioni, quindi, i termini angolari verranno a dipendere dai soli polinomi di Legendre $P_L(\cos \theta)$ moltiplicati per una costante che può considerarsi inglobata nella componente radiale dei singoli termini perturbativi.

Va poi osservato come, allo scopo fondamentale di ottenere il disaccoppiamento delle equazioni di Einstein, la distinzione in modi oscillatori separati della perturbazione, in analogia terminologica [26] con le tipologie di campo generato dalle diverse componenti armoniche di un potenziale vettore elettromagnetico, si debba dividere $h_{\mu\nu}$ in una parte “magnetica” $h_{\mu\nu}^{(m)}$ ed in una “elettrica” $h_{\mu\nu}^{(e)}$ attraverso una discriminazione di parità riferita alla dipendenza funzionale dai $P_L(\theta)$, la cui parità è $(-1)^L$.

Nella trattazione di Regge-Wheeler, uno sviluppo multipolare della metrica perturbata (2.1) attraverso le armoniche sferiche deve necessariamente passare per l’individuazione delle modalità di trasformazione delle singole componenti spazio-temporali sotto rotazioni spaziali. Per chiarire la natura delle singole componenti tensoriali, andrebbe osservato che i termini h_{rr}, h_{rt}, h_{tt} si comportano come semplici scalari, potendo, quindi, essere sviluppati direttamente in termini delle $P_L(\theta)$. I due gruppi di componenti $(h_{r\theta}, h_{r\phi})$ e $(h_{\theta t}, h_{\phi t})$ possono essere, invece, considerati come “vettori angolari” a due componenti e sviluppati nelle derivate prime delle medesime funzioni e distinte nelle due parità $(-1)^{L+1}$ e $(-1)^L$. In maniera del tutto analoga, si considerano i restanti termini $h_{\theta\theta}, h_{\theta\phi}, h_{\phi\phi}$, come facenti parte di un “tensore angolare” di ordine e rango 2, esprimibile nelle derivate prime e seconde delle $Y_{Lm}(\theta, \phi)$, attraverso l’iterazione dello stesso procedimento e combinandone i risultati in maniera tale da ottenere due basi di parità globale opposta.

2.1.1 La scelta di gauge

Il meccanismo della *scelta di gauge*, ovvero di *calibrazione delle coordinate* per la semplificazione delle perturbazioni costituisce una procedura caratteristica dei sistemi che ammettono covarianza per cambi di riferimento. Si ha, anzitutto, da ([2] - §94), per una trasformazione $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') + h'_{\mu\nu}(x') &\approx g_{\rho\sigma}(x) \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + h_{\mu\nu}(x) \\ &= g_{\rho\sigma}(x) \left(\delta_{\mu}^{\rho} - \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \right) \left(\delta_{\nu}^{\sigma} - \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) + h_{\mu\nu}(x) \\ &\approx g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\sigma}(x) \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} - g_{\rho\nu}(x) \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + h_{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

dove la perturbazione rispetto alla metrica e il vettore ξ rispetto alle coordinate x vengono considerati egualmente “piccoli” in maniera da poter trascurare qualsiasi prodotto in cui compaiano più di una volta.

Essendo, poi, $g'_{\mu\nu}(x') = g'_{\mu\nu}(x + \xi) \approx g'_{\mu\nu}(x) + \xi^{\rho} g_{\mu\nu,\rho}$, al primo ordine:

$$g'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi^{\rho} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - g_{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} - g_{\rho\nu} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}}$$

ossia

$$g'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - (\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}) \quad (2.6)$$

Senza entrare ulteriormente nel dettaglio, si ha che la scelta del vettore ξ operata da Regge-Wheeler ed i suoi effetti su $h_{\mu\nu}$, limitatamente al caso delle perturbazioni elettriche, che verrà considerato nel resto del capitolo, generano, per il tensore metrico perturbato, la forma:

$$h_{\mu\nu} = e^{-ikt} P_L(\cos \theta) * \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} H_0(r) & H_1(r) & 0 & 0 \\ H_1(r) & e^{\lambda(r)} H_2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta K(r) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

dove si è considerata la forma più generale della metrica imperturbata a simmetria sferica statica:

$$ds^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - e^{\nu(r)} dt^2 \quad (2.8)$$

(vedi, ad es. [1]-cap.23, oppure, per argomentazioni di maggiore generalità, [27]-cap.2).

Si analizzerà ora la teoria perturbativa della (2.8) specializzata alla metrica di Reissner-Nordstrøm, per la quale:

$$e^{-\lambda(r)} = e^{\nu(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (2.9)$$

dove m è la massa e Q la carica elettrica totale dell'EMBH, notando che tutti i risultati pertinenti il caso di buco nero neutro (Schwarzschild) sono qui contemplabili con la semplice posizione $Q = 0$.

2.2 Analisi preliminare

Deriviamo anzitutto le grandezze fondamentali che riguardano il sistema imperturbato:

Quaderno 4

`In[1] := <<mathtens.m`

=====

I tensori notevoli -Riemann, Ricci, Einstein, Weyl- sono calcolati dalla funzione “Components” di MathTensor a partire da un file di testo che contiene il tensore metrico scelto e le preferenze quanto ai metodi di calcolo :

`In[2] := <<RN.m`

MetricgFlag has been turned off.

La forma della metrica in coordinate (t, r, θ, ϕ) con segnatura $(-, +, +, +)$:

`In[3] := Table[Metricg[-i, -j], {i, 4}, {j, 4}]/MatrixForm`

$$\text{Out [3]} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{2m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2[\theta] \end{pmatrix}$$

Il quadripotenziale del campo elettrostatico di carica Q dell' EMBH nella convenzione di

$$[1]: A_i = (-\phi, \vec{A})$$

In[4] := DefineTensor[A, {{1}, 1}]

PermWeight :: def : Object A defined

In[5] := A/ : A[-1] = -Q/r;

$$A/ : A[-2] = 0;$$

$$A/ : A[-3] = 0;$$

$$A/ : A[-4] = 0;$$

Tensore di Maxwell $F_{ij} = A_{j;i} - A_{i;j}$:

In[6] := MaxwellF[li_, lj_] = CDtoOD[CD[A[lj], li] - CD[A[li], lj]];

In[7] := Table[MaxwellF[-i, -j], {i, 4}, {j, 4}]/MatrixForm

$$\text{Out}[7] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{Q}{r^2} & 0 & 0 \\ \frac{Q}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tensore energia-impulso $T_{ij} = \frac{1}{4\pi}(F^k{}_i F_{kj} - \frac{1}{4}g_{ij} F^{pq} F_{pq})$:

In[8] := DefineTensor[T, {{2, 1}, 1}]

PermWeight :: sym : Symmetries of T assigned

PermWeight :: def : Object T defined

In[9] := T[li_, lj_] =

$$\frac{1}{4\pi} \left(\text{Metricg}[uk, ul] \text{MaxwellF}[lk, li] - \text{MaxwellF}[ll, lj] - \frac{1}{4} \text{Metricg}[uk, um] \text{Metricg}[un, ul] \text{MaxwellF}[lm, ln] \text{MaxwellF}[lk, ll] - \text{Metricg}[li, lj] \right);$$

Versione matriciale di T (componenti indipendenti):

`In[10] := MT = Table[Simplify[MakeSum[T[-i, -j]]], {i, 4}, {j, i, 4}]`

$$\text{Out}[10] = \left\{ \left\{ \frac{Q^2 (Q^2 + r (-2m + r))}{8 \pi r^6}, 0, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{Q^2}{8 \pi r^2 (Q^2 + r (-2m + r))}, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{Q^2}{8 \pi r^2}, 0 \right\}, \left\{ \frac{Q^2 \text{Sin}[\theta]^2}{8 \pi r^2} \right\} \right\}$$

Controllo della conservazione di T: $\nabla T = g^{ab} T_{ab} = 0$

`In[11] := Simplify[MakeSum[Metricg[ua, ub] T[la, lb]]]`

`Out[11] = 0`

Versione matriciale di G (componenti indipendenti):

`In[12] := MG = Table[EinsteinG[-i, -j], {i, 4}, {j, i, 4}]`

$$\text{Out}[12] = \left\{ \left\{ \frac{Q^2 (Q^2 + r (-2m + r))}{r^6}, 0, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{Q^2}{r^2 (Q^2 + r (-2m + r))}, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{Q^2}{r^2}, 0 \right\}, \left\{ \frac{Q^2 \text{Sin}[\theta]^2}{r^2} \right\} \right\}$$

Verifica delle equazioni di Einstein relative alla metrica imperturbata:

`In[13] := Simplify[MG - 8π MT]`

`Out[13] = {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0}, {0}}`

Gli stessi ingredienti debbono essere ricavati per il tensore metrico contenente la perturbazione, qui espressa nella forma

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu}(r, \theta) e^{ikt} \quad (2.10)$$

Quaderno 5

Metrica con perturbazioni polari:

`In[14] := << RNpp.m`

MetricgFlag has been turned off.

Forma della metrica (due volte covariante); q è il parametro perturbativo rispetto al quale viene effettuato lo sviluppo al primo ordine :

```
In[15] := Table[Metricg[-i, -j], {i, 4}, {j, 4}]
Out[15] = {{(1 + Q^2/r^2 - 2m/r) (-1 + e^{-ikt} q F[\theta] H_0[r]),
            e^{-ikt} q F[\theta] H_1[r], 0, 0}, {e^{-ikt} q F[\theta] H_1[r],
            (1 + e^{-ikt} q F[\theta] H_2[r]) / (1 + Q^2/r^2 - 2m/r), 0, 0},
            {0, 0, r^2 (1 + e^{-ikt} q F[\theta] K[r]), 0},
            {0, 0, 0, r^2 (1 + e^{-ikt} q F[\theta] K[r]) Sin[\theta]^2}}
```

Il quadripotenziale del campo elettrostatico perturbato :

```
In[16] := DefineTensor[Ap, {{1}, 1}]
PermWeight :: def : Object Ap defined

In[17] := Ap / Ap[-1] = -Q/r - q e^{-ikt} F[\theta] f_0[r];

Ap / Ap[-2] = -q e^{-ikt} F[\theta] f_1[r];

Ap / Ap[-3] = 0;

Ap / Ap[-4] = 0;
```

Tensore di Maxwell perturbato (la prescrizione {{2,1}, -1} indica che il tensore è supposto antisimmetrico :

```
In[18] := DefineTensor[MaxPert, {{2, 1}, -1}]
PermWeight :: sym : Symmetries of MaxPert assigned
PermWeight :: def : Object MaxPert defined

In[19] := MaxPert[li_, lj_] =
            CDtoOD[CD[Ap[lj], li] - CD[Ap[li], lj]];

In[20] := Table[Simplify[MaxPert[-i, -j]], {i, 4},
                {j, 4}]
```

$$\begin{aligned} \text{Out}[20] = & \left\{ \left\{ 0, -\frac{Q}{r^2} + e^{-ikt} q F[\theta] (ik f_1[r] + f'_0[r]), \right. \right. \\ & \left. \left. e^{-ikt} q f_0[r] F'[\theta], 0 \right\}, \right. \\ & \left. \left\{ \frac{Q}{r^2} - i e^{-ikt} q F[\theta] (k f_1[r] - i f'_0[r]), 0, \right. \right. \\ & \left. \left. e^{-ikt} q f_1[r] F'[\theta], 0 \right\}, \left\{ -e^{-ikt} q f_0[r] F'[\theta], \right. \right. \\ & \left. \left. -e^{-ikt} q f_1[r] F'[\theta], 0, 0 \right\}, \{0, 0, 0, 0\} \right\} \end{aligned}$$

Tensore energia-impulso perturbato :

```
In[21] := DefineTensor[Tp, {{2, 1}, 1}]
```

```
PermWeight :: sym : Symmetries of Tp assigned
```

```
PermWeight :: def : Object Tp defined
```

```
In[22] := Tp[li-, lj-] =
      1
      4π
      (Metricg[uk, ul] MaxPert[lk, li]
       MaxPert[l1, lj] -
       1
       4 Metricg[uk, um] Metricg[un, ul]
       MaxPert[lm, ln] MaxPert[lk, l1]
       Metricg[li, lj]);
```

Versione matriciale di Tp al primo ordine (componenti indipendenti) :

```
In[23] := MTp =
      Table[
      Simplify[
      Normal[Series[MakeSum[Tp[-i, -j]],
      {q, 0, 1}]]], {i, 4}, {j, i, 4}]
```

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[23] = & \left\{ \left\{ \frac{1}{8\pi r^6} \left(e^{-ikt} Q (Q^2 + r (-2m + r)) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(e^{ikt} Q + qF[\theta] (-2ikr^2 f_1[r] - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. QH_2[r] - 2r^2 f'_0[r]) \right) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{e^{-ikt} q Q^2 F[\theta] H_1[r]}{8\pi r^4} \right. \\
 & \left. \frac{e^{-ikt} q Q (Q^2 + r (-2m + r)) f_1[r] F'[\theta]}{4\pi r^4} \right. \\
 & \left. 0 \right\}, \\
 & \left\{ - \left(e^{-ikt} Q \left(e^{ikt} Q + qF[\theta] (-2ikr^2 f_1[r] + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. QH_0[r] - 2r^2 f'_0[r]) \right) \right) \right\} / \\
 & \left(8\pi r^2 (Q^2 + r (-2m + r)) \right), \\
 & \frac{e^{-ikt} q Q f_0[r] F'[\theta]}{4\pi (Q^2 + r (-2m + r))}, \\
 & 0 \left. \right\}, \\
 & \left\{ \frac{1}{8\pi r^2} \left(e^{-ikt} Q \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(e^{ikt} Q + qF[\theta] (QK[r] - 2ikr^2 f_1[r] + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. QH_0[r] - QH_2[r] - 2r^2 f'_0[r]) \right) \right) \right\}, \\
 & 0 \left. \right\}, \left\{ \frac{1}{8\pi r^2} \left(e^{-ikt} Q \sin[\theta]^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(e^{ikt} Q + qF[\theta] (QK[r] - 2ikr^2 f_1[r] + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. QH_0[r] - QH_2[r] - 2r^2 f'_0[r]) \right) \right) \right\} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Conservazione di T : $\nabla T = 0$ (al primo ordine)

In[24] := Simplify[

Series[MakeSum[Metricg[ua, ub]Tp[la, lb]],
{q, 0, 1}]]

Out[24] = O[q]²

2.3 Il sistema delle perturbazioni di metrica

È, ora, possibile scrivere le equazioni del moto del sistema, per sottrazione dei termini non perturbati da quelli relativi alla soluzione

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{R-N}} + h_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

dove $g_{\mu\nu}^{\text{R-N}}$ è la metrica di Reissner-Nordström.

Il punto-chiave della trattazione qui esposta consiste nel tralasciare lo sviluppo in armoniche tensoriali alla Zerilli, rendendosi solo necessaria, allo scopo di separare completamente i termini angolari delle equazioni trovate, l'adozione di due relazioni algebriche che esprimono le derivate dell'L-esimo polinomio di Legendre come combinazione del polinomio stesso e dell'(L-1)-esimo:

$$\begin{aligned} \frac{d P_L(\cos \theta)}{d \theta} &= \frac{L[-P_{L-1}(\cos \theta) + \cos \theta P_L(\cos \theta)]}{\sin \theta}, \\ \frac{d^2 P_L(\cos \theta)}{d \theta^2} &= \frac{L \cot \theta P_{L-1}(\cos \theta)}{\sin \theta} - L^2 (\cot^2 \theta + L + 1) P_L(\cos \theta), \end{aligned} \quad (2.12)$$

Con questo stratagemma, il sistema radiale è ottenuto uguagliando la perturbazione di G , ottenuta attraverso la differenza di G perturbato con $G_{\mu\nu}^{\text{R-N}}$, alla perturbazione di T (ottenuta allo stesso modo) moltiplicata per 8π :

Quaderno 6

Ricavato il tensore della perturbazione $\delta G_{\mu\nu} - 8\pi \delta T_{\mu\nu}$ in forma matriciale (qui indicato con "Pert"; si rimanda alla versione proprietaria del quaderno per il dettaglio), si adotta la sostituzione canonica $\lambda = (L - 1)(L + 2)/2$:

$$\begin{aligned} \text{In}[25] := \text{SubLambda} := \{ & \{-2 + \mathbf{L} + \mathbf{L}^2\} \rightarrow 2\lambda, \\ & \{2 + \mathbf{L} + \mathbf{L}^2\} \rightarrow 2(\lambda + 2), \mathbf{L} \{1 + \mathbf{L}\} \rightarrow 2(\lambda + 1) \} \end{aligned}$$

Operatore di ordinamento e semplificazione:

$$\begin{aligned} \text{In}[26] := \text{Ord}[\mathbf{x}_.] := \text{Collect}[\text{Expand}[\mathbf{x}], \\ \{\mathbf{K}[\mathbf{r}], \mathbf{H}_0[\mathbf{r}], \mathbf{H}_1[\mathbf{r}], \mathbf{H}_2[\mathbf{r}], \mathbf{f}_0[\mathbf{r}], \mathbf{f}_1[\mathbf{r}], \\ \mathbf{K}'[\mathbf{r}], \mathbf{H}'_0[\mathbf{r}], \mathbf{H}'_1[\mathbf{r}], \mathbf{H}'_2[\mathbf{r}], \mathbf{f}'_0[\mathbf{r}], \\ \mathbf{f}'_1[\mathbf{r}], \mathbf{K}''[\mathbf{r}], \mathbf{H}''_0[\mathbf{r}]\}, \text{Simplify}] \end{aligned}$$

Termini radiali:

$$\text{In}[27] := \mathbf{TE}_{\text{tt}} = \text{Ord}[\text{Pert}[[1, 1]][[6]]] /. \text{SubLambda}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[27] = & -2 r^2 \lambda K[r] - 4 i k Q r^2 f_1[r] + \\ & 2 Q^2 H_0[r] - 2 r^2 (2 + \lambda) H_2[r] + \\ & 2 r (2 Q^2 + r (-5 m + 3 r)) K'[r] - \\ & 4 Q r^2 f'_0[r] - 2 r (Q^2 + r (-2 m + r)) H'_2[r] + \\ & 2 r^2 (Q^2 + r (-2 m + r)) K''[r] \end{aligned}$$

$$\text{In}[28] := \mathbf{TE}_{\text{tr}} = \text{Ord}[\text{Pert}[[1, 2]][[6]]] /. \text{SubLambda}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[28] = & 2 \, i \, k \, r \, (2 \, Q^2 + r \, (-3 \, m + r)) \, K[r] + \\ & 2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, (1 + \lambda) \, H_1[r] - \\ & 2 \, i \, k \, r \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, H_2[r] + \\ & 2 \, i \, k \, r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, K'[r] \end{aligned}$$

$$\text{In}[29] := \mathbf{TE}_{t\theta} = \mathbf{Ord}[\mathbf{Pert}[[\mathbf{1}, \mathbf{3}]]][[\mathbf{7}]]]$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[29] = & i \, k \, r^4 \, K[r] - 4 \, Q \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, f_1[r] + \\ & 2 \, r \, (-Q^2 + m \, r) \, H_1[r] + i \, k \, r^4 \, H_2[r] + \\ & r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, H_1'[r] \end{aligned}$$

$$\text{In}[30] := \mathbf{TE}_{r\mathbf{r}} = \mathbf{Ord}[\mathbf{Pert}[[\mathbf{2}, \mathbf{1}]]][[\mathbf{6}]] / .\mathbf{SubLambda}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[30] = & r^2 \, (-2 \, Q^2 \, \lambda - r \, (-4 \, m \, \lambda + r \, (-2 \, k^2 \, r^2 + 2 \, \lambda))) \, K[r] - \\ & 4 \, i \, k \, Q \, r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, f_1[r] + \\ & (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, (2 \, Q^2 + 2 \, r^2 \, (1 + \lambda)) \, H_0[r] - \\ & 4 \, i \, k \, r^3 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, H_1[r] - \\ & 2 \, r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, H_2[r] + \\ & 2 \, r^2 \, (2 \, m^2 \, r + r \, (Q^2 + r^2) - m \, (Q^2 + 3 \, r^2)) \, K'[r] - \\ & 4 \, Q \, r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, f_0'[r] - \\ & 2 \, r \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r))^2 \, H_0'[r] \end{aligned}$$

$$\text{In}[31] := \mathbf{TE}_{r\theta} = \mathbf{Ord}[\mathbf{Pert}[[\mathbf{2}, \mathbf{2}]]][[\mathbf{8}]] / .\mathbf{SubLambda}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[31] = & 4 \, Q \, r \, f_0[r] + (2 \, Q^2 + r \, (-3 \, m + r)) \, H_0[r] - \\ & i \, k \, r^3 \, H_1[r] + (m - r) \, r \, H_2[r] + \\ & r \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, K'[r] - \\ & r \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, H_0'[r] \end{aligned}$$

$$\text{In}[32] := \mathbf{TE}_{\theta\theta} = \mathbf{Ord}[\mathbf{Pert}[[\mathbf{3}, \mathbf{1}]]][[\mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]]]$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[32] = & k^2 \, r^6 \, K[r] + 4 \, i \, k \, Q \, r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, f_1[r] - \\ & 2 \, Q^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, H_0[r] + \\ & 2 \, i \, k \, (m - r) \, r^4 \, H_1[r] + k^2 \, r^6 \, H_2[r] + \\ & 2 \, r^2 \, (2 \, m^2 \, r + r \, (Q^2 + r^2) - m \, (Q^2 + 3 \, r^2)) \, K'[r] + \\ & 4 \, Q \, r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, f_0'[r] + \\ & r \, (2 \, Q^4 + Q^2 \, r \, (-5 \, m + r) + r^2 \, (2 \, m^2 + m \, r - r^2)) \\ & \quad H_0'[r] - 2 \, i \, k \, r^4 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r)) \, H_1'[r] - \\ & r^2 \, (2 \, m^2 \, r + r \, (Q^2 + r^2) - m \, (Q^2 + 3 \, r^2)) \, H_2'[r] + \\ & r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r))^2 \, K''[r] - \\ & r^2 \, (Q^2 + r \, (-2 \, m + r))^2 \, H_0''[r] \end{aligned}$$

$$\text{In}[33] := \mathbf{TE}_{\phi\phi} = \mathbf{Ord}[\mathbf{Pert}[[\mathbf{4}, \mathbf{1}]]][[\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]]]$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[33] = & k^2 r^6 K[r] + 4 i k Q r^2 (Q^2 + r(-2m+r)) f_1[r] - \\
 & 2 Q^2 (Q^2 + r(-2m+r)) H_0[r] + \\
 & 2 i k (m-r) r^4 H_1[r] + k^2 r^6 H_2[r] + \\
 & 2 r^2 (2 m^2 r + r(Q^2 + r^2) - m(Q^2 + 3 r^2)) K'[r] + \\
 & 4 Q r^2 (Q^2 + r(-2m+r)) f'_0[r] + \\
 & r(2 Q^4 + Q^2 r(-5m+r) + r^2(2 m^2 + m r - r^2)) \\
 & H'_0[r] - 2 i k r^4 (Q^2 + r(-2m+r)) H'_1[r] - \\
 & r^2 (2 m^2 r + r(Q^2 + r^2) - m(Q^2 + 3 r^2)) H'_2[r] + \\
 & r^2 (Q^2 + r(-2m+r))^2 K''[r] - \\
 & r^2 (Q^2 + r(-2m+r))^2 H''_0[r]
 \end{aligned}$$

Si nota subito che :

$$\text{In}[34] := \text{Simplify}[\mathbf{TE}_{\theta\theta} - \mathbf{TE}_{\phi\phi}]$$

$$\text{Out}[34] = 0$$

E', poi, necessario ridurre il numero di parametri funzionali, affinché vi sia fattorizzazione completa dei termini angolari: $H_0(r) = H_2(r) \equiv H(r)$

$$\text{In}[35] := \mathbf{H}_0[\mathbf{r}_-] := \mathbf{H}[\mathbf{r}]$$

$$\mathbf{H}_2[\mathbf{r}_-] := \mathbf{H}[\mathbf{r}]$$

Il sistema di Einstein radiale è :

$$\text{In}[36] := \mathbf{Eq1} = \text{Ord}[\mathbf{TE}_{tt}/2] == 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[36] = & (Q^2 - r^2(2 + \lambda)) H[r] - r^2 \lambda K[r] - \\
 & 2 i k Q r^2 f_1[r] - r(Q^2 + r(-2m+r)) H'[r] + \\
 & r(2 Q^2 + r(-5m+3r)) K'[r] - 2 Q r^2 f'_0[r] + \\
 & r^2 (Q^2 + r(-2m+r)) K''[r] == 0
 \end{aligned}$$

$$\text{In}[37] := \mathbf{Eq2} = \text{Ord}[\mathbf{TE}_{tr}/2] == 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[37] = & -i k r (Q^2 + r(-2m+r)) H[r] + \\
 & i k r (2 Q^2 + r(-3m+r)) K[r] + \\
 & (Q^2 + r(-2m+r)) (1 + \lambda) H_1[r] + \\
 & i k r^2 (Q^2 + r(-2m+r)) K'[r] == 0
 \end{aligned}$$

$$\text{In}[38] := \mathbf{Eq3} = \text{Ord}[\mathbf{TE}_{t\theta}] == 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[38] = & i k r^4 H[r] + i k r^4 K[r] - \\
 & 4 Q (Q^2 + r(-2m+r)) f_1[r] + \\
 & 2 r (-Q^2 + m r) H_1[r] + \\
 & r^2 (Q^2 + r(-2m+r)) H'_1[r] == 0
 \end{aligned}$$

In[39] := **Eq4** = **Ord**[**TE_{rr}**/2] == 0

Out[39] = $(Q^2 + r(-2m + r))(Q^2 + r^2 \lambda) H[r] +$
 $r^2 (k^2 r^4 - (Q^2 + r(-2m + r)) \lambda) K[r] -$
 $2 i k Q r^2 (Q^2 + r(-2m + r)) f_1[r] -$
 $2 i k r^3 (Q^2 + r(-2m + r)) H_1[r] -$
 $r (Q^2 + r(-2m + r))^2 H'[r] +$
 $r^2 (2m^2 r + r(Q^2 + r^2) - m(Q^2 + 3r^2)) K'[r] -$
 $2 Q r^2 (Q^2 + r(-2m + r)) f_0'[r] == 0$

In[40] := **Eq5** = **Ord**[**TE_{rθ}**] == 0

Out[40] = $2 (Q^2 - m r) H[r] + 4 Q r f_0[r] -$
 $i k r^3 H_1[r] - r (Q^2 + r(-2m + r)) H'[r] +$
 $r (Q^2 + r(-2m + r)) K'[r] == 0$

In[41] := **Eq6** = **Ord**[**TE_{θθ}**] == 0

Out[41] = $(-2 Q^4 + 2 Q^2 (2m - r) r + k^2 r^6) H[r] +$
 $k^2 r^6 K[r] + 4 i k Q r^2 (Q^2 + r(-2m + r)) f_1[r] +$
 $2 i k (m - r) r^4 H_1[r] +$
 $2 r (Q^2 - r^2) (Q^2 + r(-2m + r)) H'[r] +$
 $2 r^2 (2m^2 r + r(Q^2 + r^2) - m(Q^2 + 3r^2)) K'[r] +$
 $4 Q r^2 (Q^2 + r(-2m + r)) f_0'[r] -$
 $2 i k r^4 (Q^2 + r(-2m + r)) H_1'[r] -$
 $r^2 (Q^2 + r(-2m + r))^2 H''[r] +$
 $r^2 (Q^2 + r(-2m + r))^2 K''[r] == 0$

Medesimo trattamento va riservato al sistema derivato dalle equazioni di Maxwell:

Quaderno 7

Reintroduciamo direttamente le componenti del tensore di Maxwell perturbato :

$$\text{In}[1] := \text{MaxwellF}/ : \text{MaxwellF}[-2, -1] = \frac{Q}{r^2} - q e^{-i k t} \mathbf{F}[\theta] (\mathbf{f}'_0[\mathbf{r}] + i \mathbf{k} \mathbf{f}_1[\mathbf{r}]);$$

$$\text{MaxwellF}/ : \text{MaxwellF}[-3, -1] = -q e^{-i k t} \mathbf{F}'[\theta] \mathbf{f}_0[\mathbf{r}];$$

$$\text{MaxwellF}/ : \text{MaxwellF}[-4, -1] = 0;$$

$$\text{MaxwellF}/ : \text{MaxwellF}[-3, -2] = -q e^{-i k t} \mathbf{F}'[\theta] \mathbf{f}_1[\mathbf{r}];$$

$$\text{MaxwellF}/ : \text{MaxwellF}[-4, -2] = 0;$$

$$\text{MaxwellF}/ : \text{MaxwellF}[-4, -3] = 0;$$

Le equazioni di Maxwell omogenee $F_{[\mu\nu,\rho]}$ sono identicamente soddisfatte, in questo modello perturbativo :

$$\text{In}[2] := \text{DefineTensor}[\text{Om}, \{\{1, 2, 3\}, 1\}]$$

$$\text{In}[3] := \text{Om}[\text{ll}_-, \text{lm}_-, \text{ln}_-] = \text{OD}[\text{MaxwellF}[\text{ll}, \text{lm}], \text{ln}] + \text{OD}[\text{MaxwellF}[\text{ln}, \text{ll}], \text{lm}] + \text{OD}[\text{MaxwellF}[\text{lm}, \text{ln}], \text{ll}]$$

$$\text{Out}[3] = F_{1m,n} - F_{1n,m} + F_{mn,1}$$

$$\text{In}[4] := \text{MOm} =$$

$$\text{Table}[\text{Normal}[\text{Series}[\text{MakeSum}[\text{Om}[-i, -j, -k]], \{\mathbf{q}, 0, 1\}]] / . \mathbf{q} \rightarrow 1, \{\mathbf{i}, 4\}, \{\mathbf{j}, 4\}, \{\mathbf{k}, 4\}]$$

$$\text{Out}[4] = \{\{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}, \{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}, \{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}, \{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}, \{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}, \{\{0, 0, 0, 0\}\}, \{\{0, 0, 0, 0\}\}, \{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}\}$$

Le equazioni di Maxwell non omogenee sono: $F^{\mu\nu}_{;v} = 0$. Definiamo un tensore rappresentativo della corrente :

In[5] := **DefineTensor**[**Corr**, {{1, 2}, 1}]

In[6] := **Corr**[**um_**] =
CDtoOD[
CD[**Metricg**[**ua**, **um**] **Metricg**[**ub**, **un**]
MaxwellF[**la**, **lb**], **ln**]

Out[6] = $(G^m_{pq})(F^{pq}) - (G^p_{pq})(F^{qm}) - F^{pm},_p$

Tenendo conto di :

In[7] := **H₀**[**r_**] := **H**[**r**]

H₂[**r_**] := **H**[**r**]

le equazioni di Maxwell si ottengono annullando le componenti della seguente lista :

In[8] := **MCorr** =
Table[
Simplify[
Normal[**Series**[**MakeSum**[**Corr**[**i**]],
{**q**, **0**, **1**}]] /. **q** → **1**], {**i**, **4**}]

Out[8] = $\left\{ \left(e^{-ikt} \left(-r^2 f_0[r] \left(\cot[\theta] F'[\theta] + F''[\theta] \right) + \left(Q^2 + r(-2m+r) \right) F[\theta] \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left(-2 i k r f_1[r] + Q K'[r] + r \left(-2 f'_0[r] - r \left(i k f'_1[r] + f''_0[r] \right) \right) \right) \right) \right) / \\ \left(r^2 \left(Q^2 + r(-2m+r) \right) \right), \frac{1}{r^4} \\ \left(e^{-ikt} \left(k r^2 F[\theta] \right. \right. \\ \left. \left. \left(i Q K[r] + r^2 \left(k f_1[r] - i f'_0[r] \right) \right) + \left(Q^2 + r(-2m+r) \right) \csc[\theta] f_1[r] \right. \right. \\ \left. \left. \left(\cos[\theta] F'[\theta] + \sin[\theta] F''[\theta] \right) \right) \right), \\ \left(e^{-ikt} F'[\theta] \left(-i k r^5 f_0[r] - \left(Q^2 + r(-2m+r) \right) \left(-2 \left(Q^2 - m r \right) f_1[r] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. r \left(Q^2 + r(-2m+r) \right) f'_1[r] \right) \right) \right) / \\ \left(r^5 \left(Q^2 + r(-2m+r) \right) \right), 0 \}$

che, una volta introdotte le

```
In[9] := F[ $\theta$ ] = LegendreP[L, Cos[ $\theta$ ]];
F'[ $\theta$ ] =
L Csc[ $\theta$ ]
(-LegendreP[-1 + L, Cos[ $\theta$ ]] +
Cos[ $\theta$ ] LegendreP[L, Cos[ $\theta$ ]]);
F''[ $\theta$ ] =
L Cot[ $\theta$ ] Csc[ $\theta$ ] LegendreP[-1 + L, Cos[ $\theta$ ]] -
L (1 + L + Cot[ $\theta$ ]2) LegendreP[L, Cos[ $\theta$ ]];
```

diventano :

```
In[10] := Corr2 = Simplify[MCorr]
Out[10] = {  $\frac{1}{r^2 (Q^2 + r (-2m + r))}$ 
(e-i k t LegendreP[L, Cos[ $\theta$ ]]
(L (1 + L) r2 f0[r] + (Q2 + r (-2m + r))
(-2 i k r f1[r] + Q K'[r] +
r (-2 f'0[r] - r (i k f'1[r] + f''0[r])))),
 $\frac{1}{r^4}$  (e-i k t LegendreP[L, Cos[ $\theta$ ]]
(i k Q r2 K[r] - (-k2 r4 + L (Q2 - 2 m r + r2) +
L2 (Q2 - 2 m r + r2)) f1[r] -
i k r4 f'0[r])),  $\frac{1}{r^5 (Q^2 + r (-2m + r))}$ 
(e-i k t L Csc[ $\theta$ ] (LegendreP[-1 + L, Cos[ $\theta$ ]] -
Cos[ $\theta$ ] LegendreP[L, Cos[ $\theta$ ]])
(i k r5 f0[r] + (Q2 + r (-2m + r))
(-2 (Q2 - m r) f1[r] +
r (Q2 + r (-2m + r)) f'1[r]))), 0 }
```

Le consuete definizioni di servizio :

```
In[11] := Ord[x_] := Collect[Expand[x],
{K[r], f0[r], f1[r], K'[r], f'0[r], f'1[r],
f''0[r]], Simplify]
In[12] := SubLambda := { (-2 + L + L2) → 2 $\lambda$ ,
(2 + L + L2) → 2( $\lambda$  + 2), L (1 + L) → 2( $\lambda$  + 1) }
```

Le tre equazioni finali del sistema di Maxwell radiale sono :

```
In[13] := Eq7 = (Ord[Corr2[[1]][[5]]] /. SubLambda) == 0
```

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[13] = & 2 r^2 (1 + \lambda) f_0[r] - \\
 & 2 i k r (Q^2 + r (-2 m + r)) f_1[r] + \\
 & Q (Q^2 + r (-2 m + r)) K'[r] - \\
 & 2 r (Q^2 + r (-2 m + r)) f_0'[r] - \\
 & i k r^2 (Q^2 + r (-2 m + r)) f_1'[r] - \\
 & r^2 (Q^2 + r (-2 m + r)) f_0''[r] == 0
 \end{aligned}$$

$\text{In}[14] := \text{Eq8} =$

$$\begin{aligned}
 & (\text{FullSimplify}[\text{Corr2}[[2]][[4]]])/. \\
 & \text{SubLambda} == 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[14] = & i k Q r^2 K[r] - (-k^2 r^4 + 2 Q^2 (1 + \lambda) - 4 m r (1 + \lambda) + \\
 & 2 r^2 (1 + \lambda)) f_1[r] - i k r^4 f_0'[r] == 0
 \end{aligned}$$

$\text{In}[15] := \text{Eq9} = \text{Ord}[\text{Corr2}[[3]][[7]]] == 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[15] = & i k r^5 f_0[r] - \\
 & 2 (Q^4 + m (2 m - r) r^2 + Q^2 r (-3 m + r)) f_1[r] + \\
 & r (Q^2 + r (-2 m + r))^2 f_1'[r] == 0
 \end{aligned}$$

Il processo di riduzione del sistema globale Einstein+Maxwell può, ora, procedere con la messa in forma canonica delle equazioni ed il controllo della compatibilità generale fra quelle di secondo grado e quelle di primo:

Quaderno 8

Impostazione del sistema Einstein+Maxwell

$$\begin{aligned}
 \text{In}[16] := \text{Eq1} = & (Q^2 - r^2 (2 + \lambda)) H[r] - r^2 \lambda K[r] - \\
 & 2 i k Q r^2 f_1[r] - r (Q^2 + r (-2 m + r)) H'[r] + \\
 & r (2 Q^2 + r (-5 m + 3 r)) K'[r] - 2 Q r^2 f_0'[r] + \\
 & r^2 (Q^2 + r (-2 m + r)) K''[r] == 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[17] := \text{Eq2} = & -i k r (Q^2 + r (-2 m + r)) H[r] + \\
 & i k r (2 Q^2 + r (-3 m + r)) K[r] + \\
 & (Q^2 + r (-2 m + r)) (1 + \lambda) H_1[r] + \\
 & i k r^2 (Q^2 + r (-2 m + r)) K'[r] == 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[18] := \mathbf{Eq3} &= \mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{r}^4 \mathbf{H}[\mathbf{r}] + \mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{r}^4 \mathbf{K}[\mathbf{r}] - \\
 &4 \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}_1[\mathbf{r}] + \\
 &2 \mathbf{r} (-\mathbf{Q}^2 + \mathbf{m} \mathbf{r}) \mathbf{H}_1[\mathbf{r}] + \\
 &\mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{H}'_1[\mathbf{r}] == \mathbf{0};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[19] := \mathbf{Eq4} &= (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r}^2 \lambda) \mathbf{H}[\mathbf{r}] + \\
 &\mathbf{r}^2 (\mathbf{k}^2 \mathbf{r}^4 - (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \lambda) \mathbf{K}[\mathbf{r}] - \\
 &2 \mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{Q} \mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}_1[\mathbf{r}] - \\
 &2 \mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{r}^3 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{H}_1[\mathbf{r}] - \\
 &\mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r}))^2 \mathbf{H}'[\mathbf{r}] + \\
 &\mathbf{r}^2 (2\mathbf{m}^2 \mathbf{r} + \mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r}^2) - \mathbf{m} (\mathbf{Q}^2 + 3\mathbf{r}^2)) \mathbf{K}'[\mathbf{r}] - \\
 &2 \mathbf{Q} \mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}'_0[\mathbf{r}] == \mathbf{0};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[20] := \mathbf{Eq5} &= 2 (\mathbf{Q}^2 - \mathbf{m} \mathbf{r}) \mathbf{H}[\mathbf{r}] + 4 \mathbf{Q} \mathbf{r} \mathbf{f}_0[\mathbf{r}] - \mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{r}^3 \mathbf{H}_1[\mathbf{r}] - \\
 &\mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{H}'[\mathbf{r}] + \\
 &\mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{K}'[\mathbf{r}] == \mathbf{0};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[21] := \mathbf{Eq6} &= (-2 \mathbf{Q}^4 + 2 \mathbf{Q}^2 (2\mathbf{m} - \mathbf{r}) \mathbf{r} + \mathbf{k}^2 \mathbf{r}^6) \mathbf{H}[\mathbf{r}] + \\
 &\mathbf{k}^2 \mathbf{r}^6 \mathbf{K}[\mathbf{r}] + 4 \mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{Q} \mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}_1[\mathbf{r}] + \\
 &2 \mathfrak{i} \mathbf{k} (\mathbf{m} - \mathbf{r}) \mathbf{r}^4 \mathbf{H}_1[\mathbf{r}] + \\
 &2 \mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 - \mathbf{r}^2) (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{H}'[\mathbf{r}] + \\
 &2 \mathbf{r}^2 (2\mathbf{m}^2 \mathbf{r} + \mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r}^2) - \mathbf{m} (\mathbf{Q}^2 + 3\mathbf{r}^2)) \mathbf{K}'[\mathbf{r}] + \\
 &4 \mathbf{Q} \mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}'_0[\mathbf{r}] - \\
 &2 \mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{r}^4 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{H}'_1[\mathbf{r}] - \\
 &\mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r}))^2 \mathbf{H}''[\mathbf{r}] + \\
 &\mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r}))^2 \mathbf{K}''[\mathbf{r}] == \mathbf{0};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[22] := \mathbf{Eq7} &= 2 \mathbf{r}^2 (1 + \lambda) \mathbf{f}_0[\mathbf{r}] - \\
 &2 \mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}_1[\mathbf{r}] + \\
 &\mathbf{Q} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{K}'[\mathbf{r}] - \\
 &2 \mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}'_0[\mathbf{r}] - \\
 &\mathfrak{i} \mathbf{k} \mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}'_1[\mathbf{r}] - \\
 &\mathbf{r}^2 (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2\mathbf{m} + \mathbf{r})) \mathbf{f}''_0[\mathbf{r}] == \mathbf{0};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[23] := \text{Eq8} = & \text{i k Q r}^2 \text{K[r]} - \\ & \left(-\text{k}^2 \text{r}^4 + 2 \text{Q}^2 (1 + \lambda) - 4 \text{m r} (1 + \lambda) + \right. \\ & \left. 2 \text{r}^2 (1 + \lambda) \right) \text{f}_1[\text{r}] - \text{i k r}^4 \text{f}'_0[\text{r}] == 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[24] := \text{Eq9} = & \text{i k r}^5 \text{f}_0[\text{r}] - \\ & 2 \left(\text{Q}^4 + \text{m} (2 \text{m} - \text{r}) \text{r}^2 + \text{Q}^2 \text{r} (-3 \text{m} + \text{r}) \right) \text{f}_1[\text{r}] + \\ & \text{r} \left(\text{Q}^2 + \text{r} (-2 \text{m} + \text{r}) \right)^2 \text{f}'_1[\text{r}] == 0; \end{aligned}$$

Operatore di ordinamento :

$$\begin{aligned} \text{In}[25] := \text{Ord}[\mathbf{x}_-] := & \text{Collect}[\text{Expand}[\mathbf{x}], \\ & \{\text{K}[\text{r}], \text{H}[\text{r}], \text{H}_1[\text{r}], \text{f}_0[\text{r}], \text{f}_1[\text{r}]\}, \text{Simplify}] \end{aligned}$$

Le equazioni di primo grado esplicitate rispetto alle funzioni derivate :

$$\begin{aligned} \text{In}[26] := \text{Eq11} = & \\ & \text{H}'[\text{r}] == \\ & \text{Ord}[\text{Solve}[\text{Eliminate}[\{\text{Eq2}, \text{Eq5}\}, \text{K}'[\text{r}], \\ & \quad \text{H}'[\text{r}]]][[1, 1, 2]]] \\ \text{Out}[26] = \text{H}'[\text{r}] == & \frac{(3 \text{Q}^2 - 4 \text{m r} + \text{r}^2) \text{H}[\text{r}]}{\text{Q}^2 \text{r} - 2 \text{m r}^2 + \text{r}^3} + \\ & \frac{(-2 \text{Q}^2 + (3 \text{m} - \text{r}) \text{r}) \text{K}[\text{r}]}{\text{r} (\text{Q}^2 + \text{r} (-2 \text{m} + \text{r}))} + \\ & \frac{4 \text{Q f}_0[\text{r}]}{\text{Q}^2 - 2 \text{m r} + \text{r}^2} - (\text{i} (-\text{Q}^2 (1 + \lambda) + \\ & \quad \text{r} (\text{r} (-1 + \text{k}^2 \text{r}^2 - \lambda) + 2 \text{m} (1 + \lambda))) \text{H}_1[\text{r}]) / \\ & (\text{k r}^2 (\text{Q}^2 + \text{r} (-2 \text{m} + \text{r}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[27] := \text{Eq12} = & \\ & \text{K}'[\text{r}] == \text{Ord}[\text{Solve}[\text{Eq2}, \text{K}'[\text{r}]]][[1, 1, 2]]] \\ \text{Out}[27] = \text{K}'[\text{r}] == & \frac{\text{H}[\text{r}]}{\text{r}} + \\ & \frac{(-2 \text{Q}^2 + (3 \text{m} - \text{r}) \text{r}) \text{K}[\text{r}]}{\text{r} (\text{Q}^2 + \text{r} (-2 \text{m} + \text{r}))} + \frac{\text{i} (1 + \lambda) \text{H}_1[\text{r}]}{\text{k r}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[28] := \text{Eq13} = & \\ & \text{H}'_1[\text{r}] == \text{Ord}[\text{Solve}[\text{Eq3}, \text{H}'_1[\text{r}]]][[1, 1, 2]]] \\ \text{Out}[28] = \text{H}'_1[\text{r}] == & -\frac{\text{i k r}^2 \text{H}[\text{r}]}{\text{Q}^2 + \text{r} (-2 \text{m} + \text{r})} - \frac{\text{i k r}^2 \text{K}[\text{r}]}{\text{Q}^2 + \text{r} (-2 \text{m} + \text{r})} + \\ & \frac{4 \text{Q f}_1[\text{r}]}{\text{r}^2} + \frac{2 (\text{Q}^2 - \text{m r}) \text{H}_1[\text{r}]}{\text{r} (\text{Q}^2 + \text{r} (-2 \text{m} + \text{r}))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[29] := \text{Eq14} = & \\ & \text{f}'_0[\text{r}] == \text{Ord}[\text{Solve}[\text{Eq8}, \text{f}'_0[\text{r}]]][[1, 1, 2]]] \end{aligned}$$

$$\text{Out}[29] = f'_0[r] == \frac{Q K[r]}{r^2} - \frac{1}{k r^4} (i (-2 Q^2 (1 + \lambda) + r (r (-2 + k^2 r^2 - 2 \lambda) + 4 m (1 + \lambda))) f_1[r])$$

In[30] := Eq15 =

$$f'_1[r] == \text{Ord}[\text{Solve}[\text{Eq9}, f'_1[r]]][[1, 1, 2]]$$

Out[30] = f'_1[r] ==

$$-\frac{i k r^4 f_0[r]}{(Q^2 + r (-2 m + r))^2} + \frac{2 (Q^2 - m r) f_1[r]}{r (Q^2 + r (-2 m + r))}$$

Dalla equazione di primo grado rimanente (Eq4) si può ricavare un integrale primo :

In[31] := PrIn =

$$\text{Ord}[\text{Factor}[\text{First}[\text{Eq4}/. \{H'[r] \rightarrow \text{Last}[\text{Eq11}], K'[r] \rightarrow \text{Last}[\text{Eq12}], f'_0[r] \rightarrow \text{Last}[\text{Eq14}]\}]]][[3]] == 0$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[31] = & k r^2 (Q^2 + r (-2 m + r)) (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda)) H[r] + \\ & k r^3 (3 m^2 r - m (Q^2 + r^2 (1 - 2 \lambda)) - \\ & r (-k^2 r^4 + r^2 \lambda + Q^2 (1 + \lambda))) K[r] - \\ & 4 k Q r^3 (Q^2 + r (-2 m + r)) f_0[r] - \\ & 4 i Q (Q^2 + r (-2 m + r))^2 (1 + \lambda) f_1[r] - \\ & i r (Q^2 + r (-2 m + r)) \\ & (Q^2 (1 + \lambda) - r (m - k^2 r^3 + m \lambda)) H_1[r] == 0 \end{aligned}$$

Controllo formale: adimensionalizzando i coefficienti dei parametri perturbativi nella precedente equazione e ponendo $Q=0$ si ritrova l'analoga condizione di Vishveshwara in metrica di Schwarzschild (cfr. [18] - eq. 10) :

$$\text{In}[32] := \text{Ord}\left[\frac{\text{First}[\text{PrIn}]}{k r^4 (Q^2 - 2 m r + r^2)} / . \{Q \rightarrow 0, f_0[r] \rightarrow 0, f_1[r] \rightarrow 0\}\right] == 0$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[32] = & \left(\frac{3 m}{r} + \lambda\right) H[r] + \\ & \frac{(3 m^2 - m r + k^2 r^4 + 2 m r \lambda - r^2 \lambda) K[r]}{-2 m r + r^2} + \\ & \frac{i (m - k^2 r^3 + m \lambda) H_1[r]}{k r^2} == 0 \end{aligned}$$

Compatibilità delle equazioni di secondo grado

Eq1 :

```
In[33] := Ord[First[(Eq1/.K''[r] -> D_r Last[Eq12])/
  {H'[r] -> Last[Eq11], K'[r] -> Last[Eq12],
  H'_1[r] -> Last[Eq13],
  f'_0[r] -> Last[Eq14]}]] == 0
Out[33]= True
```

Eq6 :

```
In[34] := Ord[
  First[
    (Eq6/.{H''[r] -> D_r Last[Eq11],
    K''[r] -> D_r Last[Eq12]})/
    {H'[r] -> Last[Eq11], K'[r] -> Last[Eq12],
    H'_1[r] -> Last[Eq13],
    f'_0[r] -> Last[Eq14]}]] == 0
Out[34]= True
```

Eq7 :

```
In[35] := Ord[First[(Eq7/.f''_0[r] -> D_r Last[Eq14])/
  {K'[r] -> Last[Eq12], f'_0[r] -> Last[Eq14],
  f'_1[r] -> Last[Eq15]}]] == 0
Out[35]= True
```

Si possono, quindi, eliminare queste tre equazioni senza perdita d'informazione.

Infine, tramite l'integrale primo ricavato, si perviene alla forma finale del sistema, che consta di quattro equazioni di primo grado in quattro funzioni perturbative radiali $\{R(r), K(r), f_0(r), f_2(r)\}$:

Quaderno 9

Eliminazione di $H(r)$ tramite $PrIn$:

```
In[1] := Eq16 =
  K'[r] ==
  Ord[Last[Eq12])/
  Solve[PrIn, H[r]] [[1, 1]]
```

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[1] = K'[r] = & ((4Q^4 - Q^2 r (11m + r(-3 + \lambda)) + \\
 & r^2 (6m^2 - k^2 r^4 + m r (-2 + \lambda))) K[r]) / \\
 & (r (Q^2 + r (-2m + r)) (-2Q^2 + r (3m + r\lambda)) + \\
 & \frac{4Q f_0[r]}{-2Q^2 + r (3m + r\lambda)} + \\
 & \frac{4iQ (Q^2 + r (-2m + r)) (1 + \lambda) f_1[r]}{k r^3 (-2Q^2 + r (3m + r\lambda))} + \\
 & (i (-Q^2 (1 + \lambda) + \\
 & r (2m (1 + \lambda) + r (k^2 r^2 + \lambda + \lambda^2))) H_1[r]) / \\
 & (k r^2 (-2Q^2 + r (3m + r\lambda)))
 \end{aligned}$$

In[2] := Eq17 =

$$\begin{aligned}
 H_1'[r] = & \\
 & \text{Ord}[\text{Last}[\text{Eq13}]] /. \\
 & \text{Solve}[\text{PrIn}, H[r]] [[1, 1]]
 \end{aligned}$$

Out[2] = H_1'[r] =

$$\begin{aligned}
 & (i k r^2 (2Q^4 + Q^2 r (-8m + r - 2r\lambda) + r^2 (9m^2 + \\
 & k^2 r^4 + 4m r (-1 + \lambda) - 2r^2 \lambda)) K[r]) / \\
 & ((Q^2 + r (-2m + r))^2 (-2Q^2 + r (3m + r\lambda)) + \\
 & \frac{4i k Q r^3 f_0[r]}{(Q^2 + r (-2m + r)) (2Q^2 - r (3m + r\lambda))} + \\
 & \frac{4Q (-2Q^2 + r (3m + r + 2r\lambda)) f_1[r]}{r^2 (-2Q^2 + r (3m + r\lambda))} + \\
 & ((-4Q^4 + Q^2 r (10m + r + 3r\lambda) + \\
 & r^2 (-6m^2 + k^2 r^4 - m (r + 3r\lambda))) H_1[r]) / \\
 & (r (Q^2 + r (-2m + r)) (-2Q^2 + r (3m + r\lambda)))
 \end{aligned}$$

In[3] := Eq18 =

$$\begin{aligned}
 f_0'[r] = & \\
 & \text{Ord}[\text{Last}[\text{Eq14}]] /. \\
 & \text{Solve}[\text{PrIn}, H[r]] [[1, 1]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[3] = f_0'[r] = & \frac{QK[r]}{r^2} - \frac{1}{k r^4} (i (-2Q^2 (1 + \lambda) + \\
 & r (r (-2 + k^2 r^2 - 2\lambda) + 4m (1 + \lambda))) f_1[r])
 \end{aligned}$$

In[4] := Eq19 =

$$\begin{aligned}
 f_1'[r] = & \\
 & \text{Ord}[\text{Last}[\text{Eq15}]] /. \\
 & \text{Solve}[\text{PrIn}, H[r]] [[1, 1]]
 \end{aligned}$$

$$\text{Out}[4] = f_1'[r] == -\frac{i k r^4 f_0[r]}{(Q^2 + r(-2m + r))^2} + \frac{2(Q^2 - m r) f_1[r]}{r(Q^2 + r(-2m + r))}$$

Identificazioni $H_1(r) = i k R(r)$, $f_1(r) = i k f_2(r)$ e riscrittura del sistema che evidenzia la dipendenza da k della perturbazione :

```
In[5] := Ord[x_] := Collect[Expand[x],
  {K[r], R[r], f_0[r], f_2[r]},
  Collect[#, k^2, Simplify] &
```

```
In[6] := Eq20 =
  K'[r] ==
  Ord[Last[Eq16] /.
  {H_1[r] -> i k R[r], f_1[r] -> i k f_2[r]}]
```

$$\text{Out}[6] = K'[r] == \left(-\frac{k^2 r^5}{(Q^2 + r(-2m + r))(-2Q^2 + r(3m + r\lambda))} + \frac{(4Q^4 - Q^2 r(11m + r(-3 + \lambda)) + m r^2(6m + r(-2 + \lambda)))}{r(Q^2 + r(-2m + r))(-2Q^2 + r(3m + r\lambda))} \right) K[r] + \left(-\frac{k^2 r^2}{-2Q^2 + r(3m + r\lambda)} + \frac{(1 + \lambda)(Q^2 - r(2m + r\lambda))}{r^2(-2Q^2 + r(3m + r\lambda))} \right) R[r] + \frac{4Q f_0[r]}{-2Q^2 + r(3m + r\lambda)} - \frac{4Q(Q^2 + r(-2m + r))(1 + \lambda) f_2[r]}{r^3(-2Q^2 + r(3m + r\lambda))}$$

```
In[7] := Eq21 =
  R'[r] ==
  Ord[(-\frac{i}{k} Last[Eq17])] /.
  {H_1[r] -> i k R[r], f_1[r] -> i k f_2[r]}
```

Out[7]= R'[r] ==

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k^2 r^8}{(Q^2 + r(-2m+r))^2 (-2Q^2 + r(3m+r\lambda))} + \right. \\ & \quad \left. \frac{(r^2 (2Q^4 + Q^2 r(-8m+r-2r\lambda) + r^2 (9m^2 + 4mr(-1+\lambda) - 2r^2\lambda)))/}{(Q^2 + r(-2m+r))^2 (-2Q^2 + r(3m+r\lambda))} \right) K[r] + \\ & \left(\frac{k^2 r^5}{(Q^2 + r(-2m+r)) (-2Q^2 + r(3m+r\lambda))} - \frac{(Q^2 - mr)(4Q^2 - r(6m+r+3r\lambda))}{r(Q^2 + r(-2m+r)) (-2Q^2 + r(3m+r\lambda))} \right) \\ & R[r] + \\ & \frac{4Qr^3 f_0[r]}{(Q^2 + r(-2m+r)) (2Q^2 - r(3m+r\lambda))} + \\ & \frac{4Q(-2Q^2 + r(3m+r+2r\lambda)) f_2[r]}{r^2 (-2Q^2 + r(3m+r\lambda))} \end{aligned}$$

In[8] := Eq22 =

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}'_0[\mathbf{r}] == \\ & \text{Ord}[\text{Last}[\text{Eq18}]] /. \\ & \{ \mathbf{H}_1[\mathbf{r}] \rightarrow i \mathbf{k} \mathbf{R}[\mathbf{r}], \mathbf{f}_1[\mathbf{r}] \rightarrow i \mathbf{k} \mathbf{f}_2[\mathbf{r}] \} \end{aligned}$$

Out[8]= f'_0[r] == $\frac{QK[r]}{r^2} +$

$$\left(k^2 - \frac{1}{r^4} (2(Q^2 + r(-2m+r))(1+\lambda)) \right) f_2[r]$$

In[9] := Eq23 =

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}'_2[\mathbf{r}] == \\ & \text{Ord}\left[\left(-\frac{i}{\mathbf{k}} \text{Last}[\text{Eq19}] \right) \right] /. \\ & \{ \mathbf{H}_1[\mathbf{r}] \rightarrow i \mathbf{k} \mathbf{R}[\mathbf{r}], \mathbf{f}_1[\mathbf{r}] \rightarrow i \mathbf{k} \mathbf{f}_2[\mathbf{r}] \} \end{aligned}$$

Out[9]= f'_2[r] ==

$$-\frac{r^4 f_0[r]}{(Q^2 + r(-2m+r))^2} + \frac{2(Q^2 - mr) f_2[r]}{r(Q^2 + r(-2m+r))}$$

Forma della parte-Maxwell, con la simbologia standard $\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \rightarrow e^{\nu(r)}$:

In[10] := f'_0[r] == $\left(k^2 - \frac{2(1+\lambda)e^{\nu[r]}}{r^2}\right) f_2[r] + \frac{Q}{r^2} K[r]$;

$$\mathbf{f}'_2[\mathbf{r}] == -e^{-2\nu[\mathbf{r}]} \mathbf{f}_0[\mathbf{r}] + \frac{2(Q^2 - m\mathbf{r})e^{-\nu[\mathbf{r}]}}{r^3} \mathbf{f}_2[\mathbf{r}] ;$$

2.3.1 La forma di Schrödinger

Un punto (anche storicamente) importante consiste nella possibilità di porre le prime due equazioni del sistema ora ricavato in forma di equazione d'onda monodimensionale di tipo Schrödinger, in modo tale da ricondurre le considerazioni sulla stabilità della metrica perturbata allo studio del *potenziale efficace* in essa contenuto. Tale derivazione, nel caso presente delle perturbazioni polari, ha costituito il principale scoglio formale nello sviluppo della teoria perturbativa classica della soluzione di Schwarzschild, iniziato da Regge e Wheeler. Si mostra qui come, data la forma del sistema di primo grado a cui si è pervenuti, una semplice tecnica di identificazione algebrica di coefficienti permetta la posizione formale Schrödinger-like con termini di sorgente (dovuti alla presenza del campo elettromagnetico) nel caso più generale dello spazio-tempo di Reissner-Nordstrøm, e di come opportune riduzioni di tale caso riconducano ai risultati noti.

Quaderno 10

Riscrittura del sistema di Einstein in forma di equazione unica di secondo grado di tipo Schrödinger con un doppio termine di sorgente

$$\begin{aligned} In[1] := \mathbf{Eq1} = \\ \mathbf{K}'[\mathbf{r}] == (\mathbf{Ka1}[\mathbf{r}] + \mathbf{Kb1}[\mathbf{r}] \mathbf{k}^2) \mathbf{K}[\mathbf{r}] + \\ (\mathbf{Ra1}[\mathbf{r}] + \mathbf{Rb1}[\mathbf{r}] \mathbf{k}^2) \mathbf{R}[\mathbf{r}] + \mathbf{T1}[\mathbf{r}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Eq2} = \\ \mathbf{R}'[\mathbf{r}] == (\mathbf{Ka2}[\mathbf{r}] + \mathbf{Kb2}[\mathbf{r}] \mathbf{k}^2) \mathbf{K}[\mathbf{r}] + \\ (\mathbf{Ra2}[\mathbf{r}] + \mathbf{Rb2}[\mathbf{r}] \mathbf{k}^2) \mathbf{R}[\mathbf{r}] + \mathbf{T2}[\mathbf{r}]; \end{aligned}$$

Si passa ad una formulazione Schrödinger-like con un doppio cambiamento di variabile dipendente e l'imposizione di una "tortoise-coordinate" $r^*(r)$:

$$In[2] := \mathbf{K}[\mathbf{r}_-] := \mathbf{f}[\mathbf{r}] \hat{\mathbf{R}}[\mathbf{r}^*[\mathbf{r}]] + \mathbf{g}[\mathbf{r}] \hat{\mathbf{L}}[\mathbf{r}^*[\mathbf{r}]]$$

$$\mathbf{R}[\mathbf{r}_-] := \mathbf{p}[\mathbf{r}] \hat{\mathbf{R}}[\mathbf{r}^*[\mathbf{r}]] + \mathbf{q}[\mathbf{r}] \hat{\mathbf{L}}[\mathbf{r}^*[\mathbf{r}]]$$

Il nuovo sistema si scrive (con la posizione $r^{**}(r) = b(r)$ ed applicando un operatore di ordinamento che evidenzia la dipendenza da k^2):

```
In[3] := Ord[x_] := Collect[Expand[x],
    {R[r], L[r]},
    Collect[#, k^2, Simplify] &];

s = FullSimplify[
    Solve[{Eq1, Eq2}, {R[r], L[r]}] /.
    (r*)'[r] -> b[r];
```

```
In[4] := R[r] == Ord[Last[s[[1,1]]]]
```

```
Out[4] = R[r] ==
    (q[r] T1[r] - g[r] T2[r]) / (-b[r] g[r] p[r] + b[r] f[r] q[r]) + R[r]
    ((k^2 (f[r] g[r] Kb2[r] - f[r] Kb1[r] q[r] -
    p[r] q[r] Rb1[r] +
    g[r] p[r] Rb2[r])) /
    (b[r] g[r] p[r] - b[r] f[r] q[r]) +
    (f[r] g[r] Ka2[r] - f[r] Ka1[r] q[r] -
    p[r] q[r] Ra1[r] + g[r] p[r] Ra2[r] +
    q[r] f'[r] - g[r] p'[r]) /
    (b[r] g[r] p[r] - b[r] f[r] q[r]) +
    L[r] ((k^2 (g[r]^2 Kb2[r] - q[r]^2 Rb1[r] +
    g[r] q[r] (-Kb1[r] + Rb2[r]))) /
    (b[r] (g[r] p[r] - f[r] q[r]) +
    (g[r]^2 Ka2[r] +
    q[r] (-q[r] Ra1[r] + g'[r]) - g[r]
    (Ka1[r] q[r] - q[r] Ra2[r] + q'[r]))) /
    (b[r] (g[r] p[r] - f[r] q[r])))
```

```
In[5] := L[r] == Ord[Last[s[[1,2]]]]
```


$$\begin{aligned}
 \text{Out}[5] = \hat{L}'[r^*[r]] = & \\
 & \frac{p[r] T1[r] - f[r] T2[r]}{b[r] g[r] p[r] - b[r] f[r] q[r]} + \hat{R}[r^*[r]] \\
 & ((k^2 (-f[r]^2 Kb2[r] + p[r]^2 Rb1[r] + f[r] \\
 & \quad p[r] (Kb1[r] - Rb2[r]))) / \\
 & (b[r] (g[r] p[r] - f[r] q[r])) + \\
 & (-f[r]^2 Ka2[r] + \\
 & \quad p[r] (p[r] Ra1[r] - f'[r]) + f[r] \\
 & \quad (Ka1[r] p[r] - p[r] Ra2[r] + p'[r]))) / \\
 & (b[r] (g[r] p[r] - f[r] q[r]))) + \hat{L}[\\
 & r^*[r]] \\
 & ((k^2 (p[r] (g[r] Kb1[r] + q[r] Rb1[r]) - \\
 & \quad f[r] (g[r] Kb2[r] + q[r] Rb2[r]))) / \\
 & (b[r] (g[r] p[r] - f[r] q[r])) + \\
 & (p[r] (g[r] Ka1[r] + q[r] Ra1[r] - g'[r]) + \\
 & \quad f[r] \\
 & \quad (-g[r] Ka2[r] - q[r] Ra2[r] + q'[r]))) / \\
 & (b[r] (g[r] p[r] - f[r] q[r]))
 \end{aligned}$$

Le funzioni $f(r)$, $g(r)$, $p(r)$, $q(r)$, $b(r)$ verranno determinate in modo che il sistema assuma la forma di Schrödinger :

$$\begin{aligned}
 \hat{R}'(r^*) &= \hat{L}(r^*) + S_1(r) \\
 \hat{L}'(r^*) &= \hat{R}''(r^*) = -[k^2 - V(r)] \hat{R}(r) + S_2(r)
 \end{aligned}$$

Attraverso l'identificazione dei coefficienti, si ricavano 10 condizioni, che formano un nuovo sistema di 7 equazioni più tre definizioni del potenziale $V(r)$ di Zerilli e dei termini di sorgente :

$$\begin{aligned}
 \text{In}[6] := \mathbf{Eq1} = & \mathbf{f[r] g[r] Ka2[r] - f[r] Ka1[r] q[r] -} \\
 & \mathbf{p[r] q[r] Ra1[r] + g[r] p[r] Ra2[r] +} \\
 & \mathbf{q[r] f'[r] - g[r] p'[r] == 0;}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[7] := \mathbf{Eq2} = & \mathbf{f[r] g[r] Kb2[r] - f[r] Kb1[r] q[r] -} \\
 & \mathbf{p[r] q[r] Rb1[r] + g[r] p[r] Rb2[r] == 0;}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[8] := \mathbf{Eq3} = & \mathbf{g[r]}^2 \mathbf{Ka2[r]} + \mathbf{q[r]} (-\mathbf{q[r]} \mathbf{Ra1[r]} + \mathbf{g'[r]}) - \\ & \mathbf{g[r]} (\mathbf{Ka1[r]} \mathbf{q[r]} - \mathbf{q[r]} \mathbf{Ra2[r]} + \mathbf{q'[r]}) == \\ & \mathbf{b[r]} (\mathbf{g[r]} \mathbf{p[r]} - \mathbf{f[r]} \mathbf{q[r]}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[9] := \mathbf{Eq4} = & \mathbf{g[r]}^2 \mathbf{Kb2[r]} - \mathbf{q[r]}^2 \mathbf{Rb1[r]} + \\ & \mathbf{g[r]} \mathbf{q[r]} (-\mathbf{Kb1[r]} + \mathbf{Rb2[r]}) == \mathbf{0}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[10] := \mathbf{Eq5} = & \mathbf{f[r]}^2 \mathbf{Kb2[r]} - \mathbf{p[r]}^2 \mathbf{Rb1[r]} - \\ & \mathbf{f[r]} \mathbf{p[r]} (\mathbf{Kb1[r]} - \mathbf{Rb2[r]}) == \\ & \mathbf{b[r]} (\mathbf{g[r]} \mathbf{p[r]} - \mathbf{f[r]} \mathbf{q[r]}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[11] := \mathbf{Eq6} = & \mathbf{p[r]} (\mathbf{g[r]} \mathbf{Ka1[r]} + \mathbf{q[r]} \mathbf{Ra1[r]} - \mathbf{g'[r]}) + \\ & \mathbf{f[r]} (-\mathbf{g[r]} \mathbf{Ka2[r]} - \mathbf{q[r]} \mathbf{Ra2[r]} + \mathbf{q'[r]}) == \\ & \mathbf{0}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[12] := \mathbf{Eq7} = & \mathbf{p[r]} (\mathbf{g[r]} \mathbf{Kb1[r]} + \mathbf{q[r]} \mathbf{Rb1[r]}) - \\ & \mathbf{f[r]} (\mathbf{g[r]} \mathbf{Kb2[r]} + \mathbf{q[r]} \mathbf{Rb2[r]}) == \mathbf{0}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[13] := \mathbf{DefV} = & \left(-\mathbf{f[r]}^2 \mathbf{Ka2[r]} + \mathbf{p[r]} (\mathbf{p[r]} \mathbf{Ra1[r]} - \mathbf{f'[r]}) + \right. \\ & \left. \mathbf{f[r]} (\mathbf{Ka1[r]} \mathbf{p[r]} - \mathbf{p[r]} \mathbf{Ra2[r]} + \mathbf{p'[r]}) \right) / \\ & (\mathbf{b[r]} (\mathbf{g[r]} \mathbf{p[r]} - \mathbf{f[r]} \mathbf{q[r]})) == \mathbf{V[r]}; \end{aligned}$$

$$\text{In}[14] := \mathbf{DefS1} = \frac{\mathbf{g[r]} \mathbf{T2[r]} - \mathbf{q[r]} \mathbf{T1[r]}}{\mathbf{b[r]} (\mathbf{g[r]} \mathbf{p[r]} - \mathbf{f[r]} \mathbf{q[r]})} == \mathbf{S_1[r]};$$

$$\text{In}[15] := \mathbf{DefS2} = \frac{\mathbf{p[r]} \mathbf{T1[r]} - \mathbf{f[r]} \mathbf{T2[r]}}{\mathbf{b[r]} (\mathbf{g[r]} \mathbf{p[r]} - \mathbf{f[r]} \mathbf{q[r]})} == \mathbf{S_2[r]};$$

Con :

$$\begin{aligned} \text{In}[16] := \mathbf{Ka1[r_-]} := & \left(4 \mathbf{Q}^4 - \mathbf{Q}^2 \mathbf{r} (11 \mathbf{m} + \mathbf{r} (-3 + \lambda)) + \right. \\ & \left. \mathbf{m} \mathbf{r}^2 (6 \mathbf{m} + \mathbf{r} (-2 + \lambda)) \right) / \\ & \left(\mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r})) (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda)) \right); \end{aligned}$$

$$\text{In}[17] := \mathbf{Kb1[r_-]} := -\frac{\mathbf{r}^5}{(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r})) (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))};$$

$$\text{In}[18] := \mathbf{Ra1}[\mathbf{r}_-] := \frac{(1 + \lambda) (\mathbf{Q}^2 - \mathbf{r} (2 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))}{\mathbf{r}^2 (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))};$$

$$\text{In}[19] := \mathbf{Rb1}[\mathbf{r}_-] := -\frac{\mathbf{r}^2}{-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda)};$$

$$\begin{aligned} \text{In}[20] := \mathbf{T1}[\mathbf{r}_-] := & \frac{4 \mathbf{Q} \mathbf{f}_0[\mathbf{r}]}{-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda)} - \\ & \frac{4 \mathbf{Q} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r})) (1 + \lambda) \mathbf{f}_2[\mathbf{r}]}{\mathbf{r}^3 (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[21] := \mathbf{Ka2}[\mathbf{r}_-] := & \left(\mathbf{r}^2 (2 \mathbf{Q}^4 + \mathbf{Q}^2 \mathbf{r} (-8 \mathbf{m} + \mathbf{r} - 2 \mathbf{r} \lambda) + \right. \\ & \left. \mathbf{r}^2 (9 \mathbf{m}^2 + 4 \mathbf{m} \mathbf{r} (-1 + \lambda) - 2 \mathbf{r}^2 \lambda) \right) / \\ & \left((\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r}))^2 (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda)) \right); \end{aligned}$$

$$\text{In}[22] := \mathbf{Kb2}[\mathbf{r}_-] := \frac{\mathbf{r}^8}{(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r}))^2 (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))};$$

$$\text{In}[23] := \mathbf{Ra2}[\mathbf{r}_-] := -\frac{(\mathbf{Q}^2 - \mathbf{m} \mathbf{r}) (4 \mathbf{Q}^2 - \mathbf{r} (6 \mathbf{m} + \mathbf{r} + 3 \mathbf{r} \lambda))}{\mathbf{r} (\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r})) (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))};$$

$$\text{In}[24] := \mathbf{Rb2}[\mathbf{r}_-] := \frac{\mathbf{r}^5}{(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r})) (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))};$$

$$\begin{aligned} \text{In}[25] := \mathbf{T2}[\mathbf{r}_-] := & \frac{4 \mathbf{Q} \mathbf{r}^3 \mathbf{f}_0[\mathbf{r}]}{(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r})) (2 \mathbf{Q}^2 - \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))} + \\ & \frac{4 \mathbf{Q} (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} + 2 \mathbf{r} \lambda)) \mathbf{f}_2[\mathbf{r}]}{\mathbf{r}^2 (-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))}; \end{aligned}$$

Il sistema di sette equazioni per le cinque funzioni parametriche puramente radiali (b, f, g, p, q), da soddisfare affinché sia possibile passare alla forma di Schrödinger, è, pertanto :

$$\text{In}[26] := \mathbf{Ord}[\mathbf{x}_-] := \mathbf{Simplify}[\mathbf{First}[\mathbf{x}] - \mathbf{Last}[\mathbf{x}]] == 0$$

$$\text{In}[27] := \mathbf{E2q1} = \mathbf{Ord}[\mathbf{Eq1}]$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[27] = & (r^2 (2 Q^4 + Q^2 r (-8 m + r - 2 r \lambda) + \\
 & r^2 (9 m^2 + 4 m r (-1 + \lambda) - 2 r^2 \lambda)) \\
 & f[r] g[r]) / ((Q^2 + r (-2 m + r))^2 \\
 & (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))) - \\
 & \frac{(Q^2 - m r) (4 Q^2 - r (6 m + r + 3 r \lambda)) g[r] p[r]}{r (Q^2 + r (-2 m + r)) (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))} - \\
 & ((4 Q^4 - Q^2 r (11 m + r (-3 + \lambda)) + \\
 & m r^2 (6 m + r (-2 + \lambda))) f[r] q[r]) / \\
 & (r (Q^2 + r (-2 m + r)) (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))) + \\
 & \frac{(1 + \lambda) (-Q^2 + r (2 m + r \lambda)) p[r] q[r]}{r^2 (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))} + \\
 & q[r] f'[r] - \\
 & g[r] p'[r] == 0
 \end{aligned}$$

In[28] := E2q2 = Ord[Eq2]

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[28] = & (r^2 (r^3 f[r] + (Q^2 + r (-2 m + r)) p[r]) \\
 & (r^3 g[r] + (Q^2 + r (-2 m + r)) q[r])) / \\
 & ((Q^2 + r (-2 m + r))^2 (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))) == 0
 \end{aligned}$$

In[29] := E2q3 = Ord[Eq3]

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[29] = & (r^2 (2 Q^4 + Q^2 r (-8 m + r - 2 r \lambda) + \\
 & r^2 (9 m^2 + 4 m r (-1 + \lambda) - 2 r^2 \lambda)) g[r]^2) / \\
 & ((Q^2 + r (-2 m + r))^2 (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))) + \\
 & b[r] (-g[r] p[r] + f[r] q[r]) + q[r] \\
 & \left(\frac{(1 + \lambda) (-Q^2 + r (2 m + r \lambda)) q[r]}{r^2 (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))} + g'[r] \right) - \\
 & (g[r] ((8 Q^4 + Q^2 r (-21 m + 2 r - 4 r \lambda) + \\
 & m r^2 (12 m + r (-1 + 4 \lambda))) q[r] + \\
 & r (Q^2 + r (-2 m + r)) (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda)) \\
 & q'[r])) / (r (Q^2 + r (-2 m + r)) \\
 & (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))) == 0
 \end{aligned}$$

In[30] := E2q4 = Ord[Eq4]

$$\text{Out}[30] = \frac{r^2 (r^3 g[r] + (Q^2 + r (-2 m + r)) q[r])^2}{(Q^2 + r (-2 m + r))^2 (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))} == 0$$

In[31] := E2q5 = Ord[Eq5]

$$\begin{aligned} \text{Out}[31] = & \frac{r^8 f[r]^2}{(Q^2 + r(-2m + r))^2 (-2Q^2 + r(3m + r\lambda))} + \\ & p[r] \left(-b[r] g[r] + \frac{r^2 p[r]}{-2Q^2 + 3mr + r^2\lambda} \right) + \\ & f[r] \left(\frac{2r^5 p[r]}{(Q^2 - 2mr + r^2)(-2Q^2 + 3mr + r^2\lambda)} + \right. \\ & \left. b[r] q[r] \right) == 0 \end{aligned}$$

In[32] := **E2q6 = Ord[Eq6]**

$$\begin{aligned} \text{Out}[32] = & p[r] \left((4Q^4 - Q^2 r(11m + r(-3 + \lambda)) + \right. \\ & \left. mr^2(6m + r(-2 + \lambda))) g[r] \right) / \\ & (r(Q^2 + r(-2m + r)) \\ & (-2Q^2 + r(3m + r\lambda))) + \\ & \frac{(1 + \lambda)(Q^2 - r(2m + r\lambda)) q[r]}{r^2(-2Q^2 + r(3m + r\lambda))} - \\ & g'[r] \left) + \right. \\ & f[r] \left(- (r^2(2Q^4 + Q^2 r(-8m + r - 2r\lambda)) + \right. \\ & \left. r^2(9m^2 + 4mr(-1 + \lambda) - 2r^2\lambda)) \right. \\ & \left. g[r] \right) / \left((Q^2 + r(-2m + r))^2 \right. \\ & \left. (-2Q^2 + r(3m + r\lambda)) \right) + \\ & \frac{(Q^2 - mr)(4Q^2 - r(6m + r + 3r\lambda)) q[r]}{r(Q^2 + r(-2m + r))(-2Q^2 + r(3m + r\lambda))} + \\ & \left. q'[r] \right) == 0 \end{aligned}$$

In[33] := **E2q7 = Ord[Eq7]**

$$\begin{aligned} \text{Out}[33] = & - (r^2 (r^3 f[r] + (Q^2 + r(-2m + r)) p[r]) \\ & (r^3 g[r] + (Q^2 + r(-2m + r)) q[r])) / \\ & \left((Q^2 + r(-2m + r))^2 \right. \\ & \left. (-2Q^2 + r(3m + r\lambda)) \right) == 0 \end{aligned}$$

E2q2, E2q4, E2q7 sono soddisfatte ponendo :

In[34] := **g[r_] =**
Solve[r³ g[r] + (Q² + r(-2m + r)) q[r] == 0,
g[r]] [[1, 1, 2]]

$$\text{Out}[34] = - \frac{(Q^2 + r(-2m + r)) q[r]}{r^3}$$

In[35] := **E3q1 = Ord[E2q1]**

$$\begin{aligned} \text{Out}[35] = & (q[r] (r^3 (3 Q^2 + r (-5 m + 2 r)) f[r] + \\ & (Q^2 + r (-2 m + r)) \\ & ((-2 Q^2 + r (2 m + r + r \lambda)) p[r] + \\ & r (r^3 f'[r] + (Q^2 - 2 m r + r^2) p'[r]))) / \\ & (r^4 (Q^2 + r (-2 m + r))) == 0 \end{aligned}$$

`In[36] := Simplify[E2q2]`

`Out[36] = True`

`In[37] := E3q3 = Ord[E2q3]`

$$\begin{aligned} \text{Out}[37] = & \frac{1}{r^4} \\ & (q[r] (r b[r] (r^3 f[r] + (Q^2 - 2 m r + r^2) p[r]) + \\ & (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda)) q[r])) == 0 \end{aligned}$$

`In[38] := Simplify[E2q4]`

`Out[38] = True`

`In[39] := E3q5 = Ord[E2q5]`

$$\begin{aligned} \text{Out}[39] = & \frac{r^8 f[r]^2}{(Q^2 + r (-2 m + r))^2 (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))} + \\ & f[r] \left(\frac{2 r^5 p[r]}{(Q^2 - 2 m r + r^2) (-2 Q^2 + 3 m r + r^2 \lambda)} + \right. \\ & \left. b[r] q[r] \right) + \frac{1}{r^3} \left(p[r] \left(\frac{r^5 p[r]}{-2 Q^2 + 3 m r + r^2 \lambda} + \right. \right. \\ & \left. \left. (Q^2 - 2 m r + r^2) b[r] q[r] \right) \right) == 0 \end{aligned}$$

`In[40] := E3q6 = Ord[E2q6]`

$$\begin{aligned} \text{Out}[40] = & \frac{1}{r^4 (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))} \\ & (p[r] ((2 Q^4 - Q^2 r (6 m + r \lambda) + \\ & r^2 (6 m^2 + m r (-3 + \lambda) - r^2 \lambda (2 + \lambda))) \\ & q[r] + r (Q^2 + r (-2 m + r)) \\ & (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda)) q'[r]) + \\ & (r^3 f[r] ((6 Q^4 - Q^2 r (18 m + 5 r \lambda) + \\ & r^2 (15 m^2 - 2 r^2 \lambda + m r (-3 + 7 \lambda))) \\ & q[r] + r (Q^2 + r (-2 m + r)) \\ & (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda)) q'[r])) / \\ & (Q^2 + r (-2 m + r))) == 0 \end{aligned}$$

`In[41] := Simplify[E2q7]`

`Out[41] = True`

Da E3q3 :

```
In[42] := q[r.] =
Simplify[
Solve[rb[r] (r3 f[r] + (Q2 - 2 m r + r2) p[r]) +
( - 2 Q2 + r (3 m + r λ)) q[r] == 0, q[r] ] [ [
1, 1, 2 ] ] ]
```

```
Out[42] = -  $\frac{rb[r] (r^3 f[r] + (Q^2 + r (-2 m + r)) p[r])}{-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda)}$ 
```

```
In[43] := E4q1 = Ord[E3q1]
```

```
Out[43] = -(b[r] (r3 f[r] + (Q2 + r (-2 m + r)) p[r])
(r3 (3 Q2 + r (-5 m + 2 r)) f[r] +
(Q2 + r (-2 m + r))
((-2 Q2 + r (2 m + r + r λ)) p[r] + r (r3
f'[r] + (Q2 - 2 m r + r2) p'[r]))) /
(r3 (Q2 + r (-2 m + r)) (-2 Q2 + r (3 m + r λ))) ==
0
```

```
In[44] := E4q3 = Ord[E3q3]
```

```
Out[44] = True
```

```
In[45] := E4q5 = Ord[E3q5]
```

```
Out[45] = -  $\left( \left( -r^4 + (Q^2 + r (-2 m + r))^2 b[r]^2 \right) \right. \\ \left. (r^3 f[r] + (Q^2 + r (-2 m + r)) p[r])^2 \right) / \\ \left( r^2 (Q^2 + r (-2 m + r))^2 \right. \\ \left. (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda)) \right) == 0$ 
```

```
In[46] := E4q6 = Ord[E3q6]
```

$$\begin{aligned}
 \text{Out [46]} = & \frac{1}{r^3 (-2Q^2 + r(3m + r\lambda))^2} \\
 & \left(\frac{1}{Q^2 + r(-2m + r)} (r^3 f[r] ((-6Q^4 + Q^2 r(18m + 5r\lambda) + r^2(-15m^2 + \right. \\
 & \quad m r(3 - 7\lambda) + 2r^2\lambda)) b[r] (r^3 f[r] + (Q^2 + r(-2m + r)) p[r]) - \\
 & \quad (Q^2 + r(-2m + r)) (-r(2Q^2 - r(3m + r\lambda))) \\
 & \quad (r^3 f[r] + (Q^2 + r(-2m + r)) p[r]) b'[r] + b[r] \\
 & \quad (r^3(-8Q^2 + r(9m + 2r\lambda)) f[r] + (-2Q^4 + r^2(-6m^2 + 6mr + r^2\lambda) - \\
 & \quad Q^2 r(-8m + r(6 + \lambda))) p[r] + r(-2Q^2 + r(3m + r\lambda)) \\
 & \quad (r^3 f'[r] + (Q^2 - 2mr + r^2) p'[r])))) + \\
 & \quad p[r] ((-2Q^4 + Q^2 r(6m + r\lambda) + r^2 \\
 & \quad (-6m^2 - mr(-3 + \lambda) + r^2\lambda(2 + \lambda))) \\
 & \quad b[r] (r^3 f[r] + (Q^2 + r(-2m + r)) p[r]) - \\
 & \quad (Q^2 + r(-2m + r)) \\
 & \quad (-r(2Q^2 - r(3m + r\lambda)) (r^3 f[r] + \\
 & \quad (Q^2 + r(-2m + r)) p[r]) b'[r] + \\
 & \quad b[r] (r^3(-8Q^2 + r(9m + 2r\lambda)) f[r] + \\
 & \quad (-2Q^4 + r^2(-6m^2 + 6mr + r^2\lambda) - \\
 & \quad Q^2 r(-8m + r(6 + \lambda))) p[r] + \\
 & \quad r(-2Q^2 + r(3m + r\lambda)) (r^3 f'[r] + \\
 & \quad (Q^2 - 2mr + r^2) p'[r]))) = 0
 \end{aligned}$$

Da E4q5, annullando il prodotto attraverso il primo fattore (si vedrà più oltre come il secondo vada supposto diverso da zero):

$$\text{In [47]} := \mathbf{b[r_]} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}};$$

$$\text{In [48]} := \mathbf{E5q1} = \mathbf{Ord[E4q1]}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out [48]} = & -((r^3 f[r] + (Q^2 + r(-2m + r)) p[r]) \\
 & (r^3(3Q^2 + r(-5m + 2r)) f[r] + \\
 & (Q^2 + r(-2m + r)) \\
 & ((-2Q^2 + r(2m + r + r\lambda)) p[r] + r(r^3 \\
 & \quad f'[r] + (Q^2 - 2mr + r^2) p'[r]))) / \\
 & (r(Q^2 + r(-2m + r))^2 (-2Q^2 + r(3m + r\lambda))) = \\
 & 0
 \end{aligned}$$

$$\text{In [49]} := \mathbf{E5q5} = \mathbf{Ord[E4q5]}$$

$$\text{Out [49]} = \text{True}$$

$$\text{In [50]} := \mathbf{E5q6} = \mathbf{Ord[E4q6]}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[50] = & - \left((r^3 f[r] + (Q^2 + r(-2m+r)) p[r]) \right. \\
 & (-r^3 (6Q^4 + mr^2(9m-r(6+\lambda)) + \\
 & \quad Q^2 r(-17m+r(8+\lambda))) \\
 & f[r] - (Q^2 + r(-2m+r)) \\
 & \left. ((4Q^4 + 6Q^2 r(-2m+r) + r^2(6m^2 + mr \right. \\
 & \quad \left. (-3+\lambda) + r^2 \lambda(1+\lambda))) p[r] - \right. \\
 & \quad r(-2Q^2 + r(3m+r\lambda)) (r^3 f'[r] + \\
 & \quad \left. (Q^2 + r(-2m+r)) p'[r]) \right) / \\
 & \left(r(Q^2 + r(-2m+r))^2 \right. \\
 & \left. (-2Q^2 + r(3m+r\lambda))^2 \right) == 0
 \end{aligned}$$

Si riscrivono le due equazioni rimaste :

$$\begin{aligned}
 \text{In}[51] := \mathbf{E6q1} = & \\
 & (r^3 f[r] + (Q^2 + r(-2m+r)) p[r]) \\
 & (r^3 (3Q^2 + r(-5m+2r)) f[r] + \\
 & \quad (Q^2 + r(-2m+r)) \\
 & \quad ((-2Q^2 + r(2m+r+r\lambda)) p[r] + \\
 & \quad r(r^3 f'[r] + (Q^2 - 2mr + r^2) p'[r])) == \\
 & 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[52] := \mathbf{E6q6} = & \\
 & (r^3 f[r] + (Q^2 + r(-2m+r)) p[r]) \\
 & (r^3 (-6Q^4 + mr^2(-9m+r(6+\lambda)) - \\
 & \quad Q^2 r(-17m+r(8+\lambda))) f[r] - \\
 & \quad (Q^2 + r(-2m+r)) \\
 & \quad (4Q^4 + 6Q^2 r(-2m+r) + \\
 & \quad \quad r^2(6m^2 + mr(-3+\lambda) + r^2 \lambda(1+\lambda))) \\
 & \quad p[r] + r^4(Q^2 + r(-2m+r)) \\
 & \quad (-2Q^2 + r(3m+r\lambda)) f'[r] + \\
 & \quad r(Q^2 + r(-2m+r))^2 (-2Q^2 + r(3m+r\lambda)) \\
 & \quad p'[r]) == 0;
 \end{aligned}$$

La soluzione immediata con un grado di libertà residuo :

$$\text{In}[53] := f[r_-] = -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) p[r];$$

$$\text{In}[54] := \mathbf{FullSimplify}[q[r]]$$

$$\text{Out}[54] = 0$$

$$\text{In}[55] := \mathbf{FullSimplify}[g[r]]$$

Out [55]= 0

ovviamente non è accettabile.

In [56] := $\mathbf{f}[\mathbf{r}_-] = .;$

Quindi :

In [57] := $\mathbf{E7q1} =$

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}^3 \left(3 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-5 \mathbf{m} + 2 \mathbf{r}) \right) \mathbf{f}[\mathbf{r}] + \\ & \left(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r}) \right) \\ & \left(\left(-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (2 \mathbf{m} + \mathbf{r} + \mathbf{r} \lambda) \right) \mathbf{p}[\mathbf{r}] + \right. \\ & \left. \mathbf{r} \left(\mathbf{r}^3 \mathbf{f}'[\mathbf{r}] + \left(\mathbf{Q}^2 - 2 \mathbf{m} \mathbf{r} + \mathbf{r}^2 \right) \mathbf{p}'[\mathbf{r}] \right) \right) == 0; \end{aligned}$$

In [58] := $\mathbf{E7q6} =$

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}^3 \left(-6 \mathbf{Q}^4 + \mathbf{m} \mathbf{r}^2 (-9 \mathbf{m} + \mathbf{r} (6 + \lambda)) - \right. \\ & \left. \mathbf{Q}^2 \mathbf{r} (-17 \mathbf{m} + \mathbf{r} (8 + \lambda)) \right) \mathbf{f}[\mathbf{r}] - \\ & \left(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r}) \right) \\ & \left(4 \mathbf{Q}^4 + 6 \mathbf{Q}^2 \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r}) + \right. \\ & \left. \mathbf{r}^2 (6 \mathbf{m}^2 + \mathbf{m} \mathbf{r} (-3 + \lambda) + \mathbf{r}^2 \lambda (1 + \lambda)) \right) \\ & \mathbf{p}[\mathbf{r}] + \mathbf{r}^4 \left(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r}) \right) \\ & \left(-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda) \right) \mathbf{f}'[\mathbf{r}] + \\ & \mathbf{r} \left(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r}) \right)^2 \left(-2 \mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda) \right) \\ & \mathbf{p}'[\mathbf{r}] == 0; \end{aligned}$$

Moltiplicando E7q1 per $(2 \mathbf{Q}^2 - \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda))$ e addizionandole E6q6 :

In [59] := $\mathbf{E8q6} =$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Simplify}[\mathbf{First}[\mathbf{E7q1}] * (2 \mathbf{Q}^2 - \mathbf{r} (3 \mathbf{m} + \mathbf{r} \lambda)) + \\ & \mathbf{First}[\mathbf{E7q6}]] == 0 \end{aligned}$$

Out [59]= $-2 (\mathbf{r}^4 (-3 \mathbf{m}^2 \mathbf{r} +$

$$\begin{aligned} & \mathbf{m} (\mathbf{Q}^2 - 3 \mathbf{r}^2 \lambda) + \mathbf{r} (\mathbf{r}^2 \lambda + 2 \mathbf{Q}^2 (1 + \lambda))) \\ & \mathbf{f}[\mathbf{r}] + \left(\mathbf{Q}^2 + \mathbf{r} (-2 \mathbf{m} + \mathbf{r}) \right) \\ & \left(4 \mathbf{Q}^4 + \mathbf{Q}^2 \mathbf{r} (-11 \mathbf{m} - 2 \mathbf{r} (-1 + \lambda)) + \right. \\ & \left. \mathbf{r}^2 (6 \mathbf{m}^2 + 3 \mathbf{m} \mathbf{r} \lambda + \mathbf{r}^2 \lambda (1 + \lambda)) \right) \mathbf{p}[\mathbf{r}]] == 0 \end{aligned}$$

Da cui :

In [60] := $\mathbf{f}[\mathbf{r}_-] = \mathbf{Simplify}[\mathbf{Solve}[\mathbf{E8q6}, \mathbf{f}[\mathbf{r}]]][[1, 1, 2]]$

$$\begin{aligned} \text{Out}[60] = & -((Q^2 + r(-2m + r)) \\ & (4Q^4 + Q^2 r(-11m - 2r(-1 + \lambda)) + \\ & r^2(6m^2 + 3mr\lambda + r^2\lambda(1 + \lambda))) p[r]) / \\ & (r^4(-3m^2 r + m(Q^2 - 3r^2\lambda) + \\ & r(r^2\lambda + 2Q^2(1 + \lambda)))) \end{aligned}$$

ed ottengo già il potenziale :

$$\begin{aligned} \text{In}[61] := & \text{DefVfin} = \\ & \mathbf{V}[r] == \text{FullSimplify}[\\ & \text{Solve}[\text{DefV}, \mathbf{V}[r]] [[1, 1, 2]]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[61] = & \mathbf{V}[r] = \\ & (2(Q^2 + r(-2m + r))(-4Q^6 + 6Q^4 r(3m + r\lambda) + \\ & Q^2 r^2(-27m^2 + 2mr(3 - 8\lambda) + 6r^2\lambda) + \\ & r^3(9m^3 + 9m^2 r\lambda + \\ & 3mr^2\lambda^2 + r^3\lambda^2(1 + \lambda)))) / \\ & (r^6(-2Q^2 + r(3m + r\lambda))^2) \end{aligned}$$

che può risciversi come :

$$\begin{aligned} \text{In}[62] := & \mathbf{V}[r_] = \\ & 2e^{\nu[r]} \\ & \left(\frac{1 + \lambda}{r^2} - \frac{3m}{r^3} + \frac{4Q^2}{r^4} + \right. \\ & \left. 2 \frac{9Q^4 - 20mQ^2 r + (9m^2 + 5Q^2)r^2 - 3mr^3}{r^4(-2Q^2 + 3mr + r^2\lambda)} + \right. \\ & \left. \frac{e^{\nu[r]}(4Q^2 - 3mr)^2}{r^2(-2Q^2 + 3mr + r^2\lambda)^2} \right); \end{aligned}$$

con, al solito :

$$\text{In}[63] := \nu[r_] = \text{Log}\left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right];$$

Controllo :

$$\text{In}[64] := \text{Simplify}[\text{DefVfin}]$$

$$\text{Out}[64] = \text{True}$$

Ulteriore controllo formale: ponendo $Q = 0$ si ritrova la nota espressione del potenziale di Zerilli per la metrica di Schwarzschild (cfr. [14] - eq. 5) :

$$\text{In}[65] := \text{FullSimplify}[\mathbf{V}[r] /. Q \rightarrow 0]$$

$$\text{Out}[65] = - (2 (2 m - r) (9 m^3 + 9 m^2 r \lambda + 3 m r^2 \lambda^2 + r^3 \lambda^2 (1 + \lambda))) / (r^4 (3 m + r \lambda)^2)$$

Equazione finale :

`In[66] := Ord[E7q1]`

$$\begin{aligned} \text{Out}[66] = & - ((Q^2 + r (-2 m + r)) (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda)) (2 Q^2 r (4 Q^2 r^2 \lambda + 4 Q^4 (1 + \lambda) + r^4 \lambda (4 + \lambda)) + 3 m^3 (5 Q^2 r^2 - r^4 (3 + 4 \lambda)) + m^2 (-12 Q^4 r + 6 r^5 \lambda + 2 Q^2 r^3 (3 + 19 \lambda)) + m (2 Q^6 - r^6 \lambda (3 + \lambda) - Q^4 r^2 (16 + 31 \lambda) - Q^2 r^4 (-6 + 22 \lambda + \lambda^2))) \\ & p[r] - r (Q^2 + r (-2 m + r)) (9 m^3 r^2 + m^2 (-9 Q^2 r + 12 r^3 \lambda) + r (-2 Q^2 r^2 \lambda^2 - r^4 \lambda^2 + 4 Q^4 (1 + \lambda)) + m (2 Q^4 + 3 r^4 (-1 + \lambda) \lambda - Q^2 r^2 (6 + 13 \lambda))) p'[r]) / \\ & (r (-3 m^2 r + m (Q^2 - 3 r^2 \lambda) + r (r^2 \lambda + 2 Q^2 (1 + \lambda)))^2) == 0 \end{aligned}$$

riscritta meglio, è :

`In[67] := E8q1 =`

$$\begin{aligned} & p'[r] - \\ & \left(\frac{-2 Q^2 r + m (Q^2 + r^2)}{(2 Q^2 + r (-3 m + r)) (Q^2 + r (-2 m + r))} + \right. \\ & \quad \left(-9 m^3 r^2 - 4 Q^2 r^3 + 6 m^2 r (Q^2 + r^2) + m (-2 Q^4 + 3 Q^2 r^2) \right) / \\ & \quad \left(r (2 Q^2 + r (-3 m + r)) (m Q^2 - 3 m^2 r + 2 Q^2 r + r (2 Q^2 + r (-3 m + r)) \lambda) \right) + \\ & \quad \left. \frac{-4 Q^2 + 3 m r}{r (-2 Q^2 + r (3 m + r \lambda))} \right) p[r] == 0; \end{aligned}$$

che è analiticamente risolvibile (pongo già la costante moltiplicativa uguale a 1) :

`In[68] := FullSimplify[DSolve[E8q1, p[r], r] /.`

`C[1] → 1][[1, 1, 2]]`

$$\text{Out}[68] = -\frac{2Q^2 + r(-3m + r)}{Q^2 + r(-2m + r)} + \frac{-4Q^2 + 3mr}{-2Q^2 + r(3m + r\lambda)}$$

ossia :

$$\text{In}[69] := \mathbf{p}[\mathbf{r}_-] = \mathbf{1} + \left(\frac{Q^2}{r^2} - \frac{m}{r} \right) e^{-\nu[\mathbf{r}]} - \frac{3mr - 4Q^2}{3mr + r^2\lambda - 2Q^2};$$

Corrispondentemente, le altre funzioni valgono :

$$\text{In}[70] := \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{f}[\mathbf{r}]]$$

$$\text{Out}[70] = \frac{(-4Q^4 + Q^2r(11m + 2r(-1 + \lambda)) - r^2(6m^2 + 3mr\lambda + r^2\lambda(1 + \lambda)))}{(r^3(-2Q^2 + r(3m + r\lambda)))}$$

ovvero :

$$\text{In}[71] := \mathbf{f}[\mathbf{r}_-] = \frac{1}{r} \left(\frac{3mr - 4Q^2}{r^2\lambda + 3mr - 2Q^2} e^{\nu[\mathbf{r}]} - 1 - \lambda \right);$$

$$\text{In}[72] := \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{q}[\mathbf{r}]]$$

$$\text{Out}[72] = \frac{r^3}{Q^2 + r(-2m + r)}$$

cioè :

$$\text{In}[73] := \mathbf{q}[\mathbf{r}_-] = \mathbf{r} e^{-\nu[\mathbf{r}]};$$

ed infine :

$$\text{In}[74] := \mathbf{FullSimplify}[\mathbf{g}[\mathbf{r}]]$$

$$\text{Out}[74] = -1$$

Capitolo 3

Aspetti fenomenologici delle collisioni di onde gravitazionali piane

3.1 Introduzione

Se la rivelazione a terra degli echi gravitazionali di eventi di coalescenza di sistemi binari a grande massa consiste nell'estrarre informazioni da una perturbazione per la quale la definizione di *campo debole* pare addirittura eufemistica, qualunque ipotesi fenomenologica associata all'interazione di GW deve trovare il suo alveo teorico in un regime che, al contrario, può a ragione definirsi di *campo forte*, la cui caratteristica distintiva primaria è quella di non poter essere ricondotto, soprattutto per la rilevanza degli effetti di non linearità che ad esso sono associati, ad una "piccola" deviazione perturbativa dallo spazio-tempo di background.

Dal punto di vista analitico, un'onda gravitazionale piana si definisce come una soluzione non banale delle equazioni di Einstein nel vuoto che abbia le stesse proprietà di simmetria di un'onda elettromagnetica piana in spazio piatto:

$$F_{\mu\nu} = A(u) \left([k \wedge r]_{\mu\nu} \cos \theta(u) + [k \wedge s]_{\mu\nu} \sin \theta(u) \right)$$

ove k_μ è il vettore (nullo) d'onda, r_μ ed s_μ sono vettori spaziali unitari ortogonali tra loro e a k :

$$k \cdot r = k \cdot s = s \cdot r = 0, \quad s \cdot s = 1 = r \cdot r;$$

$A(u)$ è l'ampiezza dell'onda, $\theta(u)$ è la sua polarizzazione.

Le relazioni salienti riguardanti $F_{\mu\nu}$ sono:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= 0 \\ F_{[\mu\nu,\rho]} &= 0 \end{aligned}$$

È lecito scegliere il sistema di coordinate in modo che

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t + \partial_z), \quad r = \partial_x, \quad s = \partial_y$$

per cui

$$u = k_\mu x^\mu = \frac{-t + z}{\sqrt{2}}$$

e si verifica che $F^{\mu\nu}$ è invariante sotto l'azione di un sottogruppo a 5 parametri del gruppo di Lorentz, i cui generatori sono:

- $\xi_{(1)} = k$: genera le traslazioni sul piano $-t + z = \text{costante}$
- $\xi_{(2)} = r$: genera le traslazioni lungo x
- $\xi_{(3)} = s$: genera le traslazioni lungo y
- $\xi_{(4)} = x^\rho [s_\rho k^\mu + k_\rho s^\mu]$: genera rotazioni nulle
- $\xi_{(5)} = x^\rho [r_\rho k^\mu + k_\rho r^\mu]$: genera rotazioni nulle.

3.2 Caratteristiche peculiari

Fin dagli anni '60 del secolo scorso divenne chiaro, soprattutto grazie all'opera di Roger Penrose [28], che, nell'ambito di quella vasta classe di soluzioni delle equazioni di Einstein che possono riferirsi alla "perturbazione" di una metrica statica di background da parte di un agente fisico dotato di opportune simmetrie, il caso dello spazio-tempo indotto dal passaggio di un'onda piana impulsiva si caratterizza in modo peculiare per il suo effetto sul cono di luce di qualsiasi evento che ne venga investito. L'interesse di tale notazione, naturalmente, risiede qui nell'analisi del fenomeno quando l'onda piana in questione sia di natura **gravitazionale**.

In tal caso, infatti, fu evidenziato il fenomeno per cui la *focalizzazione* delle curve di luce avviene su di una linea del genere spazio, invece che in un singolo punto, come nel caso di un'onda elettromagnetica [29, 30].

Tale caratteristica viene pienamente evidenziata dalle due particolari soluzioni delle equazioni di Einstein che si è scelto di indagare, rappresentative di un background di collisione di due GW piane, e che investono la suddetta caustica di un ruolo distinto, nei riguardi del patch di coordinate in cui vengono scritte: quello di un *orizzonte* e quello di una *singolarità* delle coordinate stesse. Tali soluzioni sono conosciute in letteratura come *metriche di Ferrari-Ibañez*.

Le premesse qui adottate per la costruzione esplicita del tensore metrico sono le seguenti:

- le due onde siano *collineari* e propagantesi, con verso opposto, lungo l'asse z di un riferimento cartesiano opportunamente scelto e di cui, pertanto, (x, y) siano le coordinate che individuano la giacitura dei fronti d'onda;
- le rispettive ampiezze siano poste uguali ad 1 nelle unità di misura scelte;
- la larghezza dell'impulso lungo z sia la stessa per le due onde e venga posta convenzionalmente pari a $\pi/2$.

L'elemento di linea rappresentativo di entrambe le soluzioni si scrive:

$$d s^2 = (1 + \sigma \sin t)^2 (d z^2 - d t^2) + \frac{1 - \sigma \sin t}{1 + \sigma \sin t} d x^2 + \cos^2 z (1 + \sigma \sin t)^2 d y^2 \quad (3.1)$$

dove $\sigma = \pm 1$ ($\sigma = 1$ corrisponde al caso di metrica con orizzonte, $\sigma = -1$ a quella con singolarità).

Onde affrontare problemi di tipo evolutivo, che richiedano, cioè, l'estensione dell'analisi fenomenologica anche a regioni interessate da una singola perturbazione ondulatoria, è necessario disporre anche qui dell'espressione del tensore metrico. A tale scopo, Khan e Penrose [30] introdussero un metodo di "estensione retroattiva", consistente nell'adottare un particolare sistema di coordinate atto a trasformare l'elemento (3.1) in modo tale che la sua continuazione analitica nelle zone di onda singola equivalga alla semplice *rimozione* della dipendenza da una singola coordinata, ovvero al suo annullamento nelle singole componenti di $g_{\mu\nu}$.

In altre parole, si pone dapprima

$$u = (t - z)/2, \quad v = (t + z)/2 \quad \Longleftrightarrow \quad t = u + v, \quad z = v - u \quad (3.2)$$

dove (u, v) sono dette, per evidenti ragioni, *coordinate nulle del cono di luce*; in tal modo, la (3.1) prende la forma:

$$d s^2 = -4 [1 + \sigma \sin(u + v)]^2 d u d v + \frac{1 - \sigma \sin(u + v)}{1 + \sigma \sin(u + v)} d x^2 + \cos^2(u - v) [1 + \sigma \sin(u + v)]^2 d y^2. \quad (3.3)$$

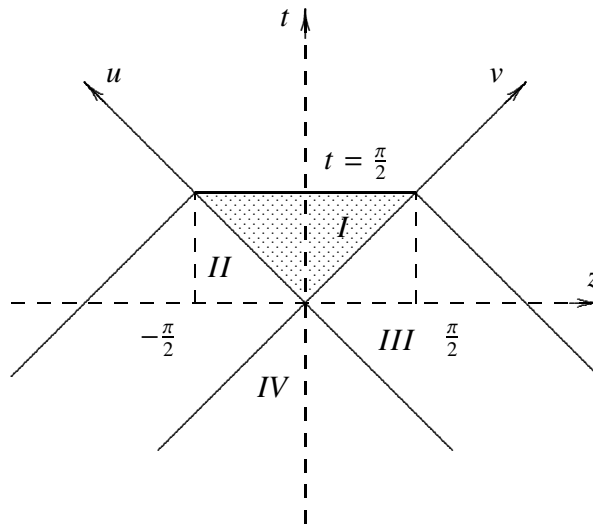


Figura 3.1. Le coordinate nulle e la quadripartizione dello spazio-tempo da esse indotta -le (t, z) risultano, qui, riscalate di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto alle (u, v) -. La regione I è quella di collisione, le II e III sono regioni di onda singola, la IV rappresenta lo spazio piatto.

Tale nuova forma risulta, dunque, estendibile alle regioni di onda singola con le semplici posizioni:

$$u \rightarrow u H(u) \quad v \rightarrow v H(v) \quad (3.4)$$

(dove $H(x)$ è la funzione a gradino di Heaviside).

Questo stratagemma si rivela particolarmente efficace anche per la visualizzazione grafica delle porzioni di sezione (u, v) (normale ai fronti d'onda) che risultano competere alle singole regioni (spazio piatto, zona di onda singola “u”, zona di onda singola “v” e regione di collisione), rappresentate in figura (3.1).

3.3 Il problema geodetico nella versione time-like

Detto della proprietà di focalizzare i coni nulli su di una linea del genere spazio, è ragionevole porsi il problema di cosa avvenga ad una particella-test che, dapprima in moto inerziale nello spazio Euclideo, venga a trovarsi nello spazio-tempo indotto da una collisione di GW forti. In altre parole, trattare la questione del *moto geodetico* in questa situazione [31].

È, anzitutto, chiaro che parlare di una transizione diretta dallo spazio piatto alla metrica di collisione non è fenomenologicamente rilevante. Osservando la figura (3.1), infatti, questo equivarrebbe a considerare esclusivamente porzioni di traiettorie inerziali in zona

IV (semplicemente rappresentate da segmenti) che terminassero nell'origine, mentre una simulazione realistica richiede che la particella-test sia dapprima investita da un'onda singola e poi, eventualmente, penetri nella regione d'interazione delle due onde.

Andranno, pertanto, integrate le equazioni geodetiche¹

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.5)$$

in cui τ è la variabile curvilinea che parametrizza il moto -il *tempo proprio*-, per ognuno dei tre diversi background metrici in cui questo si svolge (il caso della regione IV, come detto, riducendosi banalmente a porzioni di retta).

Per distinguere il caso di orbite geodetiche di gravi, ovvero del *genere tempo*, tali equazioni saranno affiancate dalla condizione di normalizzazione delle quadrivelocità

$$g_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1 \quad (3.6)$$

che pertiene a questo caso di specie. Dovranno, poi, realizzarsi le corrette giunzioni analitiche alla frontiera tra regioni diverse (in particolare, fra la zona di onda singola e quella d'interazione, verrà imposta la continuità di entrambe le componenti della quadrivelocità normali al fronte d'onda), mentre non sarà introdotta alcuna forzatura nell'integrazione numerica della (3.5) in zona I che tenga conto a priori della natura della transizione attraverso $u + v = \pi/2$ (la linea di orizzonte/singularità), lasciando che il calcolo stesso decida della rilevanza di questa soglia.

Si consideri, dunque, il caso di una particella-test in moto rettilineo (inerziale) che, dalla IV, penetri nella regione II detta di onda singola "u", nel senso che, come detto circa il metodo di Khan-Penrose, qui il tensore metrico viene a dipendere dalla sola variabile u :

$$d s^2 = -4 [1 + \sigma \sin(u)]^2 d u d v + \frac{1 - \sigma \sin(u)}{1 + \sigma \sin(u)} d x^2 + \cos^2(u) [1 + \sigma \sin(u)]^2 d y^2. \quad (3.7)$$

Le equazioni che governano il moto geodetico sono:

¹Per una giustificazione analitica della (3.5) si veda, ad es. ([2], §87)

Quaderno 11

Sistema in zona II

In[1] := <<mathtens.m

=====

Caricamento della metrica di Ferrari-Ibañez in regione II

In[2] := <<FerrIbz2tau.m

Componenti di $g_{\mu\nu}$:

In[3] := Table[Metricg[-i, -j], {i, 4}, {j, 4}]//

MatrixForm

Out[3] = $\left\{ \left\{ \frac{1 - \sigma \sin[u[\tau]]}{1 + \sigma \sin[u[\tau]]}, 0, 0, 0 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 0, \cos[u[\tau]]^2 (1 + \sigma \sin[u[\tau]])^2, 0, 0 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 0, 0, 0, -2 (1 + \sigma \sin[u[\tau]])^2 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 0, 0, -2 (1 + \sigma \sin[u[\tau]])^2, 0 \right\} \right\}$

Verrà adottata, quando necessario, la seguente prescrizione di sostituzione, relativa al fatto che σ può assumere solo i valori 1 e -1 :

In[4] := ss = $\sigma^2 \rightarrow 1$;

Verifichiamo che tale metrica, estensione analitica di quella collisionale in regione di onda singola, soddisfa le equazioni di Einstein nel vuoto $R_{\mu\nu} = 0$, dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci :

In[5] := Table[RicciR[-i, -j]/.ss, {i, 4}, {j, 4}]//

MatrixForm

Out[5] = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il generico vettore quadrivelocità della particella-test è definito con modalità che tengono conto della forma del tensore metrico e del fatto che dipende solo da $u(\tau)$:

In[6] := DefineTensor[U, {{1}, 1}]

PermWeight :: def : Object U defined

$$\text{In}[7] := \mathbf{U} / : \mathbf{U}[1] = \mathbf{Ux}[\tau];$$

$$\mathbf{U} / : \mathbf{U}[2] = \mathbf{Uy}[\tau];$$

$$\mathbf{U} / : \mathbf{U}[3] = \mathbf{Uu}[\tau];$$

$$\mathbf{U} / : \mathbf{U}[4] = \mathbf{v}'[\tau];$$

Le equazioni geodetiche del sistema $\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0$ hanno la seguente forma :

$$\begin{aligned} \text{In}[8] := & \text{Table}[\\ & \mathbf{Eq}[\mathbf{k}] = \\ & \partial_\tau \mathbf{U}[\mathbf{k}] + \\ & \left(\text{Simplify}[\right. \\ & \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{AffineG}[\mathbf{k}, -i, -j] \mathbf{U}[i] \mathbf{U}[j] \left. \right] /. \\ & \quad \mathbf{ss} \left) == \mathbf{0}, \{\mathbf{k}, 4\} // \text{TableForm} \\ & \frac{2 \sigma \text{Cos}[u[\tau]] \text{Uu}[\tau] \text{Ux}[\tau]}{-1 + \text{Sin}[u[\tau]]^2} + \text{Ux}'[\tau] == 0 \\ & \frac{2 \text{Sec}[u[\tau]] (\sigma \text{Cos}[2u[\tau]] - \text{Sin}[u[\tau]]) \text{Uu}[\tau] \text{Uy}[\tau]}{1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]]} + \text{Uy}'[\tau] == 0 \\ \text{Out}[8] = & \frac{2 \sigma \text{Cos}[u[\tau]] \text{Uu}[\tau]^2}{1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]]} + \text{Uu}'[\tau] == 0 \\ & - \frac{\sigma \text{Cos}[u[\tau]] \text{Ux}[\tau]^2}{2 (1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]])^4} + \frac{\text{Cos}[u[\tau]] (\sigma \text{Cos}[2u[\tau]] - \text{Sin}[u[\tau]]) \text{Uy}[\tau]^2}{2 + 2 \sigma \text{Sin}[u[\tau]]} \\ & + \mathbf{v}''[\tau] == 0 \end{aligned}$$

La normalizzazione di U^μ del genere tempo è :

$$\begin{aligned} \text{In}[9] := & \mathbf{Eq}[5] = \\ & \text{Simplify}[\\ & \quad \mathbf{MakeSum}[\mathbf{Metricg}[\mathbf{li}, \mathbf{lj}] \mathbf{U}[\mathbf{ui}] \mathbf{U}[\mathbf{uj}]] \left. \right] == -1 \\ \text{Out}[9] = & - \frac{(-1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]]) \text{Ux}[\tau]^2}{1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]]} + (1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]])^2 \\ & (\text{Cos}[u[\tau]]^2 \text{Uy}[\tau]^2 - 4 \text{Uu}[\tau] \mathbf{v}'[\tau]) == -1 \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga si può impostare il problema geodetico nella regione di collisione delle onde, dove, peraltro, non risulta di alcuna utilità il passaggio alle coordinate

del cono di luce secondo le (3.2):

Quaderno 12

Sistema in zona I

Caricamento della metrica di Ferrari-Ibañez in regione I

`In[10] := <<FerrIbz1tau.m`

Il tensore metrico nelle coordinate (x, y, z, t) :

`In[11] := Table[Metricg[-i, -j], {i, 4}, {j, 4}]`
`Out[11] = {{ { { $\frac{1 - \sigma \text{Sin}[t[\tau]]}{1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]]}, 0, 0, 0$ },`
`{ 0, $\text{Cos}[z[\tau]]^2 (1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]])^2, 0, 0$ },`
`{ 0, 0, $(1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]])^2, 0$ },`
`{ 0, 0, 0, $-(1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]])^2$ }}`

$R_{\mu\nu} = 0 :$

`In[12] := Table[RicciR[-i, -j]/.ss, {i, 4}, {j, 4}]//`
`MatrixForm`
`Out[12] =`
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione di U^μ con i medesimi criteri del caso precedente :

`In[13] := DefineTensor[U, {{1}, 1}]`

PermWeight :: def : Object Udefined

`In[14] := U/ : U[1] = Ux[\tau];`

`U/ : U[2] = Uy[\tau];`

`U/ : U[3] = z'[\tau];`

`U/ : U[4] = t'[\tau];`

Sistema geodetico :

```
In[15]:= Table[
  Eq[k] =
    ∂τ U[k] + Simplify[
      ( ∑i=14 ∑j=14 AffineG[k, -i, -j] U[i] U[j] ) /
      ss ] == 0, {k, 4}] // TableForm
-2 σ Sec[t[τ]] Ux[τ] t'[τ] + Ux'[τ] == 0
Uy'[τ] + 2 Uy[τ] (  $\frac{\sigma \text{Cos}[t[\tau]] t'[\tau]}{1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]]}$  - Tan[z[τ]] z'[τ] ) == 0
Out[15]= Cos[z[τ]] Sin[z[τ]] Uy[τ]2 +  $\frac{2 \sigma \text{Cos}[t[\tau]] t'[\tau] z'[\tau]}{1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]]}$  + z''[τ] == 0
(σ Cos[t[τ]] ( -Ux[τ]2 + Cos[z[τ]]2 (1 + σ Sin[t[τ]])3 Uy[τ]2 +
(1 + σ Sin[t[τ]])3 t'[τ]2 + (1 + σ Sin[t[τ]])3 z'[τ]2 ) /
((1 + σ Sin[t[τ]])4 ) + t''[τ] == 0
```

$$U^\alpha U_\alpha = -1 :$$

```
In[16]:= Eq[5] =
  Simplify[
    MakeSum[Metricg[li, lj] U[ui] U[uj]] ] == -1
Out[16]= -  $\frac{(-1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]]) Ux[\tau]^2}{1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]]}$  + (1 + σ Sin[t[τ]])2
(Cos[z[τ]]2 Uy[τ]2 - t'[τ]2 + z'[τ]2) == -1
```

L'obiettivo fondamentale essendo quello dell'integrazione numerica delle equazioni geodetiche, quindi della loro scrittura in forma di sistema di quattro equazioni differenziali del primo ordine nelle componenti della quadrivelocità della particella-test, è necessario individuare ulteriori relazioni analitiche che coinvolgano tali componenti; essendo il moto geodetico sostanzialmente una "ricognizione" delle caratteristiche *geometriche* dello spazio-tempo in cui esso ha luogo, è naturale che tali relazioni vadano individuate in quelle che esprimono le proprietà di *simmetria* delle metriche di Ferrari-Ibañez nelle due versioni, di onda singola e di collisione.

3.3.1 Il ruolo-chiave delle simmetrie di Killing

Nei termini della geometria differenziale (vedi, ad es., [32]), data una varietà differenziabile S dotata di metrica g , dato il gruppo di Lie a un parametro G delle isometrie di S , si definiscono i *campi vettoriali di Killing* \vec{V} di g come i generatori dell'algebra di Lie \mathfrak{g} associata a G . L'espressione algebrica di tale definizione può essere data in termini della *derivata di Lie* in S ed è:

$$\mathcal{L}_{\vec{V}} g = 0 \quad (3.8)$$

Più concretamente, i vettori di Killing associati alla metrica $g_{\mu\nu}$ e tradizionalmente denotati con ξ^α , generano trasformazioni di coordinate che *lasciano invariata la metrica*, ossia tali che (cfr. (2.6))

$$\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \quad (3.9)$$

(*equazione di Killing*).

Dalle (3.9) e (3.5) discende immediatamente, essendo $U^\nu(\xi_\mu U^\mu)_{;\nu} = 0$, che:

$$\xi_\mu U^\mu = \text{cost.} \quad (3.10)$$

ossia, ad ogni campo di Killing corrisponde la conservazione di una quantità *coniugata* ad una delle componenti di U .

In generale, una metrica qualunque g non ammette alcun campo di Killing, dal momento che ad essa non è associabile a priori un gruppo ad un parametro di isometrie. Mentre metriche di dimensione n associate a *spazi a simmetria massimale* ammettono $n(n+1)/2$ campi di Killing. È inoltre immediato mostrare che un tensore metrico che non dipende dalla i -esima coordinata x^i ammette ∂_{x^i} come vettore di Killing (tali vettori sono anche detti *traslazionali* perché tali sono le simmetrie cui si riferiscono).

Come per le equazioni geodetiche, passiamo a considerare le (3.10) che si ricavano dalle simmetrie di Killing di entrambe le metriche; si ha, anzitutto:

$$\text{Zona II} \Rightarrow \begin{cases} \xi_{(1)}^{\text{II}} = \partial_x \\ \xi_{(2)}^{\text{II}} = \partial_y \\ \xi_{(3)}^{\text{II}} = \partial_\nu \end{cases} \quad \text{Zona I} \Rightarrow \begin{cases} \xi_{(1)}^{\text{I}} = \partial_x \\ \xi_{(2)}^{\text{I}} = \partial_y \end{cases} \quad (3.11)$$

Le simmetrie in Zona II si rivelano già sufficienti alla completa riduzione al primo ordine del sistema geodetico, mentre è necessario spingere oltre l'analisi per quanto concerne la Zona I.

Quaderno 13

Non esiste alcun metodo generale per ricavare i vettori di Killing di una metrica arbitraria; la procedura seguente illustra la scrittura del sistema completo di Killing e la verifica dello stesso per due vettori di specifico interesse.

Dichiarazione di un vettore di prova :

```
In[1] := DefineTensor[X, {{1}, 1}]
```

Dichiarazione di un generico tensore di rango 2 :

```
In[2] := DefineTensor[Killing, {{1, 2}, 1}]
```

Definizione del tensore rappresentativo del primo membro dell'equazione di Killing (3.9):

```
In[3] := Killing[li_, lj_] =
  Simplify[
    CDtoOD[CD[Metricg[li, la] X[ua], lj] +
      CD[Metricg[lj, la] X[ua], li]]];
```

Attivazione del tag di derivazione esplicita :

```
In[4] := On[EvaluateODFlag]
```

Scrittura del sistema completo di Killing; per una generica metrica di dimensione 4 si avrebbe (output generato da una nuova sessione di MathTensor) :

```
In[5] := Dimension = 4;
```

```
In[6] := Table[
  X/: X[d] = f_d@@Table[x[i], {i, Dimension}],
  {d, Dimension}];

Flatten[
  Table[
    Simplify[MakeSum[Killing[-i, -j]]] == 0,
    {i, Dimension}, {j, Dimension}]]//
TableForm
```


$$\begin{aligned}
 & -2 \left((G^4_{11}) (X_4) + (G^3_{11}) (X_3) + (G^2_{11}) (X_2) + (G^1_{11}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{21}) (X_4) + (G^3_{21}) (X_3) + (G^2_{21}) (X_2) + (G^1_{21}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{31}) (X_4) + (G^3_{31}) (X_3) + (G^2_{31}) (X_2) + (G^1_{31}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{41}) (X_4) + (G^3_{41}) (X_3) + (G^2_{41}) (X_2) + (G^1_{41}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{21}) (X_4) + (G^3_{21}) (X_3) + (G^2_{21}) (X_2) + (G^1_{21}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{22}) (X_4) + (G^3_{22}) (X_3) + (G^2_{22}) (X_2) + (G^1_{22}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{32}) (X_4) + (G^3_{32}) (X_3) + (G^2_{32}) (X_2) + (G^1_{32}) (X_1) \right) == 0 \\
 \text{Out [6]} = & -2 \left((G^4_{42}) (X_4) + (G^3_{42}) (X_3) + (G^2_{42}) (X_2) + (G^1_{42}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{31}) (X_4) + (G^3_{31}) (X_3) + (G^2_{31}) (X_2) + (G^1_{31}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{32}) (X_4) + (G^3_{32}) (X_3) + (G^2_{32}) (X_2) + (G^1_{32}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{33}) (X_4) + (G^3_{33}) (X_3) + (G^2_{33}) (X_2) + (G^1_{33}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{43}) (X_4) + (G^3_{43}) (X_3) + (G^2_{43}) (X_2) + (G^1_{43}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{41}) (X_4) + (G^3_{41}) (X_3) + (G^2_{41}) (X_2) + (G^1_{41}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{42}) (X_4) + (G^3_{42}) (X_3) + (G^2_{42}) (X_2) + (G^1_{42}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{43}) (X_4) + (G^3_{43}) (X_3) + (G^2_{43}) (X_2) + (G^1_{43}) (X_1) \right) == 0 \\
 & -2 \left((G^4_{44}) (X_4) + (G^3_{44}) (X_3) + (G^2_{44}) (X_2) + (G^1_{44}) (X_1) \right) == 0
 \end{aligned}$$

Nel caso della metrica di Ferrari-Ibañez in Zona I, si verifica immediatamente che i seguenti vettori :

`In[7] := <<FerrIbz1tau.m`

MetricgFlag has been turned off.

`In[8] := DefineTensor[{V1,V2},{1},1]`

`In[9] := V1/:V1[1]=0;`

`V1/:V1[2]=const Sin[y[tau]] Tan[z[tau]];`

`V1/:V1[3]=const Cos[y[tau]];`

`V1/:V1[4]=0;`

`In[10] := V2/:V2[1]=0;`

`V2/:V2[2]=const Cos[y[tau]] Tan[z[tau]];`

`V2/:V2[3]=-const Sin[y[tau]];`

`V2/:V2[4]=0;`

sono vettori di Killing; ridefinendo il tensore di prova in funzione di V1 :

```
In[11]:= Killing[li-,lj-] =
      Simplify[
        CDtoOD[CD[Metricg[li,la] V1[ua],lj] +
          CD[Metricg[lj,la] V1[ua],li]]];
```

si ha

```
In[12]:= Table[FullSimplify[
      MakeSum[Killing[-i, -j]]], {i, 4},
      {j, 4}]/MatrixForm
Out[12]= 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Ripetizione della procedura per V2 :

```
In[13]:= Killing[li-,lj-] =
      Simplify[
        CDtoOD[CD[Metricg[li,la] V1[ua],lj] +
          CD[Metricg[lj,la] V1[ua],li]]];
```

```
In[14]:= Table[FullSimplify[
      MakeSum[Killing[-i, -j]]], {i, 4},
      {j, 4}]/MatrixForm
Out[14]= 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Dunque, la metrica di collisione risulta provvista di due ulteriori vettori di Killing:

$$\xi_{(3)}^1 = \sin y \tan z \partial_y + \cos y \partial_z \quad (3.12)$$

$$\xi_{(4)}^1 = \cos y \tan z \partial_y - \sin y \partial_z \quad (3.13)$$

tramite i quali è possibile procedere alla riduzione del sistema geodetico anche nella Regione I.

3.3.2 Riduzione del sistema geodetico

Le condizioni supplementari ricavate dalle simmetrie di Killing permettono di esplicitare alcune delle componenti della quadrivelocità grazie ai momenti coniugati della (3.10):

Quaderno 14

Momenti coniugati in Zona II

Scrivendo la (3.10) per ognuno dei tre vettori di Killing :

$$\text{In}[15] := \text{Solve}[\text{MakeSum}[\text{Metricg}[\text{li}, \text{lj}] \mathbf{X}[\text{ui}] \mathbf{U}[\text{uj}]] == \mathbf{Kx const}, \mathbf{U}[1]]$$

$$\text{Out}[15] = \left\{ \left\{ U_x[\tau] \rightarrow -\frac{K_x (1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]])}{-1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]]} \right\} \right\}$$

$$\text{In}[16] := \text{Solve}[\text{MakeSum}[\text{Metricg}[\text{li}, \text{lj}] \mathbf{Y}[\text{ui}] \mathbf{U}[\text{uj}]] == \mathbf{Ky const}, \mathbf{U}[2]]$$

$$\text{Out}[16] = \left\{ \left\{ U_y[\tau] \rightarrow \frac{K_y \text{Sec}[u[\tau]]^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]])^2} \right\} \right\}$$

$$\text{In}[17] := \text{Solve}[\text{MakeSum}[\text{Metricg}[\text{li}, \text{lj}] \mathbf{V}[\text{ui}] \mathbf{U}[\text{uj}]] == \mathbf{Kv const}, \mathbf{U}[3]]$$

$$\text{Out}[17] = \left\{ \left\{ U_u[\tau] \rightarrow -\frac{K_v}{2 (1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]])^2} \right\} \right\}$$

si possono ridefinire le prime tre componenti della quadrivelocità come :

$$\text{In}[18] := \mathbf{Ux}[\tau_-] = \mathbf{Kx} \frac{1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]]}{1 - \sigma \text{Sin}[u[\tau]]};$$

$$\mathbf{Uy}[\tau_-] = \mathbf{Ky} \frac{\text{Sec}[u[\tau]]^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]])^2};$$

$$\mathbf{Uu}[\tau_-] = -\frac{\mathbf{Kv}}{2 (1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]])^2};$$

Momenti coniugati in Zona I

Per $\xi_{(1)}^I, \xi_{(2)}^I$ valgono le formule analoghe :

$$\text{In}[19] := \text{Solve}[\text{MakeSum}[\text{Metricg}[\text{li}, \text{lj}] \mathbf{X}[\text{ui}] \mathbf{U}[\text{uj}]] == \mathbf{Kx const}, \mathbf{U}[1]]$$

$$\text{Out}[19] = \left\{ \left\{ U_x[\tau] \rightarrow -\frac{K_x (1 + \sigma \sin[t[\tau]])}{-1 + \sigma \sin[t[\tau]]} \right\} \right\}$$

$$\text{In}[20] := \text{Solve}[\text{MakeSum}[\text{Metricg}[\mathbf{li}, \mathbf{lj}] \mathbf{Y}[\mathbf{ui}] \mathbf{U}[\mathbf{uj}]] == \mathbf{Ky} \text{const}, \mathbf{U}[2]]$$

$$\text{Out}[20] = \left\{ \left\{ U_y[\tau] \rightarrow \frac{K_y \text{Sec}[z[\tau]]^2}{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2} \right\} \right\}$$

$$\text{In}[21] := \mathbf{U}_x[\tau_-] = \mathbf{K}_x \frac{1 + \sigma \sin[t[\tau]]}{1 - \sigma \sin[t[\tau]]};$$

$$\mathbf{U}_y[\tau_-] = \mathbf{K}_y \frac{\text{Sec}[z[\tau]]^2}{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2};$$

Mentre per $\xi_{(3)}^1, \xi_{(4)}^1$ si ha, nel primo caso, chiamando K_{z1}, K_{z2} i momenti coniugati :

$$\text{In}[22] := \text{Simplify}[\text{MakeSum}[\text{Metricg}[\mathbf{li}, \mathbf{lj}] \mathbf{V1}[\mathbf{ui}] \mathbf{U}[\mathbf{uj}]] == \mathbf{Kz1} \text{const}]$$

$$\text{Out}[22] = \text{const } K_y \sin[y[\tau]] \tan[z[\tau]] + \text{const } \cos[y[\tau]] (1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2 z'[\tau] == \text{const } K_{z1}$$

che permette di scrivere $z'(\tau)$ come :

$$\text{In}[23] := \mathbf{KilX} = \text{Simplify}[\text{Solve}[\%/.z'[\tau] \rightarrow \mathbf{zp}, \mathbf{zp}]]$$

$$\text{Out}[23] = \left\{ \left\{ zp \rightarrow \frac{\text{Sec}[y[\tau]] (K_{z1} - K_y \sin[y[\tau]] \tan[z[\tau]])}{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2} \right\} \right\}$$

Poi, riferendosi al secondo vettore :

$$\text{In}[24] := \text{Simplify}[\text{MakeSum}[\text{Metricg}[\mathbf{li}, \mathbf{lj}] \mathbf{V2}[\mathbf{ui}] \mathbf{U}[\mathbf{uj}]] == \mathbf{Kz2} \text{const}]$$

$$\text{Out}[24] = \text{const } K_y \cos[y[\tau]] \tan[z[\tau]] == \text{const } (K_{z2} + (1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2 \sin[y[\tau]] z'[\tau])$$

cosicché, stavolta :

$$\text{In}[25] := \mathbf{KilY} = \text{Simplify}[\text{Solve}[\%/.z'[\tau] \rightarrow \mathbf{zp}, \mathbf{zp}]]$$

$$\text{Out}[25] = \left\{ \left\{ zp \rightarrow \frac{-K_{z2} \text{Csc}[y[\tau]] + K_y \text{Cot}[y[\tau]] \tan[z[\tau]]}{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2} \right\} \right\}$$

Uguagliando le due espressioni ottenute si ottiene un integrale primo del moto, nella forma :

In[26] := **Simplify**[**KilX**[[1,1]][[2]] -
KilY[[1,1]][[2]]] == 0

Out[26] = (Kz1 Sec[y[τ]] +
Csc[y[τ]] (Kz2 - Ky Sec[y[τ]] Tan[z[τ]])) /
(1 + σ Sin[t[τ]])² == 0

da cui è possibile ricavare un'espressione esplicita di z(τ) :

In[27] := **Solve**[% , z[τ]]

Out[27] = {{z[τ] →
ArcTan [$\frac{Kz2 \text{Cos}[y[\tau]] + Kz1 \text{Sin}[y[\tau]]}{Ky}$]}}

È immediato mostrare che le relazioni di conservazione derivate dalle (3.11) riducono a semplici identità le equazioni geodetiche corrispondenti alle coordinate assenti dalle rispettive metriche:

Quaderno 15

Zona II

Componenti x, y, u di (3.5) :

$$\text{Eq}[1] = \frac{2 \sigma \text{Cos}[u[\tau]] \text{Uu}[\tau] \text{Ux}[\tau]}{-1 + \text{Sin}[u[\tau]]^2} + \text{Ux}'[\tau] == 0;$$

$$\text{Eq}[2] = (2 \text{Sec}[u[\tau]] (\sigma \text{Cos}[2u[\tau]] - \text{Sin}[u[\tau]])) \text{Uu}[\tau] \text{Uy}[\tau] / (1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]]) + \text{Uy}'[\tau] == 0;$$

$$\text{Eq}[3] = \frac{2 \sigma \text{Cos}[u[\tau]] \text{Uu}[\tau]^2}{1 + \sigma \text{Sin}[u[\tau]]} + \text{Uu}'[\tau] == 0;$$

Relazioni di conservazione associate ai vettori di Killing traslazionali :

$$\text{In}[29] := \mathbf{Ux}[\tau_-] = \mathbf{Kx} \frac{1 + \sigma \sin[u[\tau]]}{1 - \sigma \sin[u[\tau]]};$$

$$\mathbf{Uy}[\tau_-] = \mathbf{Ky} \frac{\sec[u[\tau]]^2}{(1 + \sigma \sin[u[\tau]])^2};$$

$$\mathbf{Uu}[\tau_-] = -\frac{\mathbf{Kv}}{2(1 + \sigma \sin[u[\tau]])^2};$$

Verifica delle identità ottenute :

$$\text{In}[30] := \text{FullSimplify}[\text{Eq}[1] /. \mathbf{u}'[\tau] \rightarrow \mathbf{Uu}[\tau]] /.$$

ss

$$\text{Out}[30] = \text{True}$$

$$\text{In}[31] := \text{FullSimplify}[\text{Eq}[2] /. \mathbf{u}'[\tau] \rightarrow \mathbf{Uu}[\tau]]$$

$$\text{Out}[31] = \text{True}$$

$$\text{In}[32] := \text{FullSimplify}[\text{Eq}[3] /. \mathbf{u}'[\tau] \rightarrow \mathbf{Uu}[\tau]]$$

$$\text{Out}[32] = \text{True}$$

$$\text{In}[33] := \mathbf{Ux}[\tau_-] = .; \mathbf{Uy}[\tau_-] = .;$$

Zona I

Componenti x, y di (3.5) :

$$\text{In}[34] := \text{Eq}[1] = -2 \sigma \sec[t[\tau]] \mathbf{Ux}[\tau] \mathbf{t}'[\tau] + \mathbf{Ux}'[\tau] == 0;$$

$$\text{Eq}[2] =$$

$$\mathbf{Uy}'[\tau] +$$

$$2 \mathbf{Uy}[\tau]$$

$$\left(\frac{\sigma \cos[t[\tau]] \mathbf{t}'[\tau]}{1 + \sigma \sin[t[\tau]]} - \tan[z[\tau]] \mathbf{z}'[\tau] \right) == 0;$$

Relazioni di conservazione associate ai vettori di Killing traslazionali :

$$\text{In}[35] := \mathbf{Ux}[\tau_-] = \mathbf{Kx} \frac{1 + \sigma \sin[t[\tau]]}{1 - \sigma \sin[t[\tau]]};$$

$$\mathbf{Uy}[\tau_-] = \mathbf{Ky} \frac{\sec[z[\tau]]^2}{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2};$$

Verifica delle identità ottenute :

`In[36] := FullSimplify[Eq[1]]/.ss`

`Out[36]= True`

`In[37] := FullSimplify[Eq[2]]`

`Out[37]= True`

A questo punto, per quanto concerne le equazioni geodetiche in Zona II di onda singola, detto che le restanti due equazioni originarie (quella corrispondente alla quarta componente delle (3.5) e la (3.6)), con le sostituzioni sopra illustrate si rivelano fra loro compatibili, cosicché la seconda delle due (di primo grado) completa la riduzione del sistema, restano da operare alcune trasformazioni analitiche concernenti le tre equazioni residue riferite alla Zona I:

Quaderno 16

Le due equazioni geodetiche residue e la normalizzazione di U in Zona I :

`In[38] := Eq[3] =`

$$\frac{Ky^2 \operatorname{Sec}[z[\tau]]^2 \operatorname{Tan}[z[\tau]]}{(1 + \sigma \operatorname{Sin}[t[\tau]])^4} + \frac{2 \sigma \operatorname{Cos}[t[\tau]] t'[\tau] z'[\tau]}{1 + \sigma \operatorname{Sin}[t[\tau]]} + z''[\tau] == 0;$$

`In[39] := Eq[4] =`

$$\left(\sigma \operatorname{Cos}[t[\tau]] \left(\frac{Ky^2 \operatorname{Sec}[z[\tau]]^2}{1 + \sigma \operatorname{Sin}[t[\tau]]} - \frac{(Kx + Kx \sigma \operatorname{Sin}[t[\tau]])^2}{(-1 + \sigma \operatorname{Sin}[t[\tau]])^2} + (1 + \sigma \operatorname{Sin}[t[\tau]])^3 t'[\tau]^2 + (1 + \sigma \operatorname{Sin}[t[\tau]])^3 z'[\tau]^2 \right) \right) / (1 + \sigma \operatorname{Sin}[t[\tau]])^4 + t''[\tau] == 0;$$

In[40] := **Eq[5]** =

$$(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]])$$

$$\left(\frac{\mathbf{Kx}^2}{1 - \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]]} + (1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]]) \left(\frac{\mathbf{Ky}^2 \text{Sec}[\mathbf{z}[\tau]]^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]])^4} - \mathbf{t}'[\tau]^2 + \mathbf{z}'[\tau]^2 \right) \right) == -1$$

Come precedentemente ricavato, si ha :

In[41] := $\mathbf{z}[\tau_-] = \text{ArcTan} \left[\frac{\mathbf{Kz2} \text{Cos}[\mathbf{y}[\tau]] + \mathbf{Kz1} \text{Sin}[\mathbf{y}[\tau]]}{\mathbf{Ky}} \right];$

Con questa sostituzione, la prima equazione si riduce ad un'identità :

In[42] := **Simplify**[(**Eq[3]** /. $\mathbf{y}''[\tau] \rightarrow \mathbf{Uy}'[\tau]$) /.
 $\mathbf{y}'[\tau] \rightarrow \mathbf{Uy}[\tau]$]

Out[42]= True

Questa prescrizione sostituisce le potenze di σ secondo la regola

$$\sigma^n \rightarrow \begin{cases} \sigma & \text{se } n \text{ è dispari} \\ +1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

In[43] := $\sigma / : \sigma^n := \text{If}[\text{EvenQ}[n], 1, \sigma] /; \text{IntegerQ}[n]$

Le ultime due equazioni sono poco leggibili, a prima vista :

In[44] := **e1** = **Simplify**[(**Eq[4]** /. $\mathbf{y}''[\tau] \rightarrow \mathbf{Uy}'[\tau]$) /.
 $\mathbf{y}'[\tau] \rightarrow \mathbf{Uy}[\tau]$]

Out[44]= $\mathbf{t}''[\tau] ==$

$$(\sigma \text{Cos}[\mathbf{t}[\tau]] (10 \mathbf{Kx}^2 - 6 \mathbf{Ky}^2 - 6 \mathbf{Kz1}^2 - 6 \mathbf{Kz2}^2 +$$

$$2 (-3 \mathbf{Kx}^2 + \mathbf{Ky}^2 + \mathbf{Kz1}^2 + \mathbf{Kz2}^2) \text{Cos}[2 \mathbf{t}[\tau]] +$$

$$15 \mathbf{Kx}^2 \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]] + 8 \mathbf{Ky}^2 \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]] +$$

$$8 \mathbf{Kz1}^2 \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]] + 8 \mathbf{Kz2}^2 \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]] -$$

$$\mathbf{Kx}^2 \sigma \text{Sin}[3 \mathbf{t}[\tau]] + 2 \text{Cos}[\mathbf{t}[\tau]]^4 (-3 +$$

$$\text{Cos}[2 \mathbf{t}[\tau]] - 4 \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]]) \mathbf{t}'[\tau]^2)) /$$

$$(4 (-1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]])^2 (1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{t}[\tau]])^5)$$

In[45] := **e2** = **Simplify**[(**Eq[5]** /. $\mathbf{y}''[\tau] \rightarrow \mathbf{Uy}'[\tau]$) /.
 $\mathbf{y}'[\tau] \rightarrow \mathbf{Uy}[\tau]$]

$$\begin{aligned} \text{Out [45]} = & (-10 Kx^2 - 4 Ky^2 - 4 Kz1^2 - 4 Kz2^2 + \\ & 6 Kx^2 \text{Cos}[2 t[\tau]] - 15 Kx^2 \sigma \text{Sin}[t[\tau]] + \\ & 4 Ky^2 \sigma \text{Sin}[t[\tau]] + 4 Kz1^2 \sigma \text{Sin}[t[\tau]] + \\ & 4 Kz2^2 \sigma \text{Sin}[t[\tau]] + Kx^2 \sigma \text{Sin}[3 t[\tau]] - \\ & \text{Cos}[t[\tau]]^2 (-10 + 6 \text{Cos}[2 t[\tau]] - \\ & 15 \sigma \text{Sin}[t[\tau]] + \sigma \text{Sin}[3 t[\tau]]) t'[\tau]^2) / \\ & (4 (-1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]]) (1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]])^2) == -1 \end{aligned}$$

Tuttavia esse si riducono a :

$$\begin{aligned} \text{In[46]} := \mathbf{Eq[6]} = \\ t''[\tau] == & \frac{1}{4} \sigma \text{Cos}[t[\tau]] \\ & \left(- \frac{4 (Ky^2 + Kz1^2 + Kz2^2)}{(1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]])^5} + \frac{4 Kx^2}{(1 - \text{Sin}[t[\tau]]^2)^2} - \right. \\ & \left. \frac{4 t'[\tau]^2}{1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]]} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In[47]} := \mathbf{Eq[7]} = \\ t'[\tau]^2 == & \frac{Kx^2}{\text{Cos}[t[\tau]]^2} + \\ & \frac{Ky^2 + Kz1^2 + Kz2^2 + (1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]])^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[t[\tau]])^4}; \end{aligned}$$

Dimostrazione (per entrambi i valori possibili di σ):

$$\begin{aligned} \text{In[48]} := \mathbf{Simplify[} \\ & ((\mathbf{First[e1]} - \mathbf{Last[e1]})) - \\ & (\mathbf{First[Eq[6]]} - \mathbf{Last[Eq[6]]}) / .\sigma \rightarrow 1] \\ \\ \mathbf{Simplify[} \\ & ((\mathbf{First[e1]} - \mathbf{Last[e1]})) - \\ & (\mathbf{First[Eq[7]]} - \mathbf{Last[Eq[7]]}) / .\sigma \rightarrow -1] \end{aligned}$$

$$\text{Out [48]} = 0$$

$$\text{Out [48]} = 0$$

```
In[49]:= Simplify[
  ((First[e2] - Last[e2]) -
   (First[Eq[2]] - Last[Eq[2]]))
  (1/2 (-3 + Cos[2 t[τ]] - 4 σ Sin[t[τ]])) /.
  σ → 1]

Simplify[
  ((First[e2] - Last[e2]) -
   (First[Eq[2]] - Last[Eq[2]]))
  (1/2 (-3 + Cos[2 t[τ]] - 4 σ Sin[t[τ]])) /.
  σ → -1]
```

Out[49]= 0

Out[49]= 0

Tali equazioni sono fra loro compatibili, come è mostrato dalla seguente verifica, in cui la seconda viene derivata in τ e al risultato è sottratta la prima, moltiplicata per $2t'(\tau)$ ed in cui la quantità $t'(\tau)^2$ è riespressa tramite la stessa seconda equazione :

```
In[50]:= Simplify[
  D[Last[Eq[2]] - 2 t'[τ] Last[Eq[1]], τ] /.
  t'[τ]^2 → Last[Eq[2]]]
```

Out[50]= 0

L'ultimo passo da compiere prima di ottenere in entrambe le regioni di interesse un sistema di quattro equazioni di primo grado nelle coordinate, che abbia la caratteristica di ammettere un sottosistema autonomo in (u, v) suscettibile di analisi numerica delle soluzioni e conseguente rappresentazione grafica delle linee geodetiche, è, in zona d'interazione, la sostituzione dell'espressione esplicita di $z(\tau)$ in funzione della coordinata $y(\tau)$ con un'equazione del tipo $z' = z'(z(\tau), t(\tau))$.

Ciò è possibile in pochi passaggi a partire dall'espressione stessa di $z(\tau)$:

Quaderno 17

Derivando l'espressione esplicita di z e sostituendo y' :

In[51] := **zp = FullSimplify**[
 $\partial_{\tau} \mathbf{z}[\tau] / \cdot \mathbf{y}'[\tau] \rightarrow \text{Last}[\mathbf{Eq}[2]]]$

Out[51] = $\frac{Kz1 \cos[y[\tau]] - Kz2 \sin[y[\tau]]}{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2}$

Rimuovendo, quindi, l'assegnazione funzionale della stessa z , in modo da poterla usare come variabile indipendente :

In[52] := **z**[τ _] = . ;

si può scrivere il seguente sistema :

In[53] := **syst** = { $\mathbf{z}'[\tau] == \frac{Kz1 \cos[y[\tau]] - Kz2 \sin[y[\tau]]}{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2}$,
 $\mathbf{z}[\tau] ==$
 $\text{ArcTan} \left[\frac{Kz2 \cos[y[\tau]] + Kz1 \sin[y[\tau]]}{Ky} \right] \}$ };

da cui le funzioni goniometriche di $y(\tau)$ possono essere espresse come :

In[54] := **sc = FullSimplify**[
 $\text{Solve}[\mathbf{syst}, \{\cos[y[\tau]], \sin[y[\tau]]\}]$]

Out[54] = { { $\cos[y[\tau]] \rightarrow \frac{1}{Kz1^2 + Kz2^2} (Ky Kz2 \tan[z[\tau]] + Kz1 (1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2 z'[\tau])$,
 $\sin[y[\tau]] \rightarrow \frac{1}{Kz1^2 + Kz2^2} (Ky Kz1 \tan[z[\tau]] - Kz2 (1 + \sigma \sin[t[\tau]])^2 z'[\tau])$ } }

Ora, dal momento che $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$:

In[55] := **goniom** =
 $\text{FullSimplify}[\text{Last}[\mathbf{sc}[[1,1]]]^2 +$
 $\text{Last}[\mathbf{sc}[[1,2]]]^2] == 1$

Out[55] = $\frac{Ky^2 \tan[z[\tau]]^2 + (1 + \sigma \sin[t[\tau]])^4 z'[\tau]^2}{Kz1^2 + Kz2^2} == 1$

Cosicché otteniamo per $z'(\tau)$ le soluzioni :

In[56] := **FullSimplify**[$\text{Solve}[\mathbf{goniom}, \mathbf{z}'[\tau]]$]

Out[56] = { { $z'[\tau] \rightarrow -\frac{\sqrt{1 - \frac{Ky^2 \tan[z[\tau]]^2}{Kz1^2 + Kz2^2}}}{\sqrt{\frac{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^4}{Kz1^2 + Kz2^2}}}$,
 $z'[\tau] \rightarrow \frac{\sqrt{1 - \frac{Ky^2 \tan[z[\tau]]^2}{Kz1^2 + Kz2^2}}}{\sqrt{\frac{(1 + \sigma \sin[t[\tau]])^4}{Kz1^2 + Kz2^2}}}$ } }

Dal momento che il moto relativo può suporsi non regressivo, possiamo scegliere la seconda soluzione, che si riscrive :

$$z'(\tau) = \sqrt{K_{z1}^2 + K_{z2}^2 - K_y^2 \tan^2 z(\tau)} / [1 + \sigma \sin t(\tau)]^2$$

Si nota, infine, che, per le modalità con cui i momenti non traslazionali appaiono nelle espressioni ottenute, si può lecitamente porre :

$$K_{z1}^2 + K_{z2}^2 = K_z^2$$

Riepilogando, i sistemi di primo grado rappresentativi del moto geodetico in zona di onda singola “u” ed in zona di collisione sono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \frac{du(\tau)}{d\tau} &= -\frac{K_v}{2} \frac{1}{[1 + \sigma \sin u(\tau)]^2} \\ \frac{dv(\tau)}{d\tau} &= -\frac{1}{2K_v} \left[1 + K_x^2 \frac{1 + \sigma \sin u(\tau)}{1 - \sigma \sin u(\tau)} + K_y^2 \frac{1}{\cos^2 u(\tau) [1 + \sigma \sin u(\tau)]^2} \right] \\ \frac{dx(\tau)}{d\tau} &= K_x \frac{1 + \sigma \sin u(\tau)}{1 - \sigma \sin(\tau)} \\ \frac{dy(\tau)}{d\tau} &= K_y \frac{1}{\cos^2 u(\tau) [1 + \sigma \sin u(\tau)]^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt(\tau)}{d\tau} &= \sqrt{\frac{K_x^2}{\cos^2 t(\tau)} + \frac{K_y^2 + K_z^2 + [1 + \sigma \sin t(\tau)]^2}{[1 + \sigma \sin t(\tau)]^4}} \\ \frac{dz(\tau)}{d\tau} &= \frac{\sqrt{K_z^2 - K_y^2 \tan^2 z(\tau)}}{(1 + \sigma \sin t(\tau))^2} \\ \frac{dx(\tau)}{d\tau} &= K_x \frac{1 + \sigma \sin t(\tau)}{1 - \sigma \sin(\tau)} \\ \frac{dy(\tau)}{d\tau} &= K_y \frac{1}{\cos^2 z(\tau) (1 + \sigma \sin t(\tau))^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Naturalmente, il sistema competente la zona di collisione si riscrive in maniera immediata una volta che sia operata la trasformazione di coordinate (3.2), cosa che si rende, chiaramente, necessaria nel momento in cui si desidera rappresentare graficamente il moto geodetico nella sezione (u, v), oggetto del prossimo paragrafo.

Prima di procedere all'analisi numerica ed al conseguente tracciamento delle geodetiche, però, vanno rimarcate alcune immediate conseguenze delle (3.15) riguardanti il comportamento della componente lungo z della velocità della particella-test, dz/dt , ottenibile dividendo membro a membro la seconda equazione per la prima, nel limite $t \rightarrow \pi/2$:

1. nel caso della metrica con orizzonte ($\sigma = 1$) si ha, quando il momento coniugato alla coordinata x , K_x , è diverso da zero:

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t \rightarrow \pi/2} = 0 ; \quad (3.16)$$

2. quando, invece, $K_x \neq 0$, si ha

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t \rightarrow \pi/2} = \sqrt{\frac{K_z^2 - K_y^2 \tan^2 z}{4 + K_y^2 + K_z^2}} ; \quad (3.17)$$

3. nel caso della metrica con singolarità ($\sigma = -1$), si ha sempre

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t \rightarrow \pi/2} = \sqrt{\frac{K_z^2 - K_y^2 \tan^2 z}{K_y^2 + K_z^2}} . \quad (3.18)$$

Nel caso di metrica con singolarità, in effetti, è il parametro K_y a determinare qualitativamente il moto geodetico. Infatti, quando questo è nullo le traiettorie geodetiche risultano divise in due classi, formate rispettivamente da quelle che incontrano la frontiera fra le due diverse zone di spazio-tempo al di sotto di un certo valore u^* di soglia (contrassegnate, a mo' di esempio, nella Fig. 3.2 con la dicitura "Tipo I"), e che penetrano in zona d'interazione raggiungendo la singolarità con $dz/dt = 1$ (cioè con velocità c), e le altre (dette di "Tipo II"), che non vi penetrano. È possibile stabilire una relazione analitica tra questo valore di soglia della coordinata u e il corrispondente valore del momento traslazionale K_y , correlato alla componente lungo u della 4-velocità di ingresso della particella-test in zona di onda singola, proveniente dallo spazio piatto. Tale relazione è:

$$K_y^{\text{thr}} = (\sin u^* - 1) \sqrt{1 + K_x^2 \frac{1 - \sin u^*}{1 + \sin u^*}} . \quad (3.19)$$

Come riflesso puramente analitico dell'analisi numerica eseguita su (3.15, 3.14), si può procedere al calcolo dei tempi propri di percorrenza delle traiettorie geodetiche per un

insieme ristretto di valori dei momenti traslazionali sul fronte d'onda, K_x, K_y , nel caso in cui l'ingresso in regione di onda singola della particella-test avvenga in corrispondenza del punto $(u, v) = (0, -\pi/2)$ con $U^z = 0$ (in quiete lungo la direzione di propagazione delle onde), il che equivale a porre $K_v = -\sqrt{1 + K_x^2 + K_y^2}$; si evidenzia come:

- nel caso di metrica con orizzonte, valori crescenti dei momenti inducono tempi propri di percorrenza minori;
- nel caso di metrica con singolarità, tutte le geodetiche che penetrano in Regione I la raggiungono in tempi propri estremamente ridotti rispetto a quelli caratteristici dell'attraversamento della regione di onda singola.

Quaderno 18

Le due coppie di equazioni geodetiche rappresentative delle componenti lungo u e lungo v della 4-velocità della particella-test, relative, nell'ordine, alla Regione II ed alla Regione I, sono assegnate attribuendo loro una dipendenza funzionale dai momenti caratteristici delle rispettive zone, ovvero K_v e K_z :

$$In[1] := \mathbf{Eq1}[\mathbf{Kv}_-] = \mathbf{u}'[\tau] == \frac{-\mathbf{Kv}}{2(1 + \sigma \mathbf{Sin}[\mathbf{u}[\tau]])^2};$$

$$In[2] := \mathbf{Eq2}[\mathbf{Kv}_-] =$$

$$\mathbf{v}'[\tau] ==$$

$$\frac{-1}{2 \mathbf{Kv}}$$

$$\left(\mathbf{1} + \mathbf{Kx}^2 \frac{\mathbf{1} + \sigma \mathbf{Sin}[\mathbf{u}[\tau]]}{\mathbf{1} - \sigma \mathbf{Sin}[\mathbf{u}[\tau]]} + \right.$$

$$\left. \mathbf{Ky}^2 \frac{\mathbf{Sec}[\mathbf{u}[\tau]]^2}{(\mathbf{1} + \sigma \mathbf{Sin}[\mathbf{u}[\tau]])^2} \right);$$

$$In[3] := \mathbf{Eq3}[\mathbf{Kz}_-] =$$

$$\mathbf{u}'[\tau] ==$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{\left(\frac{\mathbf{Kx}^2}{\mathbf{1} - \sigma^2 \mathbf{Sin}[\mathbf{u}[\tau] + \mathbf{v}[\tau]]^2} + \frac{\mathbf{Ky}^2 + \mathbf{Kz}^2 + (\mathbf{1} + \sigma \mathbf{Sin}[\mathbf{u}[\tau] + \mathbf{v}[\tau]])^2}{(\mathbf{1} + \sigma \mathbf{Sin}[\mathbf{u}[\tau] + \mathbf{v}[\tau]])^4} \right)} - \frac{\sqrt{\mathbf{Kz}^2 - \mathbf{Ky}^2 \mathbf{Tan}[\mathbf{u}[\tau] - \mathbf{v}[\tau]]^2}}{(\mathbf{1} + \sigma \mathbf{Sin}[\mathbf{u}[\tau] + \mathbf{v}[\tau]])^2} \right);$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[4] := & \text{Eq4}[\mathbf{Kz}_-] = \\
 & \mathbf{v}'[\tau] == \\
 & \frac{1}{2} \\
 & \left(\sqrt{\left(\frac{\mathbf{Kx}^2}{1 - \sigma^2 \text{Sin}[\mathbf{u}[\tau] + \mathbf{v}[\tau]]^2} + \frac{\mathbf{Ky}^2 + \mathbf{Kz}^2 + (1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}[\tau] + \mathbf{v}[\tau]])^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}[\tau] + \mathbf{v}[\tau]])^4} \right) + \frac{\sqrt{\mathbf{Kz}^2 - \mathbf{Ky}^2 \text{Tan}[\mathbf{u}[\tau] - \mathbf{v}[\tau]]^2}}{(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}[\tau] + \mathbf{v}[\tau]])^2} \right);
 \end{aligned}$$

Questa semplice routine sostituisce FindRoot di Mathematica che non opera correttamente nei pressi della linea $u+v=\pi/2$. Naturalmente, risulta valida solo laddove $v(\tau)$ sia monotona crescente :

$$\begin{aligned}
 \text{In}[5] := & \text{RootCalc}[\mathbf{h}_-, \mathbf{d}_-, \mathbf{e}_-] := \\
 & (\mathbf{a} = \mathbf{d}; \mathbf{b} = \mathbf{e}; \text{Do}[\mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) / 2; \\
 & \quad \text{If}[\text{Re}[\mathbf{h}[\mathbf{c}]] > 0, \mathbf{b} = \mathbf{c}, \mathbf{a} = \mathbf{c}], \{50\}); \\
 & \text{Return}[\mathbf{c}]
 \end{aligned}$$

Si rileveranno i valori di τ con, al più, cinque cifre significative :

$$\text{In}[6] := \text{Approxim}[\mathbf{x}_-] := \text{N}[\text{Round}[\mathbf{x} * 10^4] / 10^4];$$

È necessario disporre delle espressioni funzionali di du/dv per entrambe le regioni; in zona II è assegnata una dipendenza funzionale da K_v :

$$\begin{aligned}
 \text{In}[7] := & \text{dudv2}[\mathbf{u}_-, \mathbf{Kv}_-] = \\
 & \mathbf{Kv}^2 / \\
 & \left((1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])^2 \left(1 + \frac{\mathbf{Ky}^2 \text{Sec}[\mathbf{u}]^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])^2} + \frac{\mathbf{Kx}^2 (1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])}{1 - \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}]} \right) \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{In}[8] := & \text{dudv1}[\mathbf{u}_-] = \\
 & \left(\sqrt{\frac{\mathbf{Kx}^2}{1 - \sigma^2 \text{Sin}[\mathbf{u}]^2} + \frac{\mathbf{Ky}^2 + \mathbf{Kz}^2 + (1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])^4}} - \frac{\sqrt{\mathbf{Kz}^2 - \mathbf{Ky}^2 \text{Tan}[\mathbf{u}]^2}}{(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])^2} \right) / \\
 & \left(\sqrt{\frac{\mathbf{Kx}^2}{1 - \sigma^2 \text{Sin}[\mathbf{u}]^2} + \frac{\mathbf{Ky}^2 + \mathbf{Kz}^2 + (1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])^4}} + \frac{\sqrt{\mathbf{Kz}^2 - \mathbf{Ky}^2 \text{Tan}[\mathbf{u}]^2}}{(1 + \sigma \text{Sin}[\mathbf{u}])^2} \right);
 \end{aligned}$$

Questa è la routine di calcolo :

```
In[9]:= proptim[Kx_,Ky_] := (
  Kv = - $\sqrt{1 + Kx^2 + Ky^2}$ ;
  NumSol2 =
  Flatten[
    NDSolve[{Eq1[Kv],Eq2[Kv],u[0] == 0,
      v[0] == - $\pi/2$ },{u,v},{ $\tau$ ,0,20}]];
  TauExtrLimit2 =
  NumSol2[[1,2]][[1,1,2]];
  j[ $\theta$ ] := Evaluate[v[ $\theta$ ]/.NumSol2];
  TauLimit2 = RootCalc[j,0,TauExtrLimit2];
  f[ $\theta$ ] := Evaluate[u[ $\theta$ ]/.NumSol2];
  uLimit2 = f[TauLimit2];
  Slope2 = dudv2[uLimit2,Kv];
  CondKz =
  Solve[dudv1[uLimit2] == Slope2,Kz][[
    2,1,2]];
  NumSol1 =
  Flatten[
    NDSolve[{Eq3[CondKz],Eq4[CondKz],
      u[0] == uLimit2,v[0] == 0},{u,v},
      { $\tau$ ,0,5}]];
  TauExtrLimit1 =
  NumSol1[[1,2]][[1,1,2]];
  g[ $\theta$ ] :=
  Evaluate[(u[ $\theta$ ]/.NumSol1) +
    (v[ $\theta$ ]/.NumSol1) -  $\pi/2$ ];
  TauLimit1 = RootCalc[g,0,TauExtrLimit1];
  {Kx,Ky,Kv,Approxim[TauLimit2],
    Approxim[TauLimit1],
    Approxim[TauLimit1 + TauLimit2]}
)
```

Valori dei tempi propri di percorrenza delle geodetiche nel caso di metrica con orizzonte

```
In[10]:=  $\sigma = 1$ ;
```



```
In[11] := Flatten[Table[proptim[Kx, Ky], {Kx, 0, 3},
                        {Ky, 0, 3}], 1]//TableForm
Out[11]=
0 0 -1      3.1416  1.2975  4.4391
0 1 -√2     2.6492  0.8703  3.5195
0 2 -√5     1.8565  0.4883  2.3448
0 3 -√10    1.3545  0.3256  1.6801
1 0 -√2     1.414   0.3585  1.7725
1 1 -√3     1.3447  0.3129  1.6576
1 2 -√6     1.1846  0.2406  1.4251
1 3 -√11    1.0124  0.1874  1.1998
2 0 -√5     0.7874  0.2026  0.99
2 1 -√6     0.773   0.192   0.965
2 2 -3      0.7348  0.1686  0.9034
2 3 -√14    0.6835  0.1442  0.8278
3 0 -√10    0.5378  0.1391  0.6769
3 1 -√11    0.533   0.1354  0.6684
3 2 -√14    0.5194  0.126   0.6454
3 3 -√19    0.4993  0.1142  0.6135
```

Valori dei tempi propri di percorrenza delle geodetiche nel caso di metrica con singolarità

```
In[12] :=  $\sigma = -1;$ 
```

```
In[13] := Flatten[Table[proptim[Kx, Ky], {Kx, 0, 3},
                        {Ky, 0, 3}], 1]//TableForm
Out[13]=
0 0 -1      0.7124  0.      0.7124
0 1 -√2     0.5034  0.0001  0.5034
0 2 -√5     0.3174  0.0003  0.3176
0 3 -√10    0.224   0.0003  0.2243
1 0 -√2     0.5037  0.      0.5037
1 1 -√3     0.4112  0.      0.4112
1 2 -√6     0.2903  0.0001  0.2904
1 3 -√11    0.2139  0.0002  0.2141
2 0 -√5     0.3186  0.      0.3186
2 1 -√6     0.2908  0.      0.2908
2 2 -3      0.2374  0.      0.2374
2 3 -√14    0.1901  0.0001  0.1901
3 0 -√10    0.2253  0.      0.2253
3 1 -√11    0.2148  0.      0.2148
3 2 -√14    0.1904  0.      0.1904
3 3 -√19    0.1634  0.      0.1634
```

Ordine delle tabulazioni: col.1: K_x , col.2: K_y , col.3: K_v , col.4: intervallo di tempo proprio in Zona II, col.5: intervallo di tempo proprio in Zona I, col.6: intervallo totale.

3.3.3 Esiti grafici

Vengono rappresentate in ognuno dei grafici alcune traiettorie geodetiche corrispondenti a valori fissati di σ , K_x , K_y e differenziate secondo valori diversi di K_v .

Come per il calcolo dei tempi propri di percorrenza, si è supposto che l'ingresso della particella-test in Regione II avvenga nel punto $(u, v) = (0, -\pi/2)$. Questa scelta, di fatto, non comporta una perdita di generalità dell'analisi, in quanto arretrare od avanzare l'ingresso rispetto alla frontiera con la regione d'interazione non introduce in nessun caso cambiamenti qualitativi nelle traiettorie percorse.

Quaderno 19

In entrambe le regioni, le equazioni per $du/d\tau$, $dv/d\tau$ si intendono divise membro a membro, in modo da ottenere le espressioni di du/dv :

$$\begin{aligned} In[1] := Z2[v_-] := & Kx^2 / \\ & \left((1 + \sigma \text{Sin}[u[v]])^2 \right. \\ & \left. \left(Kx^2 \frac{1 + \sigma \text{Sin}[u[v]]}{1 - \sigma \text{Sin}[u[v]]} + \right. \right. \\ & \left. \left. Ky^2 \frac{\text{Sec}[u[v]]^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[u[v]])^2} + 1 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} In[2] := Z1[v_-] := & \\ & \left(\sqrt{\left(\frac{Kx^2}{1 - \text{Sin}[u[v] + v]} + \frac{Ky^2 + Kz^2 + (1 + \sigma \text{Sin}[u[v] + v])^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[u[v] + v])^4} \right) - \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{Kz^2 - Ky^2 \text{Tan}[u[v] - v]^2}}{(1 + \sigma \text{Sin}[u[v] + v])^2} \right) / \\ & \left(\sqrt{\left(\frac{Kx^2}{1 - \text{Sin}[u[v] + v]} + \frac{Ky^2 + Kz^2 + (1 + \sigma \text{Sin}[u[v] + v])^2}{(1 + \sigma \text{Sin}[u[v] + v])^4} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{Kz^2 - Ky^2 \text{Tan}[u[v] - v]^2}}{(1 + \sigma \text{Sin}[u[v] + v])^2} \right) \end{aligned}$$

Creazione di una funzione i cui valori sono i limiti di Z1 for $v \rightarrow 0$ per ogni $0 < u < \pi/2$, atta al calcolo delle junction conditions :

`In[3] := Fr[u_] = (Z1[v]/.u[v] -> u)/.v -> 0;`

La routine principale, che dipende da tutti i parametri liberi del problema (la natura della linea critica $t=\pi/2$ con $\sigma \in \{-1, 1\}$, i momenti sul fronte d'onda K_x e K_y (reali), i valori scelti per $K_v \in (-\infty, 0)$ -legati alla velocità iniziale lungo z della particella-, il numero di tali valori, Num); vengono calcolate le soluzioni numeriche del sistema $\{(u'=Z2) \cup (u'=Z1)\}$ dando a K_z il valore (calcolato da $CondKz$) che rende le geodetiche C^1 in $v=0$; Lim è calcolato per tracciare le geodetiche non oltre $t=\pi/2$, rappresentato dalla funzione $Hor(v)$.

```
In[4] := NumericCalculation[σ-, Kx-, Ky-, KvRange-, Num_] :=
  {f2[v_] :=
    Evaluate[
      u[v]/.
      Table[NDSolve[
        {u'[v] == Z2[v]/.Kv -> KvRange[[n]],
          u[-π/2] == 0}, u[v], {v, -π/2, 0}],
        {n, Num}]]];
  CondKz =
    Table[
      Solve[Fr[f2[0]][[n, 1]] ==
        f2'[0][[n, 1]], Kz][[2, 1, 2]],
      {n, Num}];
  f1[v_] :=
    Evaluate[
      u[v]/.
      Table[NDSolve[
        {u'[v] == Z1[v]/.Kz -> CondKz[[n]],
          u[0] == f2[0][[n, 1]]}, u[v],
        {v, 0, π/2}], {n, Num}]]];
  Hor[v_] = Table[v + f1[v][[n, 1]] - π/2,
    {n, Num}];
  Lim = Flatten[Table[h[w_] = Hor[w][[n]];
    RootCalc[h, 0, 1.6], {n, Num}]]}
```

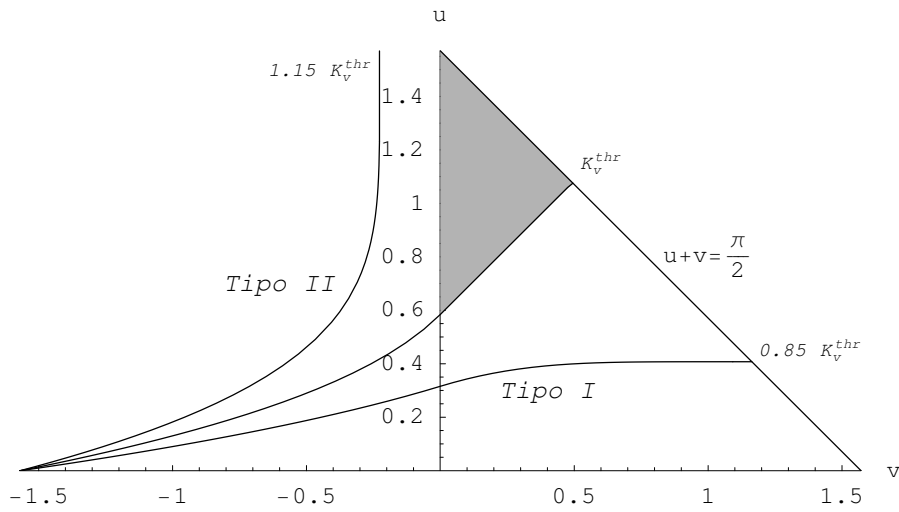


Figura 3.2. Per $\sigma = -1$ (metrica con singolarità) e $(K_x = 0, K_y = 0)$, il valore critico iniziale di K_v definito nel testo è $K_v^{thr} = -0.447645$. Quella rappresentata in grigio è la *regione proibita* all'ingresso delle geodetiche.

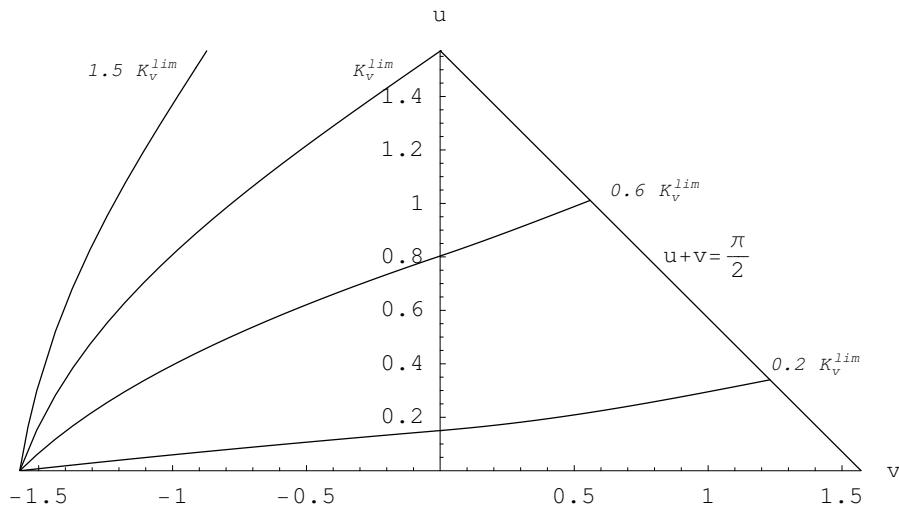


Figura 3.3. Per $\sigma = 1$ (metrica con orizzonte) e $(K_x = 0, K_y = 0)$, le geodetiche riempiono l'intera Regione I, appartenendo ad un set di dati iniziali caratterizzati da un valore di limite per K_v pari a -1.6653 al di sotto del quale le particelle hanno sufficiente velocità lungo z (controversa a quella del fronte d'onda singola) per sfuggire alla regione di collisione.

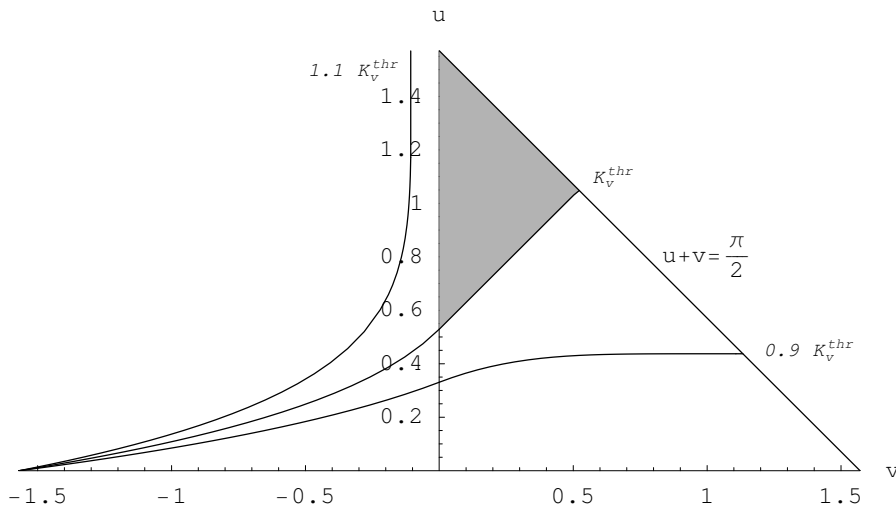


Figura 3.4. Per $\sigma = -1$ e ($K_x = 1, K_y = 0$), le geodetiche si presentano analoghe al caso $K_x = 0$, con, ora, $K_v^{\text{thr}} = -0.569647$; aumentando il valore di K_x la geodetica critica si “abbassa” in Regione II (ossia, si ha un allargamento della zona proibita).

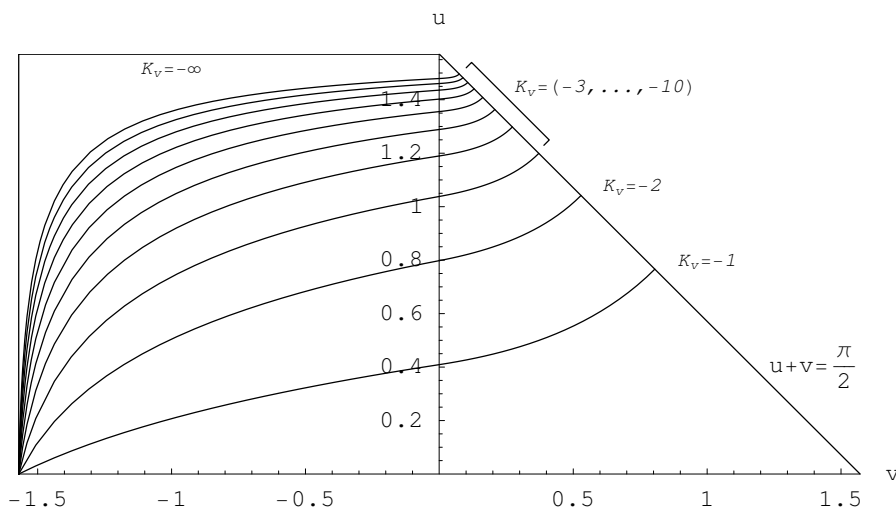


Figura 3.5. Per $\sigma = 1$ e ($K_x = 1, K_y = 0$), il moto geodetico è globalmente omogeneo per ogni K_v (succede ogniqualvolta $K_x \neq 0$). Come ci si aspetta, in Regione II le particelle sono accelerate (nel senso dell’accelerazione relativa d^2z/dt^2) verso le z positive, mentre in Regione I risultano decelerate fino a raggiungere velocità nulla esattamente sull’orizzonte. Il limite $K_v \rightarrow -\infty$ ricostituisce la cosiddetta *fold singularity* che si osserva nel caso delle geodetiche nulle (cfr. Dorca e Verdaguer [33])

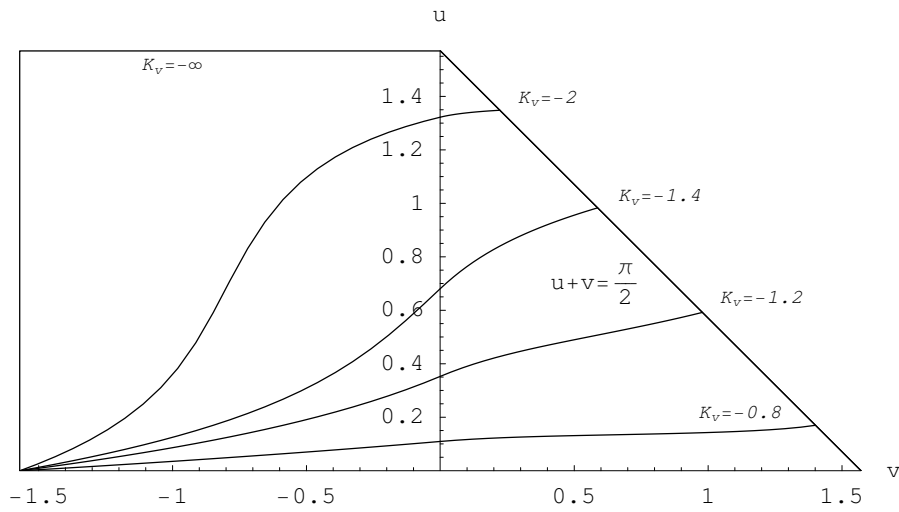


Figura 3.6. Il caso $\sigma = -1$ e ($K_x = 3, K_y = 1$) rappresenta tipicamente le geodetiche della metrica con singolarità per $K_y \neq 0$. La *fold singularity* compare a $K_v \rightarrow -\infty$ mentre le particelle accelerano bruscamente e il moto cambia il proprio verso rispetto a z in Regione II. Non ci sono zone proibite in Regione I.

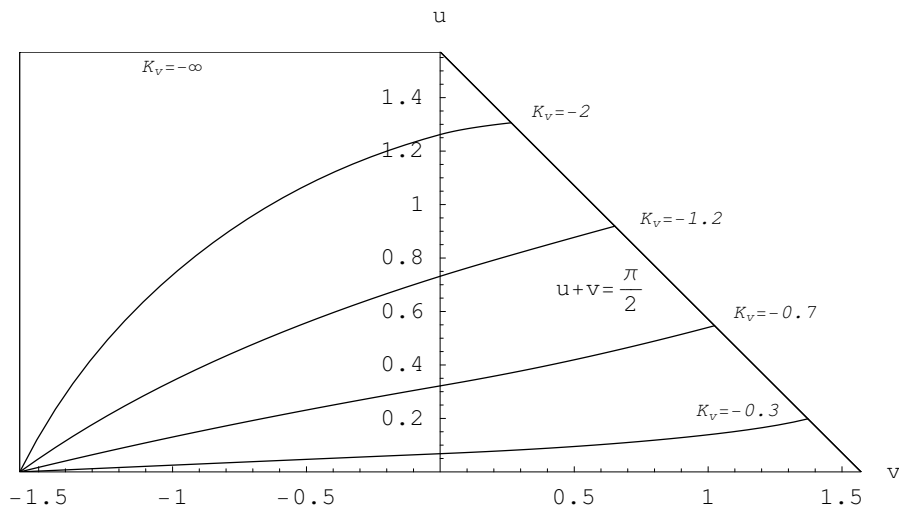


Figura 3.7. Per $\sigma = 1$ e ($K_x = 0, K_y = 1$) (caso tipico con $K_x = 0$), il moto in Regione II è omogeneo ed ogni scelta di K_v corrisponde all'ingresso in Regione I (si ha ancora la *fold singularity*) con pochi cambiamenti in Regione I, dove le particelle accelerano per alti valori d'ingresso di dz/dt e decelerano altrimenti.

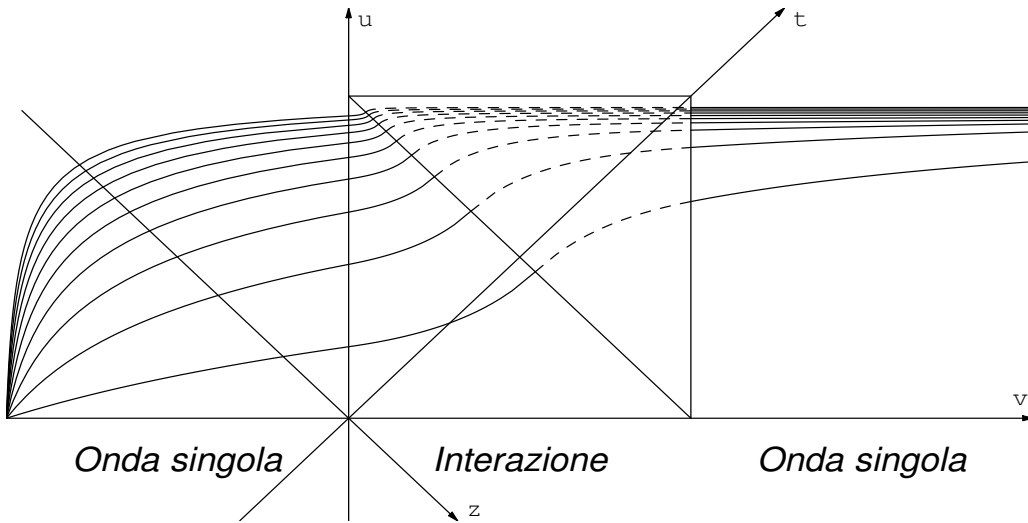


Figura 3.8. In quest'ultimo grafico è possibile osservare la dimostrazione del fatto che l'orizzonte (con $\sigma = 1$) non ha, come per alcune metriche di BH, una reale valenza fisica (anche se rappresenta comunque una soglia ben individuata); infatti è possibile spingere formalmente l'analisi numerica (qui nel caso $(K_x, K_y) = (1, 1)$) anche al di là di esso, con risultati coerenti con quanto è lecito aspettarsi.

3.4 Campi di neutrino e collisioni di GW

Analizziamo, ora, il comportamento di un campo di Dirac a massa nulla (ad es. di neutrino nello Standard Model) nelle medesime condizioni di background del caso precedente, ossia nella doppia transizione tra una porzione di spazio di tipo minkowskiano e una regione di onda gravitazionale piana singola, e quindi tra quest'ultima e una regione dominata dall'interazione di due GW collidenti.

L'interesse metodologico di una trattazione di questo tipo risiede nell'implementazione del formalismo cosiddetto di *Newman-Penrose* (si vedano l'articolo originale degli autori [24], e, soprattutto, la classica opera di S. Chandrasekhar [27]), che permette di scrivere tramite procedure standard l'equazione di Dirac che governa il campo di neutrino.

Lo schema logico qui adottato per dedurre la forma estende, in realtà, il risultato a tutte le metriche di collisione di onde con polarizzazione parallela (e non solo a quelle di Ferrari-Ibañez), ossia soluzioni della forma:

$$ds^2 = 2 g_{12} dx_1 dx_2 - g_{33} (dx_3)^2 - g_{44} (dx_4)^2, \quad (3.20)$$

dove g_{12} , g_{33} , g_{44} sono funzioni reali delle coordinate nulle (x_1, x_2) .

Si introdurrà un riferimento nullo (una cosiddetta *tetrate* di Newman-Penrose) del tipo:

$$l = \partial_{x_2}, \quad n = 1/g_{12} \partial_{x_1}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \partial_{x_3} - i \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \partial_{x_4} \right]. \quad (3.21)$$

per il quale risulta conveniente introdurre la notazione:

$$\Xi = \sqrt{g_{12}/(2g_{33})}, \quad \Phi = \sqrt{g_{12}/(2g_{44})} \quad (3.22)$$

tramite la quale si può riscrivere la (3.20) come:

$$ds^2 = \frac{g_{12}}{2} \left[4 dx_1 dx_2 - \Xi^{-2} (dx_3)^2 - \Phi^{-2} (dx_4)^2 \right]. \quad (3.23)$$

3.4.1 Trattamento alla Newman-Penrose dell'equazione di Dirac generica

In questo formalismo, l'equazione di Dirac per campi a massa nulla di spin 1/2 si scrive:

$$\begin{aligned} (D + \epsilon - \rho) F_1 + (\delta^* + \pi - \alpha) F_2 &= 0, \\ (\delta + \beta - \tau) F_1 + (\Delta + \mu - \gamma) F_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

in cui tutte le quantità presenti seguono la notazione e le convenzioni di [27].

Risulterà, altresì, particolarmente conveniente trasformare le funzioni d'onda di spin, F_1 e F_2 , nel seguente modo:

$$\begin{aligned} F_1 &\rightarrow (g_{33} g_{44})^{-1/4} / \sqrt{g_{12}} H_1 = (-g)^{-1/4} H_1, \\ F_2 &\rightarrow (g_{33} g_{44})^{-1/4} H_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Anche nel caso della (3.20), la procedura di prolungamento analitico di Khan-Penrose dalla zona di collisione a quelle di onda singola risulta la più conveniente per un'esame del comportamento dei campi su tutto lo spazio-tempo; si potrà, dunque, procedere all'elaborazione della (3.24) adottando un medesimo schema procedurale per ognuna delle quattro regioni note.

Definizione ed espressione delle 21 quantità caratteristiche di N-P per la metrica collisionale generica

`In[1] := <<mathtens.m`

=====

Per questa prima parte dell'analisi non è necessario caricare alcun file di metrica, ci si limita a specificarne la dimensione :

`In[2] := Dimension = 4;`

Si attivano quattro grandezze vettoriali (la tetraide NP), le cui componenti sono fatte confluire in una matrice 4X4 :

`In[3] := DefineTensor[{l,n,m,mbar},{1,1}]`

`In[4] := ti := {l,n,m,mbar};`

Calcolo dei coefficienti di rotazione di Ricci indipendenti (12 "spin coefficients")

La definizione di questi oggetti si effettua a partire da $\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}^k e_{(a)k;i} e_{(b)}^i$ per determinati valori di a, b, c :

`In[5] := g[c_,a_,b_] :=
 MakeSum[
 ti[[c]][uk]AffineToMetric[
 CDtoOD[CD[Metricg[lk,ld]ti[[a]][ud],
 li]][ti[[b]][ui]]`

```

In[6] := kappa := Simplify[g[3,1,1]]
sigma := Simplify[g[3,1,3]]
lambda := Simplify[g[2,4,4]]
nu := Simplify[g[2,4,2]]
rho := Simplify[g[3,1,4]]
mu := Simplify[g[2,4,3]]
tau := Simplify[g[3,1,2]]
pi := Simplify[g[2,4,1]]
epsilon := Simplify[(g[2,1,1] + g[3,4,1])/2]
gamma := Simplify[(g[2,1,2] + g[3,4,2])/2]
alpha := Simplify[(g[2,1,4] + g[3,4,4])/2]
beta := Simplify[(g[2,1,3] + g[3,4,3])/2]

```

Operatori differenziali corrispondenti alla tetrade scelta

D :

$$In[7] := D1[f_] := \sum_{i=1}^4 l[i] \partial_{x[i]} f$$

Δ :

$$In[8] := Dn[f_] := \sum_{i=1}^4 n[i] \partial_{x[i]} f$$

δ :

$$In[9] := Dm[f_] := \sum_{i=1}^4 m[i] \partial_{x[i]} f$$

δ^* :

$$In[10] := Dmbar[f_] := \sum_{i=1}^4 mbar[i] \partial_{x[i]} f$$

Gli scalari di Weyl

$$\Psi_i = -C_{\alpha\beta\gamma\delta} \begin{pmatrix} * e_{(1)}^\alpha e_{(3)}^\beta e_{(1)}^\gamma e_{(3)}^\delta & i = 0 \\ * e_{(1)}^\alpha e_{(2)}^\beta e_{(1)}^\gamma e_{(3)}^\delta & i = 1 \\ * e_{(1)}^\alpha e_{(3)}^\beta e_{(4)}^\gamma e_{(2)}^\delta & i = 2 \\ * e_{(1)}^\alpha e_{(2)}^\beta e_{(4)}^\gamma e_{(2)}^\delta & i = 3 \\ * e_{(2)}^\alpha e_{(4)}^\beta e_{(2)}^\gamma e_{(4)}^\delta & i = 4 \end{pmatrix}$$

```

In[11] :=  $\Psi_0 :=$ 
  -Simplify[
    MakeSum[WeylC[la, lb, lc, ld]ti[[1]][ua]
      ti[[3]][ub]ti[[1]][uc]ti[[3]][ud]]]

 $\Psi_1 :=$ 
  -Simplify[
    MakeSum[WeylC[la, lb, lc, ld]ti[[1]][ua]
      ti[[2]][ub]ti[[1]][uc]ti[[3]][ud]]]

 $\Psi_2 :=$ 
  -Simplify[
    MakeSum[WeylC[la, lb, lc, ld]ti[[1]][ua]
      ti[[3]][ub]ti[[4]][uc]ti[[2]][ud]]]

In[12] :=  $\Psi_3 :=$ 
  -Simplify[
    MakeSum[WeylC[la, lb, lc, ld]ti[[1]][ua]
      ti[[2]][ub]ti[[4]][uc]ti[[2]][ud]]]

 $\Psi_4 :=$ 
  -Simplify[
    MakeSum[WeylC[la, lb, lc, ld]ti[[2]][ua]
      ti[[4]][ub]ti[[2]][uc]ti[[4]][ud]]]

```

Il calcolo dei coefficienti di spin e degli scalari di Weyl nella zona d'interazione della metrica generica, per cui $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x_1, x_2)$, effettuato tramite il programma esposto fornisce i seguenti risultati; per i coefficienti di spin:

$$\begin{aligned}
 \rho &= -\frac{1}{4} \partial_{x_2} \log(g_{33} g_{44}) \quad , \quad \sigma = -\frac{1}{4} \partial_{x_2} \log\left(\frac{g_{33}}{g_{44}}\right), \\
 \lambda &= -\frac{1}{4 g_{12}} \partial_{x_1} \log\left(\frac{g_{33}}{g_{44}}\right) \quad , \quad \mu = -\frac{1}{4 g_{12}} \partial_{x_1} \log(g_{33} g_{44}), \\
 \epsilon &= \frac{1}{2} \partial_{x_2} (\log g_{12}) \quad , \quad \alpha = \beta = \gamma = \kappa = \nu = \pi = \tau = 0, \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

per gli scalari di Weyl:

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 = D\sigma - 2\sigma(\rho + \epsilon) &= \frac{1}{8} \left[[\partial_{x_2} \log(g_{12} g_{33})]^2 - [\partial_{x_2} \log(g_{12} g_{44})]^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial_{x_2}^2 g_{33}}{g_{33}} - \frac{\partial_{x_2}^2 g_{44}}{g_{44}} \right) \right], \\
 \Psi_1 = -\delta\epsilon &= 0, \\
 \Psi_2 = \frac{D\mu - \Delta\epsilon + 2(\mu\epsilon - \lambda\sigma)}{3} &= \frac{1}{12 g_{12}} \left(2 \partial_{x_1} \log g_{12} \partial_{x_2} \log g_{12} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \partial_{x_1} \log(g_{33} g_{44}) \partial_{x_2} \log(g_{33} g_{44}) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{\partial_{x_1} \partial_{x_2} g_{12}}{g_{12}} + \frac{\partial_{x_1} \partial_{x_2} g_{33}}{g_{33}} + \frac{\partial_{x_1} \partial_{x_2} g_{44}}{g_{44}} \right), \\
 \Psi_3 &= 0, \\
 \Psi_4 = -\Delta\lambda - 2\lambda\mu &= \frac{1}{8 g_{12}^2} \left[[\partial_{x_1} \log(g_{12} g_{33})]^2 - [\partial_{x_1} \log(g_{12} g_{44})]^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial_{x_1}^2 g_{33}}{g_{33}} - \frac{\partial_{x_1}^2 g_{44}}{g_{44}} \right) \right]. \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Tali risultati sono immediatamente estendibili alle zone di onda singola progressiva ($g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x_1)$) e regressiva ($g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x_2)$) semplicemente rimuovendo la dipendenza delle componenti della metrica dalla coordinata nulla complementare. Le espressioni (ovviamente note) di tali grandezze nella regione minkowskiana competono al caso $g_{12} = 2, g_{33} = g_{44} = 1$.

Una volta notato che, essendo la metrica indipendente dalle coordinate del fronte d'onda (x_3, x_4) , è ragionevole cercare fin da subito soluzioni della (3.24) del tipo:

$$H_1 = e^{i(K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_1(x_1, x_2), \quad H_2 = e^{i(K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_2(x_1, x_2), \tag{3.28}$$

in cui K_3 e K_4 sono costanti reali (che, per il loro ruolo, si rivelano le equivalenti dei momenti coniugati traslazionali (K_x, K_y) visti nel paragrafo precedente).

Come si evidenzia dai risultati del prossimo quaderno, l'equazione di Dirac si scrive:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= (K_4 \Phi - i K_3 \Xi) h_2(x_1, x_2), \\
 \frac{\partial h_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= (-K_4 \Phi - i K_3 \Xi) h_1(x_1, x_2), \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Equazioni di Dirac in NP (S. Chandrasekhar [27] - cap. 10, par. 103, eqq. 108/1-2)

```
In[13] := EqDC1 :=
  Simplify[Dl[F1[x[1], x[2], x[3], x[4]]] +
    Dmbar[F2[x[1], x[2], x[3], x[4]]] +
    (epsilon - rho)F1[x[1], x[2], x[3], x[4]] +
    (pi - alpha)F2[x[1], x[2], x[3], x[4]]]
```

```
In[14] := EqDC2 :=
  Simplify[Dm[F1[x[1], x[2], x[3], x[4]]] +
    Dn[F2[x[1], x[2], x[3], x[4]]] +
    (beta - tau)F1[x[1], x[2], x[3], x[4]] +
    (mu - gamma)F2[x[1], x[2], x[3], x[4]]]
```

Si dichiarano le componenti covarianti della metrica

$$ds^2 = 2 g_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + g_{33}(x_1, x_2) dx_3^2 + g_{44}(x_1, x_2) dx_4^2$$

(il comando finale assegna i valori alle componenti controvarianti) :

```
In[15] := Metricg/ : Metricg[-1, -1] = 0;
  Metricg/ : Metricg[-2, -1] = g12[x[1], x[2]];
  Metricg/ : Metricg[-3, -1] = 0;
  Metricg/ : Metricg[-4, -1] = 0;
  Metricg/ : Metricg[-2, -2] = 0;
  Metricg/ : Metricg[-3, -2] = 0;
  Metricg/ : Metricg[-4, -2] = 0;
  Metricg/ : Metricg[-3, -3] = g33[x[1], x[2]];
  Metricg/ : Metricg[-4, -3] = 0;
  Metricg/ : Metricg[-4, -4] = g44[x[1], x[2]];
  Table[Metricg/ : Metricg[h, k] =
    Inverse[Table[Metricg[-i, -j], {i, 4},
      {j, 4}]] [[h, k], {h, 4}, {k, h, 4}];
```

Una volta dichiarata la tetrate nulla (3.21) :

```
In[16] := < Input soppresso >
```

si imposta il cambiamento delle funzioni d'onda di spin :

`In[17] := Pref1 := $\sqrt{\text{Metricg}[1,2]}$ $\sqrt[4]{\text{Metricg}[3,3]\text{Metricg}[4,4]}$`

`Pref2 := $\sqrt[4]{\text{Metricg}[3,3]\text{Metricg}[4,4]}$`

`In[18] := F1[x1_, x2_, x3_, x4_] :=
Pref1 ei (Kx3 x3 + Kx4 x4) h1[x1, x2];`

`F2[x1_, x2_, x3_, x4_] :=
Pref2 ei (Kx3 x3 + Kx4 x4) h2[x1, x2];`

Si eliminano le fasi nelle coordinate del fronte d'onda e si operano ulteriori semplificazioni :

`In[19] := Dirac1 :=`

`Collect [$\frac{\text{EqDC1}}{\text{Pref1 e}^{i (Kx3 x[3] + Kx4 x[4])}}$,
{h1(-,-)[x[1], x[2]], h2(-,-)[x[1], x[2]]},
h1[x[1], x[2]], h2[x[1], x[2]]},
Simplify] == 0;`

`Dirac2 :=`

`Collect [$\frac{\text{Pref2 EqDC2}}{\text{Pref1}^2 e^{i (Kx3 x[3] + Kx4 x[4])}}$,
{h1(-,-)[x[1], x[2]], h2(-,-)[x[1], x[2]]},
h1[x[1], x[2]], h2[x[1], x[2]]},
Simplify] == 0;`

Espressioni finali, dove sono presenti le grandezze Ξ, Φ :

`In[20] := Evaluate[{EqDC1, EqDC2}];`

`In[21] := (Apart[Dirac1[[1]])/.`

$$\left\{ \frac{\sqrt{-\frac{1}{g_{33}[x[1], x[2]]}}}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{g_{12}[x[1], x[2]]}}} \rightarrow -\Xi, \right. \\ \left. \frac{\sqrt{-\frac{1}{g_{44}[x[1], x[2]]}}}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{g_{12}[x[1], x[2]]}}} \rightarrow -\Phi \right\} == 0$$

`Out[21] = -i Kx3 Ξ h2[x[1], x[2]] +
Kx4 Φ h2[x[1], x[2]] + h1(0,1)[x[1], x[2]] == 0`

$$In[22] := \left(\text{Apart}[\text{Dirac2}[[1]]] / \right. \\ \left. \left\{ \frac{\sqrt{-\frac{1}{g_{33}[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2]]}}}}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{g_{12}[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2]]}}} \rightarrow -\Xi, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\sqrt{-\frac{1}{g_{44}[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2]]}}}}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{g_{12}[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2]]}}} \rightarrow -\Phi \right\} \right) == 0$$

$$Out[22] = -i K_3 \Xi h_1[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2]] - \\ K_4 \Phi h_1[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2]] + h_2^{(1,0)}[\mathbf{x}[1], \mathbf{x}[2]] == 0$$

In maniera del tutto analoga, si ricavano le equazioni di Dirac per le zone di onda singola e, per completezza nonché per la consistenza interna delle definizioni di (K_1, K_2, K_3, K_4) , per lo spazio piatto; i risultati sono (limitatamente alla regione di onda singola progressiva e ad $M(4)$):

- Onda singola x_2

$$H_1 = e^{i(K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_1(x_1), \quad H_2 = e^{i(K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_2(x_1), \quad (3.30)$$

$$h_1(x_1) = \frac{1}{K_2} (-K_3 \Xi - i K_4 \Phi) h_2(x_1), \\ h_2'(x_1) = \frac{i}{K_2} [(K_3 \Xi)^2 + (K_4 \Phi)^2] h_2(x_1), \quad (3.31)$$

- Spazio piatto

$$H_1 = e^{i(K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_1, \quad H_2 = e^{i(K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_2, \quad (3.32)$$

$$K_2 h_1 + (K_3 + i K_4) h_2 = 0, \\ (K_3 - i K_4) h_1 + K_1 h_2 = 0, \quad (3.33)$$

che implicano (annullando il sistema dei coefficienti della (3.33)):

$$K_1 K_2 = K_3^2 + K_4^2. \quad (3.34)$$

3.4.2 Applicazioni alle metriche di Ferrari-Ibañez con orizzonte

Si ha:

$$\begin{aligned} g_{12} &= 2 [1 + \sin(u + v)]^2, \\ g_{33} &= \frac{1 - \sin(u + v)}{1 + \sin(u + v)}, \\ g_{44} &= \cos^2(v - u) [1 + \sin(u + v)]^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Da cui discende immediatamente la forma delle (3.24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial v} &= \left\{ \frac{K_y}{\cos(v - u)} - i K_x \frac{[1 + \sin(u + v)]^2}{\cos(u + v)} \right\} h_2(u, v), \\ \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial u} &= \left\{ -\frac{K_y}{\cos(v - u)} - i K_x \frac{[1 + \sin(u + v)]^2}{\cos(u + v)} \right\} h_1(u, v), \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove, per coerenza di notazione, si sono espresse le $K_{1,2,3,4}$ come $K_{u,v,x,y}$.

Il sistema (3.36) ammette una soluzione analitica parziale, ovvero riferita ad una delle due coppie di equazioni differenziali ordinarie separate a cui, attraverso opportune manipolazioni, esso è riconducibile nel modo che segue:

Quaderno 22

Si definiscono le equazioni di Dirac come :

$$\begin{aligned} In[1] := \mathbf{Eq1} = \mathbf{h1}^{(0,1)}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] == \\ (\beta[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \mathbf{Ky} - i \alpha[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \mathbf{Kx}) \mathbf{h2}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} In[2] := \mathbf{Eq2} = \mathbf{h2}^{(1,0)}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] == \\ (-\beta[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \mathbf{Ky} - i \alpha[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \mathbf{Kx}) \mathbf{h1}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]; \end{aligned}$$

in cui

$$\alpha = [\sin(u + v) + 1]^2 / \cos(u + v) \quad ; \quad \beta = 1 / \cos(v - u)$$

E' operato un primo cambiamento delle funzioni d'onda, giustificato dalla evidente simmetria delle equazioni :

$$In[3] := \mathbf{h1}[\mathbf{u}_-, \mathbf{v}_-] = \mathbf{s1}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] + \mathbf{s2}[\mathbf{u}, \mathbf{v}];$$

$$\mathbf{h2}[\mathbf{u}_-, \mathbf{v}_-] = \mathbf{s1}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] - \mathbf{s2}[\mathbf{u}, \mathbf{v}];$$

con il quale :

In[4] := **Eq3 = Simplify[Eq1]**

Out[4] = $s1^{(0,1)}[u, v] + s2^{(0,1)}[u, v] ==$
 $(s1[u, v] - s2[u, v])$
 $(-i Kx \alpha[u, v] + Ky \beta[u, v])$

In[5] := **Eq4 = Simplify[Eq2]**

Out[5] = $(s1[u, v] + s2[u, v])$
 $(i Kx \alpha[u, v] + Ky \beta[u, v]) +$
 $s1^{(1,0)}[u, v] == s2^{(1,0)}[u, v]$

Si applica il cambiamento di coordinate inverso rispetto a quello di Khan-Penrose, tornando, dalle (u, v) alle (t, z). E' necessario introdurre delle funzioni di transizione :

In[6] := **f[t_, z_] = $\frac{t - z}{2}$;**

g[t_, z_] = $\frac{t + z}{2}$;

nonché degli operatori di derivazione dedotti dalle precedenti :

In[7] := **deru[a_] := $\partial_t a - \partial_z a$;**

derv[a_] := $\partial_t a + \partial_z a$;

con i quali si cambia la definizione, interna al programma, delle derivate rispetto ad u o v, di qualsiasi ordine :

In[8] := **Unprotect[Derivative];**

Derivative/ :

Derivative[m_, n_][a_][u, v] :=
Simplify[
Nest[derv,
Simplify[Nest[deru, a[t, z], m], n];

Protect[Derivative];

Con questo operatore si riattualizzano le dipendenze delle varie funzioni in relazione al cambiamento di variabili operato :

```
In[9]:= chvar[e_] :=
      Expand[
        ((First[e] - Last[e]) /.
          {s1[u, v] → s1[t, z], s2[u, v] → s2[t, z],
           α[u, v] → α[t], β[u, v] → β[z]}) /.
        {u → f[t, z], v → g[t, z]}) ;
```

Le equazioni divengono :

```
In[10]:= Eq5 = FullSimplify[chvar[Eq3]] == 0
Out[10]= i (s1[t, z] - s2[t, z]) (Kx α[t] + i Ky β[z]) +
          s1(0,1)[t, z] + s2(0,1)[t, z] +
          s1(1,0)[t, z] + s2(1,0)[t, z] == 0
```

```
In[11]:= Eq6 = FullSimplify[chvar[Eq4]] == 0
Out[11]= (s1[t, z] + s2[t, z]) (i Kx α[t] + Ky β[z]) -
          s1(0,1)[t, z] + s2(0,1)[t, z] +
          s1(1,0)[t, z] - s2(1,0)[t, z] == 0
```

Da cui, considerando semisomma e semidifferenza dei primi membri :

```
In[12]:= Simplify[(First[Eq5] + First[Eq6])/2] ==
          0
Out[12]= i Kx s1[t, z] α[t] + Ky s2[t, z] β[z] +
          s2(0,1)[t, z] + s1(1,0)[t, z] == 0
```

```
In[13]:= Simplify[(First[Eq5] - First[Eq6])/2] ==
          0
Out[13]= -i Kx s2[t, z] α[t] - Ky s1[t, z] β[z] +
          s1(0,1)[t, z] + s2(1,0)[t, z] == 0
```

che si riscrivono in maniera canonica come :

```
In[14]:= Eq7 = s1(1,0)[t, z] + s2(0,1)[t, z] ==
          -Ky β[z] s2[t, z] - i Kx α[t] s1[t, z] ;
In[15]:= Eq8 = s1(0,1)[t, z] + s2(1,0)[t, z] ==
          Ky β[z] s1[t, z] + i Kx α[t] s2[t, z] ;
```

Ora è possibile fattorizzare singolarmente la dipendenza delle s1, s2 dalle coordinate :

```
In[16]:= s1[t_, z_] := T1[t] Z1[z] ;
          s2[t_, z_] := T2[t] Z2[z] ;
```

ottenendo :

```
In[17] := Collect [Expand [  $\frac{\text{First}[\text{Eq7}] - \text{Last}[\text{Eq7}]}{Z1[z] T2[t]}$  ],
                    {T1'[t], T2'[t], Z1'[z], Z2'[z]}, Simplify] ==
```

$$\text{Out}[17] = \frac{0}{T2[t]} + \frac{i K_x T1[t] \alpha[t]}{T2[t]} + \frac{K_y Z2[z] \beta[z]}{Z1[z]} + \frac{T1'[t]}{T2[t]} + \frac{Z2'[z]}{Z1[z]} == 0$$

```
In[18] := Collect [Expand [  $\frac{\text{First}[\text{Eq8}] - \text{Last}[\text{Eq8}]}{Z2[z] T1[t]}$  ],
                    {T1'[t], T2'[t], Z1'[z], Z2'[z]}, Simplify] ==
```

$$\text{Out}[18] = -\frac{0}{T1[t]} - \frac{i K_x T2[t] \alpha[t]}{T1[t]} - \frac{K_y Z1[z] \beta[z]}{Z2[z]} + \frac{T2'[t]}{T1[t]} + \frac{Z1'[z]}{Z2[z]} == 0$$

Tali equazioni ammettono una separazione naturale nelle variabili indipendenti :

$$\frac{Z_2'(z)}{Z_1(z)} + K_y \beta(z) \frac{Z_2(z)}{Z_1(z)} = -\frac{T_1'(t)}{T_2(t)} - i K_x \alpha(t) \frac{T_1(t)}{T_2(t)} = K$$

$$\frac{Z_1'(z)}{Z_2(z)} - K_y \beta(z) \frac{Z_1(z)}{Z_2(z)} = -\frac{T_2'(t)}{T_1(t)} + i K_x \alpha(t) \frac{T_2(t)}{T_1(t)} = J$$

con K, J costanti arbitrarie.

E' dunque stabilito il sistema di quattro equazioni differenziali ordinarie :

$$\text{EqT1} = T1'[t] + i K_x \alpha[t] T1[t] == -K T2[t];$$

$$\text{EqZ2} = Z2'[z] + K_y \beta[z] Z2[z] == K Z1[z];$$

$$\text{EqT2} = T2'[t] - i K_x \alpha[t] T2[t] == -J T1[t];$$

$$\text{EqZ1} = Z1'[z] - K_y \beta[z] Z1[z] == J Z2[z];$$

che può essere facilmente ricondotto, attraverso semplici catene di derivazioni e sostituzioni opportune, a quattro equazioni differenziali separate del secondo ordine :

```
In[20] := a =
Simplify[
EqT1/.
Solve[EqT2/.Solve[ $\partial_t$  EqT1, T2'[t]] [[1]],
T2[t]] [[1]]]
```

$$\text{Out}[20] = \frac{i (T1[t] (-JK + Kx^2 \alpha[t]^2 + i Kx \alpha'[t]) + T1''[t])}{Kx \alpha[t]} \\ == 0$$

In[21] := **b** =

Simplify[
EqT2/.
Solve[**EqT1**/.**Solve**[∂_t **EqT2**, **T1**'[t]] [[1]],
T1[t]] [[1]]]

$$\text{Out}[21] = -\frac{1}{Kx \alpha[t]} \\ (i (T2[t] (-JK + Kx^2 \alpha[t]^2 - i Kx \alpha'[t]) + \\ T2''[t])) == 0$$

In[22] := **c** =

Simplify[
EqZ1/.
Solve[**EqZ2**/.**Solve**[∂_z **EqZ1**, **Z2**'[z]] [[1]],
Z2[z]] [[1]]]

$$\text{Out}[22] = \frac{-Z1[z] (JK + Ky^2 \beta[z]^2 + Ky \beta'[z]) + Z1''[z]}{Ky \beta[z]} == 0$$

In[23] := **d** =

Simplify[
EqZ2/.
Solve[**EqZ1**/.**Solve**[∂_z **EqZ2**, **Z1**'[z]] [[1]],
Z1[z]] [[1]]]

$$\text{Out}[23] = \frac{Z2[z] (JK + Ky^2 \beta[z]^2 - Ky \beta'[z]) - Z2''[z]}{Ky \beta[z]} == 0$$

Le c), d), una volta reintrodotta l'espressione analitica di $\beta(z)$ ed effettuata la sostituzione formale $JK \rightarrow l(l+1)-1/4$, si riscrivono come :

In[24] := **eq1** =

$$\left(\frac{1}{4} + l + l^2 - Ky^2 \text{Sec}[z]^2 - Ky \text{Sec}[z] \text{Tan}[z] \right) \\ Z1[z] + Z1''[z] == 0;$$

eq2 =

$$\left(\frac{1}{4} + l + l^2 - Ky^2 \text{Sec}[z]^2 + Ky \text{Sec}[z] \text{Tan}[z] \right) \\ Z2[z] + Z2''[z] == 0;$$

ottenibili l'una dall'altra attraverso lo scambio $Z1 \rightarrow Z2$, $K_y \rightarrow -K_y$. Considerando la prima, il seguente cambiamento della variabile indipendente, effettuato con le stesse modalità di quanto visto in precedenza :

$$\text{In}[25] := \mathbf{f}[\theta_] = \frac{\pi}{2} - \theta;$$

$$\mathbf{derz}[\mathbf{a}_.] := (\partial_\theta \mathbf{f}[\theta])^{-1} \partial_\theta \mathbf{a};$$

Unprotect [Derivative];

Derivative / : **Derivative**[m.] [a.] [z] :=
Simplify[Nest[derz, a[θ], m]];

Protect [Derivative];

induce la seguente, nuova forma :

$$\text{In}[26] := \mathbf{eq3} = (\mathbf{eq1} /. \mathbf{Z1}[z] \rightarrow \mathbf{Z1}[\theta]) /. \mathbf{z} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{Out}[26] = \left(\frac{1}{4} + 1 + 1^2 - K_y \cot[\theta] \csc[\theta] - K_y^2 \csc[\theta]^2 \right) \\ Z1[\theta] + Z1''[\theta] == 0$$

che, con l'ulteriore sostituzione :

$$\text{In}[27] := \mathbf{Z1}[\theta_] = \sqrt{\mathbf{Sin}[\theta]} \theta[\theta];$$

$$\text{In}[28] := \mathbf{eq4} =$$

$$\mathbf{Collect} \left[\mathbf{Expand} \left[\frac{\mathbf{First}[\mathbf{eq3}]}{\sqrt{\mathbf{Sin}[\theta]}} \right], \right. \\ \left. \{ \theta''[\theta], \theta'[\theta], \theta[\theta] \}, \mathbf{Simplify} \right] == 0$$

$$\text{Out}[28] = \left(-\frac{1}{4} + 1 + 1^2 - \frac{\cot[\theta]^2}{4} - \right. \\ \left. K_y \cot[\theta] \csc[\theta] - K_y^2 \csc[\theta]^2 \right) \theta[\theta] + \\ \cot[\theta] \theta'[\theta] + \theta''[\theta] == 0$$

si riconduce facilmente all'equazione angolare di Teukolsky ([21] - eq. (4.10)) con spin 1/2 e parametro "magnetico" K_y :

$$\text{In}[29] := \mathbf{TeukolskyEq} =$$

$$\frac{1}{\mathbf{Sin}[\theta]} \partial_\theta (\mathbf{Sin}[\theta] \partial_\theta \theta[\theta]) - \\ \left(\frac{\frac{1}{4} + K_y^2 + K_y \cos[\theta]}{\mathbf{Sin}[\theta]^2} - 1(1+1) \right) \theta[\theta] == 0;$$

Verifica :

`In [30] := Simplify[First[eq4] - First[TeukolskyEq]]`

`Out [30]= 0`

Dunque, la metrica di collisione nella forma di Ferrari-Ibañez, del tipo D di Petrov, isometrica alla soluzione di Schwarzschild con $r < 2m$, induce, come era in qualche modo lecito aspettarsi, una separazione dell'equazione di Dirac per campi di neutrino che ammette la stessa classe di soluzioni della parte angolare della “Teukolsky Master Equation” [21], che rappresenta l'evoluzione delle perturbazioni a massa nulla della metrica di Kerr.

I risultati dell'analogia analisi effettuata nel caso di onda singola “u” sono i seguenti:

- identificazioni metriche

$$\begin{aligned} g_{12} &= 2(1 + \sin u)^2, \\ g_{33} &= \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u}, \\ g_{44} &= \cos^2(u)(1 + \sin u)^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

- equazione di Dirac

$$\begin{aligned} h_1(u) &= \frac{-K_x(1 + \sin u)^2 - iK_y}{K_v \cos u} h_2(u), \\ h_2'(u) &= i \frac{K_y^2 + K_x^2(1 + \sin u)^4}{K_v \cos^2 u} h_2(u). \end{aligned} \quad (3.38)$$

L'equazione differenziale ordinaria per $h_2(u)$ si risolve esattamente, fornendo:

$$h_2(u) = -\sqrt{2}N \frac{K_v}{K_x + iK_y} e^{\frac{i}{K_v} [K_x^2 A(u) + K_y^2 \tan u]}, \quad (3.39)$$

dove N è una costante di normalizzazione e $A(x)$ è definita da:

$$A(x) = \frac{(\sin x + 8)(\cos^2 x + 2)}{2 \cos x} + 7 \tan x - \frac{15}{2}x - 12. \quad (3.40)$$

3.4.3 Correnti di neutrino

Dal formalismo di Newman-Penrose, il vettore nullo della corrente di neutrino si può esprimere, riferendosi alle funzioni d'onda di Dirac, come:

$$J = 2 [l |F_1|^2 + n |F_2|^2 + m (F_1 F_2^*) + \bar{m} (F_1^* F_2)] . \quad (3.41)$$

espressione, questa, che induce una forma particolarmente semplice della *densità di corrente* associata, nella regione di interazione della metrica di Ferrari-Ibañez con orizzonte:

$$\begin{aligned} j = \sqrt{-g} J &= j^u \partial_u + j^v \partial_v + j^x \partial_x + j^y \partial_y, \\ &= 2 \{ |h_2|^2 \partial_u + |h_1|^2 \partial_v + 2 \Xi \operatorname{Re}(h_1 h_2^*) \partial_x + 2 \Phi \operatorname{Im}(h_1 h_2^*) \partial_y \}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

Quaderno 23

Le funzioni d'onda di Dirac :

$$\begin{aligned} \text{In}[31] := \mathbf{F1}[\mathbf{u}_-, \mathbf{v}_-, \mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] &= \\ & \frac{e^{i(\mathbf{Kx x} + \mathbf{Ky y})}}{\sqrt{\operatorname{Cos}[2\mathbf{u}] + \operatorname{Cos}[2\mathbf{v}]} (1 + \operatorname{Sin}[\mathbf{u} + \mathbf{v}])} \\ & \mathbf{h1}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In}[32] := \mathbf{F2}[\mathbf{u}_-, \mathbf{v}_-, \mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] &= \\ & \frac{\sqrt{2} e^{i(\mathbf{Kx x} + \mathbf{Ky y})}}{\sqrt{\operatorname{Cos}[2\mathbf{u}] + \operatorname{Cos}[2\mathbf{v}]} } \mathbf{h2}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]; \end{aligned}$$

Si indica esplicitamente la decomposizione in parti reale e complessa delle h :

$$\text{In}[33] := \mathbf{h1}[\mathbf{u}_-, \mathbf{v}_-] = \mathbf{a1}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] + \mathbf{i} \mathbf{b1}[\mathbf{u}, \mathbf{v}];$$

$$\mathbf{h2}[\mathbf{u}_-, \mathbf{v}_-] = \mathbf{a2}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] + \mathbf{i} \mathbf{b2}[\mathbf{u}, \mathbf{v}];$$

Attivazione di un vettore :

$$\text{In}[34] := \mathbf{DefineTensor}[\mathbf{J}, \{\{1\}, 1\}]$$

Data la presenza di funzioni reali in relazioni complesse, è necessario usare alcune funzioni di semplificazione all'uopo :

$$\begin{aligned} \text{In}[35] := \mathbf{Prod}[\mathbf{f}_-, \mathbf{g}_-] := \\ & \mathbf{PowerExpand}[\\ & \quad \mathbf{Simplify}[\mathbf{ComplexExpand}[\mathbf{f} * \mathbf{Conjugate}[\mathbf{g}]]]] \end{aligned}$$

Definizione di corrente di Dirac :

```
In[36] := J[ui_] =
      2 (l[ui] Prod[F1[u, v, x, y], F1[u, v, x, y]] +
      n[ui] Prod[F2[u, v, x, y],
      F2[u, v, x, y]] +
      m[ui] Prod[F1[u, v, x, y],
      F2[u, v, x, y]] +
      mbar[ui] Prod[F2[u, v, x, y],
      F1[u, v, x, y]]);
```

Verifica che si tratta di un vettore nullo :

```
In[37] := Simplify[
      MakeSum[Metricg[li, lj] J[ui] J[uj]]]
```

Out[37]= 0

Alcune particolari sostituzioni trigonometriche necessarie alla semplificazione :

```
In[38] := TrigSubs = {
      Sqrt[(1 + Sin[u + v]) / (1 - Sin[u + v])] -> (1 + Sin[u + v]) / Cos[u + v],
      Sqrt[-(1 + Sin[u + v]) / (-1 + Sin[u + v])] -> (1 + Sin[u + v]) / Cos[u + v],
      Sec[u - v] Sec[u + v]^2 ->
      2 / ((Cos[2 u] + Cos[2 v]) Cos[u + v]),
      (-1 + Sin[u + v]) -> -Cos[u + v]^2 / (1 + Sin[u + v]),
      2 Cos[u - v] Cos[u + v] -> Cos[2 u] + Cos[2 v]};
```

La corrente si scrive :

```
In[39] := Corr1[u_, v_] =
      Table[Simplify[Simplify[J[i]]] /. TrigSubs,
      {i, 4}]
```


$$\text{Out}[39] = \left\{ \frac{2 (a_2[u, v]^2 + b_2[u, v]^2)}{(\cos[2u] + \cos[2v]) (1 + \sin[u + v])^2}, \right. \\ \left. \frac{2 (a_1[u, v]^2 + b_1[u, v]^2)}{(\cos[2u] + \cos[2v]) (1 + \sin[u + v])^2}, \right. \\ \left. (4 (a_1[u, v] a_2[u, v] + b_1[u, v] b_2[u, v]) \right. \\ \left. \sec[u + v]) / (\cos[2u] + \cos[2v]), \right. \\ \left. (4 (a_2[u, v] b_1[u, v] - a_1[u, v] b_2[u, v]) \right. \\ \left. \sec[u - v]) / \right. \\ \left. ((\cos[2u] + \cos[2v]) (1 + \sin[u + v])^2) \right\}$$

e, considerando che l'elemento di volume inverso della metrica è :

$$\text{In}[40] := \mathbf{ev} = \text{PowerExpand}[\text{Sqrt}[-\text{Detg}] / .\text{TrigSubs}] / .$$

TrigSubs

$$\text{Out}[40] = (\cos[2u] + \cos[2v]) (1 + \sin[u + v])^2$$

reintroducendo le simbologie adottate per la metrica generalizzata, che qui diventano :

$$\text{In}[41] := \mathbf{simb} = \{ (1 + \mathbf{Sin}[u + v])^2 \rightarrow \mathbb{E} \mathbf{Cos}[u + v], \\ \mathbf{Sec}[v - u] \rightarrow \mathbb{F} \};$$

la densità della corrente di neutrino vale :

$$\text{In}[42] := \mathbf{dens} = (\mathbf{a} * \mathbf{ev}) / .\mathbf{simb}$$

$$\text{Out}[42] = \{ 2 (a_2[u, v]^2 + b_2[u, v]^2), \\ 2 (a_1[u, v]^2 + b_1[u, v]^2), \\ 4 \mathbb{E} (a_1[u, v] a_2[u, v] + b_1[u, v] b_2[u, v]), \\ 4 \mathbb{F} (a_2[u, v] b_1[u, v] - a_1[u, v] b_2[u, v]) \}$$

in cui le prime due componenti sono manifestamente proporzionali ai quadrati dei moduli di h_2 ed h_1 , rispettivamente, mentre le altre due dipendono nell'ordine da parte reale e parte immaginaria dei prodotti incrociati di h_1 , h_2 con le loro complesse coniugate:

$$\text{In}[43] := \ll \text{Algebra} \text{ `ReIm`}$$

$$\text{In}[44] := \text{ComplexExpand}[$$

Re[h1[u, v] Conjugate[h2[u, v]]]

$$\text{Out}[44] = a_1[u, v] a_2[u, v] + b_1[u, v] b_2[u, v]$$

$$\text{In}[45] := \text{ComplexExpand}[$$

Im[Conjugate[h1[u, v]] h2[u, v]]

$$\text{Out}[45] = -a_2[u, v] b_1[u, v] + a_1[u, v] b_2[u, v]$$

3.4.4 Esiti grafici

Anche per la corrente di neutrino è possibile condurre un'analisi numerica atta alla produzione di grafici rappresentativi delle linee di un flusso

$$\frac{du}{dv} = \frac{J^u}{J^v} = \frac{j^u}{j^v} = \frac{|h_2|^2}{|h_1|^2}. \quad (3.43)$$

che attraversi la doppia transizione spazio piatto \rightarrow regione di onda singola \rightarrow regione di collisione.

Rispetto alle curve geodetiche, si osserva la sovrapposibilità degli andamenti in regione di onda singola (asserto, questo, facilmente deducibile anche analiticamente a partire dalle (3.38)), mentre, varcata la frontiera con la regione di interazione, le linee di flusso della corrente si disaccoppiano con il seguente comportamento:

- per $K_x \neq 0$ viene mantenuto un andamento oscillatorio attorno a valori costanti di z , con ampiezza delle oscillazioni decrescente a zero man mano che ci si avvicina all'orizzonte;
- per $K_x = 0$ l'andamento è più irregolare e il disaccoppiamento dalle geodetiche più marcato.

Due esempi di tali andamenti sono riportati di seguito.

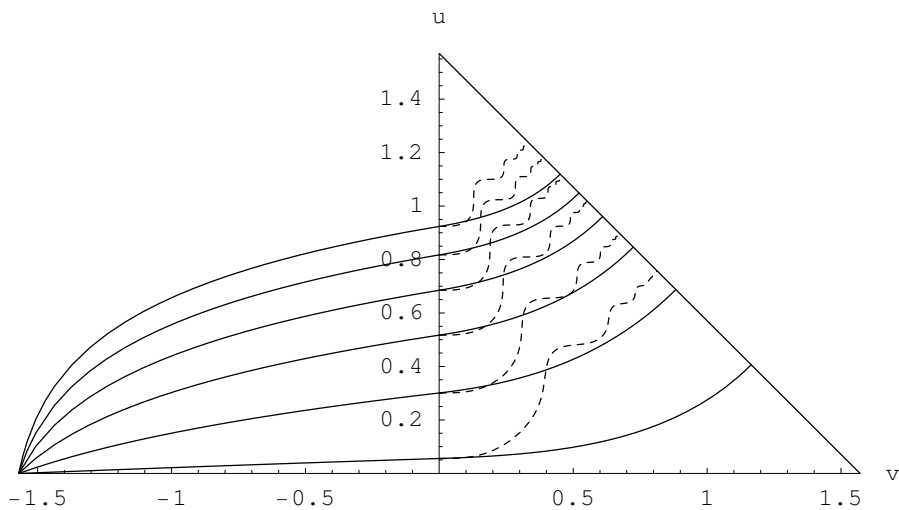


Figura 3.9. $K_x = 1, K_y = 0, -2.2 < K_v < -0.2$

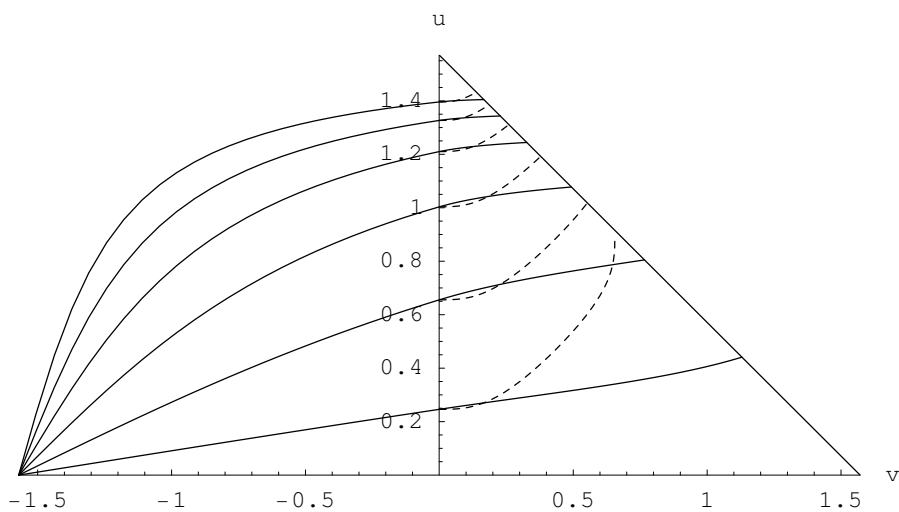


Figura 3.10. $K_x = 0, K_y = 1, -1.9 < K_v < -0.4$

Bibliografia

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, New York, 1973.
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifšits, *Teoria dei Campi*, Cap. XI, Editori Riuniti, Roma, 1985.
- [3] R. Ruffini, C.L. Bianco, P. Chardonnet, F. Fraschetti, S.-S. Xue, *Astrophys. J.* **555**, L107 (2001).
- [4] R. Ruffini, C.L. Bianco, P. Chardonnet, F. Fraschetti, S.-S. Xue, *Astrophys. J.* **555**, L113 (2001).
- [5] R. Ruffini, C.L. Bianco, P. Chardonnet, F. Fraschetti, S.-S. Xue, *Astrophys. J.* **555**, L117 (2001).
- [6] M. van Putten, A. Levinson, H. K. Lee, T. Regimbau, M. Punturo, G. M. Harry, *gr-qc/0308016*, 2003 (submitted to *Phys. Rev. D*).
- [7] R. Narayan, T. Piran, A. Shemi, *Astrophys. J.*, **379**, L17 (1991).
- [8] E. S. Phinney, *Astrophys. J.* **380**, L17 (1991).
- [9] W. DeSitter, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **76**, 699 (1916).
- [10] A. Einstein, *Ann. Phys.*, **49**, 769 (1916).
- [11] M. E. Pati, C. M. Will, *Phys. Rev. D*, **62**, 124015 (2000) - arXiv:gr-qc/0007087.
- [12] T. Regge, J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **108**, 1063 (1957).
- [13] F. J. Zerilli, *J. Math. Phys.*, **11**, 2203 (1970).
- [14] F. J. Zerilli, *Phys. Rev. Lett.*, **24**, 737 (1970).
- [15] F. J. Zerilli, *Phys. Rev. D*, **2**, 2141 (1970).
- [16] J. Mathews, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **10**, 768 (1962).
- [17] K. S. Thorne, A. Campolattaro, *A p. J.*, **149**, 591 (1967).
- [18] C. V. Vishveshwara, *Phys. Rev. D*, **1**, 2870 (1970).
- [19] L. A. Edelman, C. V. Vishveshwara, *Phys. Rev. D*, **1**, 3514 (1969).
- [20] J. M. Bardeen, W. H. Press, *J. Math. Phys.*, **14**, 7 (1973).
- [21] S. A. Teukolsky *Astrophys. J.* **185**, 635 (1973).
- [22] S. A. Teukolsky *Astrophys. J.* **185**, 649 (1973).
- [23] S. A. Teukolsky *Astrophys. J.* **193**, 443 (1974).

- [24] E. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7**, 863 (1966).
- [25] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Cap. VI, Princeton University Press, Princeton, 1926.
- [26] J. D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, Cap. 16, Zanichelli, Bologna, 1984.
- [27] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Univ. Press New York (1992).
- [28] R. Penrose, *Rev. of Mod. Phys.*, **37**, 215 (1965).
- [29] *Nature*, **228**, 1183 (1970).
- [30] K. Khan and R. Penrose, *Nature*, **229**, 185 (1971).
- [31] D. Bini, G. Cruciani and A. Lunari, *Class. Quantum Grav.***20**, 341 (2003).
- [32] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1980.
- [33] M. Dorca and E. Verdaguer, *Nucl. Phys.*, **B403**, 770, (1993).

Indice

Introduzione	2
1 Approssimazione post-newtoniana ed equazioni di Einstein rilassate	5
Quaderno 1	7
Quaderno 2	8
Quaderno 3	10
2 Analisi perturbativa della metrica di Reissner-Nordstrøm	13
2.1 Lo schema di Regge-Wheeler	14
2.1.1 La scelta di gauge	16
2.2 Analisi preliminare	17
Quaderno 4	17
Quaderno 5	19
2.3 Il sistema delle perturbazioni di metrica	22
Quaderno 6	23
Quaderno 7	26
Quaderno 8	30
Quaderno 9	34
2.3.1 La forma di Schrödinger	38
Quaderno 10	38

3	Aspetti fenomenologici delle collisioni di onde gravitazionali piane	53
3.1	Introduzione	53
3.2	Caratteristiche peculiari	54
3.3	Il problema geodetico nella versione time-like	56
	Quaderno 11	57
	Quaderno 12	60
3.3.1	Il ruolo-chiave delle simmetrie di Killing	62
	Quaderno 13	62
3.3.2	Riduzione del sistema geodetico	66
	Quaderno 14	66
	Quaderno 15	68
	Quaderno 16	70
	Quaderno 17	73
	Quaderno 18	77
3.3.3	Esiti grafici	81
	Quaderno 19	81
3.4	Campi di neutrino e collisioni di GW	86
3.4.1	Trattamento alla Newman-Penrose dell'equazione di Dirac generica	87
	Quaderno 20	88
	Quaderno 21	92
3.4.2	Applicazioni alle metriche di Ferrari-Ibañez con orizzonte	95
	Quaderno 22	95
3.4.3	Correnti di neutrino	102
	Quaderno 23	102
3.4.4	Esiti grafici	105
	Bibliografia	107

Addendum

Di seguito vengono allegati gli articoli co-sottomessi dall'autore ed accettati da riviste con referee (*Classical and Quantum Gravity* per il primo ed *International Journal of Modern Physics D* per il secondo), durante il corso di dottorato, il cui contenuto si ritrova, almeno in parte, nello sviluppo nella tesi.

È prevista la pubblicazione del secondo articolo allegato per il mese di Dicembre 2003 o Febbraio 2004.

Test particle motion in a gravitational plane wave collision background

Donato Bini^{1,2}, Gianluca Cruciani^{2,3} and Andrea Lunari²

¹ Istituto per le Applicazioni del Calcolo 'M Picone', CNR, I-00161 Roma, Italy

² ICRA International Center for Relativistic Astrophysics, University of Rome, I-00185 Rome, Italy

³ Department of Physics, University of Perugia, I-06100, Italy

Received 1 July 2002, in final form 20 November 2002

Published DD MMM 2002

Online at stacks.iop.org/CQG/20/1

Abstract

Test particle geodesic motion is analysed in detail for the background spacetimes of the degenerate Ferrari–Ibañez colliding gravitational wave solutions. Killing vectors have been used to reduce the equations of motion to a first-order system of differential equations which have been integrated numerically. The associated constants of motion have also been used to match the geodesics as they cross over the boundary between the single plane wave and interaction zones.

PACS number: 04.20.Cc

1. Introduction

Among the various theoretical arguments that make the study of gravitational waves one of the best arenas for probing classical and quantum gravity theories, those that involve the strongly nonlinear features of general relativity are very promising. The phenomenology related to the collision between two gravitational waves undoubtedly belongs to this category. However, even if the search for new exact solutions of the Einstein equations describing colliding waves essentially ended in the eighties (see, e.g., [1] for a review), the kinematics of test particle motion in such a background spacetime has never been studied in sufficient detail.

In the literature it is known that the gravitational wave interaction generates a curvature singularity some time after the instant of collision and at a certain distance from the wavefronts. Moreover there exist degenerate solutions given by Ferrari and Ibañez [2] in some of which a horizon is created instead. The characteristics of geodesic motion in both types of degenerate solutions are studied in this paper starting from some preliminary results by Dorca and Verdager [4]. In particular, we show that the horizon and singularity are reached in a finite time by those geodesics which fall into it.

Two nontrivial Killing vectors are used to integrate the geodesic equations, reducing them to a first-order system of differential equations which can then be integrated numerically.

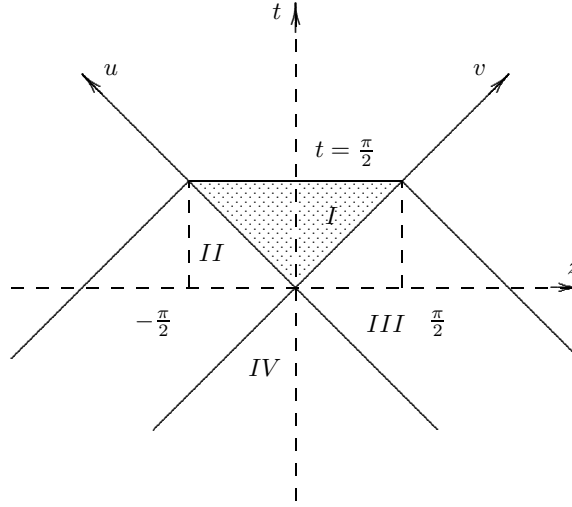


Figure 1. The null coordinates and the different regions they induce. The (t, z) coordinates are scaled by a factor of $\sqrt{2}$ with respect to the (u, v) . Region IV is flat space: geodesic paths therein are represented by straight lines whose slope affects the value of the constant K_v in region II.

The results are summarized in a series of appropriately chosen figures typical of the various kinds of behaviour that can occur. Finally, some properties of the spacetime associated with the Riemann invariants, the Papapetrou fields and the principal null directions are discussed, emphasizing the aspects arising from the asymmetry of these solutions relative to the coordinates spanning the surface of the wavefront.

2. The special class of Ferrari–Ibañez degenerate solutions

In 1987, Ferrari and Ibañez [2] found two degenerate solutions of the Einstein equations which with an appropriate choice of the amplitude parameters associated with their strength can be interpreted as describing the collision of two linearly polarized gravitational plane waves propagating along z with opposite directions. Both these solutions are isometric to the interior of the Schwarzschild metric but one develops a singularity and the other a coordinate horizon:

$$ds^2 = (1 + \sigma \sin t)^2 (dz^2 - dt^2) + \frac{1 - \sigma \sin t}{1 + \sigma \sin t} dx^2 + \cos^2 z (1 + \sigma \sin t)^2 dy^2, \quad (2.1)$$

where $\sigma = \pm 1$ ($\sigma = 1$ for the metric with horizon and $\sigma = -1$ for the metric developing singularity). The interaction region where this form of the metric is valid (designated as ‘region I’ following [4]) is represented in the (t, z) diagram by an isosceles triangle whose vertex (representing the initial event of collision) can be identified with the origin of the coordinate system; the horizon/singularity is mapped onto the base of the filled isosceles triangle in figure 1. The only nonvanishing second-order Riemann invariant for both cases is the Kretschmann scalar:

$$K_1 = \frac{48}{(1 + \sigma \sin t)^6}. \quad (2.2)$$

In order to describe the larger spacetime of which this is only one region, one must introduce the two null coordinates

$$u = (t - z)/2, \quad v = (t + z)/2 \quad \Longleftrightarrow \quad t = u + v, \quad z = v - u \quad (2.3)$$

in terms of which the metric (2.1) takes the form

$$ds^2 = -4[1 + \sigma \sin(u + v)]^2 du dv + \frac{1 - \sigma \sin(u + v)}{1 + \sigma \sin(u + v)} dx^2 + \cos^2(u - v)[1 + \sigma \sin(u + v)]^2 dy^2. \quad (2.4)$$

Following Khan–Penrose [5], by proper use of the Heaviside step function H , one can easily extend the formula for the metric from the interaction region to the remaining parts of the spacetime representing the single wave zones and the flat spacetime zone before the waves arrive. The interaction region corresponds to the triangular region in the (u, v) plane bounded by the lines $u = 0$, $v = 0$ and $u + v = \pi/2$. One need only make the following substitutions in (2.4):

$$u \rightarrow uH(u) \quad v \rightarrow vH(v), \quad (2.5)$$

which give rise to the four regions

$$\begin{array}{llll} u \geq 0, & v \geq 0, & u + v < \pi/2 & \text{region I} & \text{interaction region} \\ 0 \leq u < \pi/2, & v < 0 & & \text{region II} & \text{single } u\text{-wave region} \\ u < 0, & 0 \leq v < \pi/2 & & \text{region III} & \text{single } v\text{-wave region} \\ u < 0, & v < 0 & & \text{region IV} & \text{flat space} \end{array} \quad (2.6)$$

shown in figure 1. In this way the extended metric in general is C^0 (but not C^1) along the null boundaries $u = 0$ and $v = 0$.

It is worth noting that certain calculations are more easily done in one or the other of these two sets of coordinates, so one must be prepared to switch back and forth between them. In the case of a test particle freely moving in this spacetime, calculations prove to be easier (especially in region I) in the coordinate patch (t, z) .

3. Timelike geodesics

For both degenerate solution background spacetimes we will solve the geodesic equations

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.1)$$

with the 4-velocity normalization condition specifying timelike orbits

$$g_{\mu\nu}(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1, \quad (3.2)$$

and where the coordinates, metric components and the Christoffel symbols depend on the proper time parameter τ along the geodesics as explicitly indicated. Our goal here is to see how a massive particle freely transits from region IV to region II (or to its symmetric counterpart, region III) and finally to region I, as far as the chosen coordinate patches allow its geodesic motion to be described. Since the spacetime here admits four independent Killing vector fields, one can reduce the second-order equations of motion to a first-order system where three new constants (one for each Killing vector, two of them appearing always in a fixed analytic relation between each other: this leaves three) supplement the normalization condition above. One can then solve these four conditions for the first-order derivatives $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ to obtain this system.

For each Killing vector ξ of the metric one obtains a constant of motion from

$$\xi_\mu U^\mu = K \quad (3.3)$$

along each geodesic. In our case, for both kinds of metric, there are two obvious spacelike translational Killing vectors: $\xi_{(1)} = \partial_x$ and $\xi_{(2)} = \partial_y$, with associated constants $K_x = U \cdot \xi_{(1)}$

Table 1. The Killing vectors in the different regions and the associated coordinates and constants that are referred to in the text.

	Region II		Region I		Region III			
	Coordinate	Constant	Coordinate	Constant	Coordinate	Constant		
$\xi^{(1)}$	x	K_x	$\xi^{(1)}$	x	K_x	$\xi^{(1)}$	x	K_x
$\xi^{(2)}$	y	K_y	$\xi^{(2)}$	y	K_y	$\xi^{(2)}$	y	K_y
$\xi_{(3)}^{\text{II}}$	v	K_v	$\xi_{(3)}^{\text{I}}$	–	K_{z1}	$\xi_{(3)}^{\text{III}}$	u	K_u
			$\xi_{(4)}^{\text{I}}$	–	K_{z2}			

and $K_y = U \cdot \xi^{(2)}$, which always exist in both the single-wave and the interaction regions, since the metric (2.1) there does not depend on x or y . For the same reason, in region II (or region III) a third translational Killing vector is immediately found from the independence of the metric (2.4) on v (or on u), once expressed using (2.5); the associated constant will be designated by $K_v = U \cdot \xi_{(3)}^{\text{II}}$ (or $K_u = U \cdot \xi_{(3)}^{\text{III}}$). It is also easy to see that two additional Killing vectors exist in region I

$$\xi_{(3)}^{\text{I}} = \cos y \partial_z + \sin y \tan z \partial_y, \quad (3.4)$$

$$\xi_{(4)}^{\text{I}} = -\sin y \partial_z + \cos y \tan z \partial_y. \quad (3.5)$$

Only one further constant is needed, which can be taken to be the square root of the sum of their two associated constants of motion

$$K_z = \sqrt{K_{z1}^2 + K_{z2}^2}, \quad (3.6)$$

where $K_{z1} = U \cdot \xi_{(3)}^{\text{I}}$ and $K_{z2} = U \cdot \xi_{(4)}^{\text{I}}$. The timelike geodesics in region I are then found to satisfy a subsystem of two first-order differential equations for motion in the t – z (or u – v) plane depending on three constants K_x , K_y , K_z . For the sake of clarity, the Killing symmetries used are synthesized in table 1.

Note that by introducing the following differential operator:

$$\mathcal{E}^2 = (\xi_{(2)})^2 + (\xi_{(3)}^{\text{I}})^2 + (\xi_{(4)}^{\text{I}})^2 \quad (3.7)$$

and by letting it act on a function of the coordinates which oscillates along (x, y) with proper frequencies given by (K_x, K_y) , namely $f(t, z, x, y) = e^{i(K_x x + K_y y)} g(t, z)$, it is easy to see that, for any $g(t, z)$, the following property is verified:

$$\mathcal{E}^2(f) = e^{i(K_x x + K_y y)} \left[\frac{\partial^2 g(t, z)}{\partial z^2} - \tan z \frac{\partial g(t, z)}{\partial z} - \frac{K_y^2}{\cos^2 z} g(t, z) \right], \quad (3.8)$$

which is clearly reminiscent of the square of the angular momentum operator, if one thinks at the specialization of the well-known Chandrasekhar–Xanthopoulos isometry [3] to the Ferrari–Ibañez degenerate solutions that relates them to the ‘interior’ Schwarzschild spacetime (i.e., for $r < 2m$ using standard Boyer–Lindquist coordinates). Actually it is exactly the operator associated with the integrable part of the Klein–Gordon equation (i.e., the z part), already studied by Dorca and Verdaguer and Yurtsever [4, 6]: this gives the Killing vectors explicitly presented here a special importance and also helps to explain the integrability of the Klein–Gordon equation itself.

To extend a geodesic from region II to region I the value of K_z must be selected properly. The geodesic system in region I is

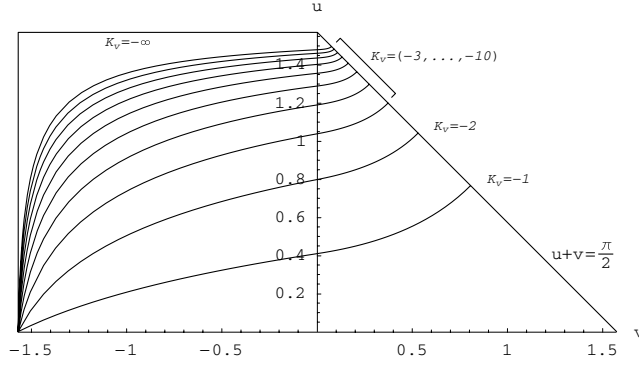


Figure 2. For $\sigma = 1$ and $(K_x = 1, K_y = 0)$, the geodesic motion has a global homogeneity for all values of K_v (it is always the case when $K_x \neq 0$). As one expects, in region II the particles are accelerated (in the sense that they exhibit a relative acceleration d^2z/dt^2) in the positive z direction, while in region I they are decelerated until they reach zero velocity exactly at the horizon. The limit $K_v \rightarrow -\infty$ reconstitutes the so-called *fold singularities* already observed in the case of null geodesics by Dorca and Verdaguer [4].

$$\begin{aligned}
 \frac{dt(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{(1 + \sigma \sin t(\tau))} \sqrt{1 + \frac{K_x(1 + \sigma \sin t(\tau))}{1 - \sigma \sin t(\tau)} + \frac{K_y + K_z}{(1 + \sigma \sin t(\tau))}}, \\
 \frac{dz(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{(1 + \sigma \sin t(\tau))} \sqrt{K_z^2 - K_y^2 \tan^2 z(\tau)}, \\
 \frac{dx(\tau)}{d\tau} &= K_x \frac{1 + \sigma \sin t(\tau)}{1 - \sigma \sin t(\tau)}, \\
 \frac{dy(\tau)}{d\tau} &= K_y \frac{1}{\cos^2 z(\tau)(1 + \sigma \sin t(\tau))},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

while in region II it is

$$\begin{aligned}
 \frac{du(\tau)}{d\tau} &= -\frac{K_v}{2} \frac{1}{(1 + \sigma \sin u(\tau))}, \\
 \frac{dv(\tau)}{d\tau} &= -\frac{1}{2K_v} \left(1 + K_x^2 \frac{1 + \sigma \sin u(\tau)}{1 - \sigma \sin u(\tau)} + K_y^2 \frac{1}{\cos^2 u(\tau)(1 + \sigma \sin u(\tau))} \right), \\
 \frac{dx(\tau)}{d\tau} &= K_x \frac{1 + \sigma \sin u(\tau)}{1 - \sigma \sin u(\tau)}, \\
 \frac{dy(\tau)}{d\tau} &= K_y \frac{1}{\cos^2 u(\tau)(1 + \sigma \sin u(\tau))}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Limiting the analysis to the (t, z) plane, we see that one of the most important differences between the horizon and singularity cases lies in the behaviour of the geodesics approaching $t = \pi/2$ (or $u + v = \pi/2$).

- *Horizon case* ($\sigma = 1$). The slope of the trajectories in the limit $t = \pi/2$ is

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t \rightarrow \pi/2} = 0 \tag{3.11}$$

(or $du/dv = 1$) for $K_x \neq 0$, i.e., the test particle crosses the horizon with zero velocity in the direction of propagation of the waves, regardless of the values of K_y and K_z (see figure 2). Such behaviour is instead absent in the case $K_x = 0$ (see figures 3 and 4), where one finds

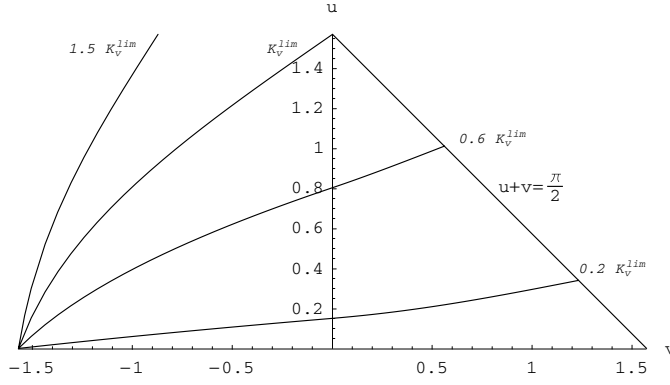


Figure 3. For $\sigma = 1$ (metric with horizon) and $(K_x = 0, K_y = 0)$, the geodesics regularly fill the entire region I, coming from a set of initial data characterized by a limiting value of $K_v, K_v^{\text{lim}} = -1.6653$ under which the particles possess a too large momentum along z (moving into reverse with respect to the single wave) to enter the collision region.

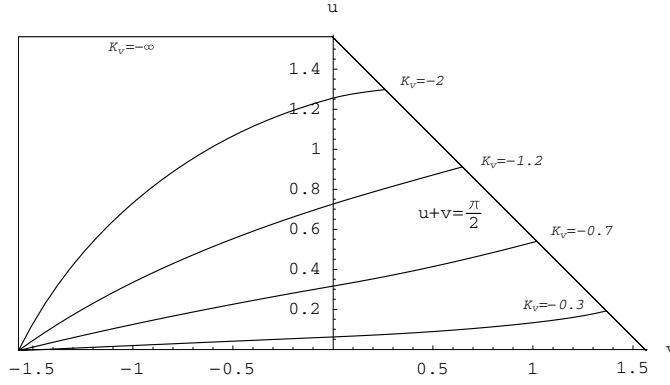


Figure 4. For $\sigma = 1$ and $(K_x = 0, K_y = 1)$ (this case qualitatively characterizes all the sets of initial data with $K_x = 0$), the metric with horizon exhibits a very homogeneous geodesic motion in region II, where all the possible values of the momentum along z are allowed to enter region I (so generating again the *fold singularities*) and slight changes in region I, where the particles decelerate for high entering values of dz/dt and accelerate otherwise.

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t \rightarrow \pi/2} = \sqrt{\frac{K_z^2 - K_y^2 \tan^2 z}{4 + K_y^2 + K_z^2}} \quad (3.12)$$

clearly depending on the values of K_y and K_z . The fact that making $K_x \neq 0$ changes the behaviour of the geodesics at the horizon so much compared to the $K_x = 0$ case corresponds to a sort of ‘broken symmetry’ between the x and y coordinates associated with the plane symmetry of these spacetimes, which we will briefly discuss in the following section.

- *Singularity case* ($\sigma = -1$). Either for $K_x = 0$ or $K_x \neq 0$, we have

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t \rightarrow \pi/2} = \sqrt{\frac{K_z^2 - K_y^2 \tan^2 z}{K_y^2 + K_z^2}} \quad (3.13)$$

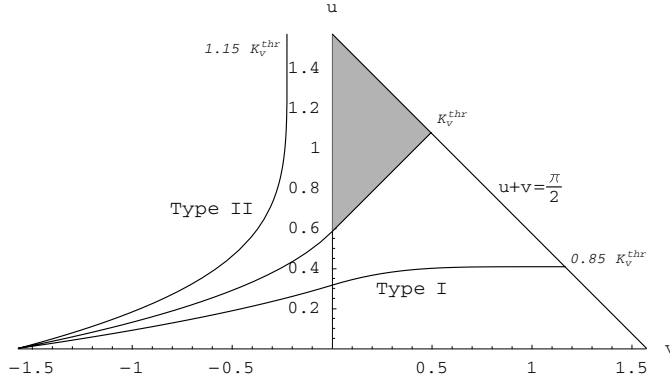


Figure 5. For $\sigma = -1$ (metric with singularity) and $(K_x = 0, K_y = 0)$, the critical initial value of K_v defined in the text is $K_v^{\text{thr}} = -0.447\,645$. The forbidden region for timelike geodesics is represented in grey.

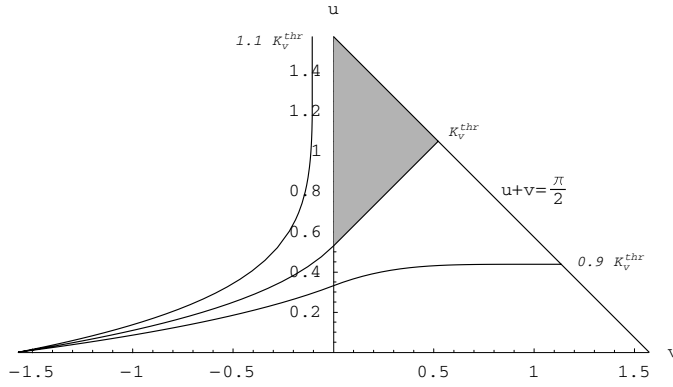


Figure 6. For $\sigma = -1$ and $(K_x = 1, K_y = 0)$, the geodesics qualitatively behave as in the $K_x = 0$ case, with now $K_v^{\text{thr}} = -0.569\,647$; increasing K_x corresponds to a lowering of the critical geodesic in region II (i.e., an enlargement of the ‘forbidden region’).

and the test particle approaches the singularity with z -velocity, in general, different from 0. However, here it is important to distinguish whether K_y vanishes or not. For $K_y = 0$ the geodesics exhibit a typical twofold behaviour (see figures 5 and 6) depending on whether they enter the interaction region or not. This is due to the existence of a critical value of K_v , here denoted by K_v^{thr} , in the single-wave region, or equivalently to a threshold for the velocity along the z axis in the vacuum region. Geodesics in region II with $K_v = K_v^{\text{thr}}$ can be extended into region I with $K_z = 0$, i.e., they remain at a fixed z position, irrespective of the presence of the waves; this K_v^{thr} and the region II–region I crossing value u^* of u are related by

$$K_v^{\text{thr}} = (\sin u^* - 1) \sqrt{1 + K_x^2 \frac{1 - \sin u^*}{1 + \sin u^*}}. \quad (3.14)$$

For particles exceeding this value of K_v , the geodesics are of type I, i.e., entering the interaction region and reaching the singularity with $dz/dt \rightarrow 1$, otherwise, they are of

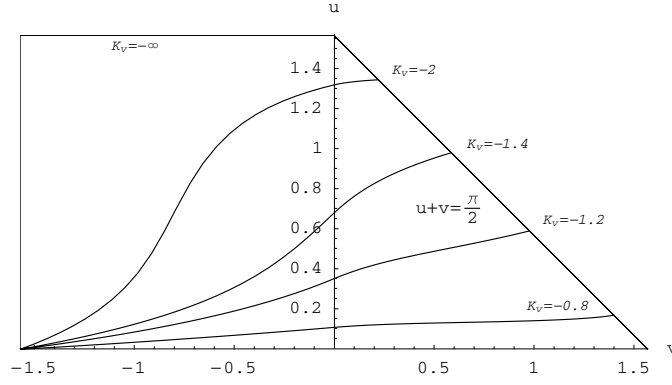


Figure 7. The case $\sigma = -1$ and $(K_x = 3, K_y = 1)$ is a good example of what the geodesics of the metric with singularity look like when $K_y \neq 0$. The *fold singularities* arise for $K_v \rightarrow -\infty$ while the particles accelerate abruptly (relative acceleration of course) and with a change in sign along z in region II. There are no forbidden regions in region I.

Table 2. Horizon case: the proper times for different initial datasets.

K_x	K_y	$-K_v$	$\tau_{\text{II} \rightarrow \text{I}}$	$\tau_{\text{I} \rightarrow \text{hor}}$	τ_{tot}	K_x	K_y	$-K_v$	$\tau_{\text{II} \rightarrow \text{I}}$	$\tau_{\text{I} \rightarrow \text{hor}}$	τ_{tot}
0	0	1	3.1416	1.2975	4.4391	2	0	$\sqrt{5}$	0.7874	0.2026	0.9900
0	1	$\sqrt{2}$	2.6492	0.8703	3.5195	2	1	$\sqrt{6}$	0.7730	0.1920	0.9650
0	2	$\sqrt{5}$	1.8565	0.4883	2.3448	2	2	3	0.7348	0.1686	0.9034
0	3	$\sqrt{10}$	1.3545	0.3256	1.6801	2	3	$\sqrt{14}$	0.6835	0.1442	0.8278
1	0	$\sqrt{2}$	1.4140	0.3585	1.7725	3	0	$\sqrt{10}$	0.5378	0.1391	0.6769
1	1	$\sqrt{3}$	1.3447	0.3129	1.6576	3	1	$\sqrt{11}$	0.5330	0.1354	0.6684
1	2	$\sqrt{6}$	1.1846	0.2406	1.4251	3	2	$\sqrt{14}$	0.5194	0.1260	0.6454
1	3	$\sqrt{11}$	1.0124	0.1874	1.1998	3	3	$\sqrt{19}$	0.4993	0.1142	0.6135

type II, i.e., confined in the single-wave region and approaching the singularity with $dz/dt \rightarrow -1$.

As stated above, along the geodesic corresponding to the critical value of K_v , the particle enters the interaction region at a certain position with $dz/dt = 0$ and does not move. This geodesic marks a triangular part of region I, also delimited by the singularity and the u axis, which actually does not allow any geodesic trajectory to enter.

For $K_y \neq 0$ the threshold disappears, as shown in figure 7.

As for the proper times of those geodesics entering the interaction region and approaching the line $t = \pi/2$, either in the horizon or singularity cases, the situation is summarized in tables 2 and 3, for the case of a particle entering region II at $v = -\pi/2$, with arbitrary choices of K_x, K_y and giving K_v the value that corresponds to zero initial velocity along z (i.e., $du/dv = 1$ for $u \rightarrow 0$), which is $-\sqrt{K_x^2 + K_y^2 + 1}$.

4. Papapetrou fields and principal null directions in region I

The Killing vector field $\xi_{(1)}$ generates a Papapetrou field F [7] whose principal null directions are aligned with those (repeated) of the spacetime itself (which is of Petrov type D). The key

Table 3. Singularity case: the proper times for different initial datasets. (–): the geodesic does not reach region I. It is evident that, while the particles approach the horizon smoothly, the formation of a singularity makes their transit in region I almost immediate.

K_x	K_y	$-K_v$	$\tau_{\text{II} \rightarrow \text{I}}$	$\tau_{\text{I} \rightarrow \text{sing}}$	τ_{tot}	K_x	K_y	$-K_v$	$\tau_{\text{II} \rightarrow \text{I}}$	$\tau_{\text{I} \rightarrow \text{sing}}$	τ_{tot}
0	0	1	–	–	–	2	0	$\sqrt{5}$	–	–	–
0	1	$\sqrt{2}$	0.5034	0.0001	0.5035	2	1	$\sqrt{6}$	0.2908	$<10^{-4}$	0.2908
0	2	$\sqrt{5}$	0.3174	0.0003	0.3177	2	2	3	0.2374	$<10^{-4}$	0.2374
0	3	$\sqrt{10}$	0.2240	0.0003	0.2243	2	3	$\sqrt{14}$	0.1901	0.0001	0.1902
1	0	$\sqrt{2}$	–	–	–	3	0	$\sqrt{10}$	–	–	–
1	1	$\sqrt{3}$	0.4112	$<10^{-4}$	0.4112	3	1	$\sqrt{11}$	0.2148	$<10^{-4}$	0.2148
1	2	$\sqrt{6}$	0.2903	0.0001	0.2904	3	2	$\sqrt{14}$	0.1904	$<10^{-4}$	0.1904
1	3	$\sqrt{11}$	0.2139	0.0002	0.2141	3	3	$\sqrt{19}$	0.1634	$<10^{-4}$	0.1634

properties are the following:

$$\begin{aligned} E(X)_{\alpha\mu} &\equiv C_{\alpha\beta\mu\nu} X^\beta X^\nu = -3(1 - \sigma \sin t)[a(X) \otimes a(X)]^{(\text{TF})}, \\ H(X)_{\alpha\mu} &\equiv {}^*C_{\alpha\beta\mu\nu} X^\beta X^\nu = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

where $X = \xi_{(1)}/\|\xi_{(1)}\| \equiv \sqrt{g_{xx}} dx$ and,

$$a(X) = \nabla_X X \equiv -[\partial_\mu \ln \sqrt{g_{xx}}] dx^\mu = \frac{\sigma}{\cos t} dt \quad (4.2)$$

is the (timelike) acceleration field associated with X and (TF) stands for the trace-free part of a tensor. Explicitly, for a generic $\binom{2}{2}$ tensor A , orthogonal to X , one has

$$A_{\alpha\beta}^{(\text{TF})} = A_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}[\text{Tr } A]P(X)_{\alpha\beta}, \quad P(X) = g - X \otimes X, \quad (4.3)$$

with $P(X)$ being the projector orthogonal to the spacelike X direction. Finally, the Papapetrou field associated with $\xi_{(1)}$ is

$$F_{\alpha\beta} = \xi_{(1)\alpha;\beta} = [\xi_{(1)} \wedge a(X)]_{\alpha\beta}. \quad (4.4)$$

The two independent principal null directions of both $F_{\alpha\beta}$ and $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ are

$$l = \frac{1}{2 \cos t} \left[\partial_t + \frac{(1 + \sigma \sin t)^2}{\cos t} \partial_x \right], \quad n = \frac{\cos t}{(1 + \sigma \sin t)^2} \partial_t - \partial_x, \quad (4.5)$$

affinely parametrized and normalized so that $l \cdot n = -1$. From these expressions it is clear that the special role of the Killing vector $\xi_{(1)}$ (compared to $\xi_{(2)}$) is due to the fact that it belongs to the 2-plane spanned by the principal null directions l and n . This, at least from a purely geometrical point of view, leads to a difference between the x and y coordinates in terms of which the metric is expressed.

5. Concluding remarks

A detailed analysis of (timelike) geodesic motion has been carried out in the spacetimes of the Ferrari–Ibañez degenerate solutions representing two colliding gravitational plane waves. The study of these simple cases is a useful exercise in general relativity because they contain the main features related to the nonlinear collision of waves, i.e., the creation of a horizon or that of a curvature singularity.

References

- [1] Griffiths J B 1991 *Colliding Plane Waves in General Relativity* (Oxford: Clarendon)
- [2] Ferrari V and Ibañez J 1987 *Gen. Rel. Grav.* **19** 383
- [3] Chandrasekhar S and Xanthopoulos B C 1985 *Proc. R. Soc. A* **398** 223
- [4] Dorca M and Verdaguer E 1993 *Nucl. Phys. B* **403** 770
- [5] Khan K and Penrose R 1971 *Nature* **229** 185
- [6] Yurtsever U 1989 *Phys. Rev. D* **40** 360
- [7] Fayos F and Sopena C F 1999 *Class. Quantum Grav.* **16** 2965

NEUTRINO CURRENT IN A GRAVITATIONAL PLANE WAVE COLLISION BACKGROUND

DONATO BINI

*Istituto per le Applicazioni del Calcolo “M. Picone”, C.N.R., I- 00161 Roma, Italy
ICRA International Centre for Relativistic Astrophysics, University of Rome, I-00185, Italy **

CHRISTIAN CHERUBINI

*Department of Physics “E.R. Caianiello”, University of Salerno, I-84081, Italy
Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, Portsmouth, PO1 2EG, UK
ICRA International Centre for Relativistic Astrophysics, University of Rome, I-00185, Italy †*

GIANLUCA CRUCIANI

*Department of Physics, University of Perugia, I-06100, Italy
ICRA International Centre for Relativistic Astrophysics, University of Rome, I-00185, Italy ‡*

ANDREA LUNARI

*Department of Physics, University of Como, I-22100, Italy
ICRA International Centre for Relativistic Astrophysics, University of Rome, I-00185, Italy §*

Received 2/7/2003

Revised 19/11/2003

Communicated by L. Z. Fang

The behaviour of a massless Dirac field on a general spacetime background representing two colliding gravitational plane waves is discussed in the Newman-Penrose formalism. The geometrical properties of the neutrino current are analysed and explicit results are given for the special Ferrari-Ibañez solution.

Keywords: Neutrinos; gravitational waves.

1. Introduction

Exact solutions of the Einstein equations representing colliding gravitational plane waves have been discussed extensively in the literature and the status of research on this topic is still best summarized in a monograph by Griffith¹ published in 1991.

*binid@icra.it

†cherubini@icra.it

‡cruciani@icra.it

§lunari@icra.it

The interest in such solutions is mainly due to the possibility they offer to understand better some nonlinear features of the gravitational interaction. In general, the spacetime geometry associated with two colliding gravitational plane waves is very rich: for example either a spacetime singularity² or a Killing-Cauchy horizon^{3,4,5} can result from the nonlinear wave interaction. In general, such spacetimes contain four regions: a Minkowski region, representing the initially flat situation before the passage of the two oppositely directed plane waves, two Petrov type N regions, corresponding to the waves before the interaction, and an interaction region, generally of Petrov type I. Two commuting spacelike Killing vectors are always present, associated with the plane symmetry assumed for the two colliding waves.

Here we consider a massless Dirac field (neutrino) interacting with the colliding plane waves. Explicit results are given for the degenerate solutions found by Ferrari and Ibañez⁴, in which the interaction region of the colliding waves propagating along the common z direction is of Petrov type D, with a Killing-Cauchy horizon formed at a finite distance from the collision plane, after a finite time from the instant of collision. For this spacetime a careful analysis of timelike geodesics has only recently been performed⁶.

Some special features of the neutrino current are discussed in detail, and previous work of Dorca and Verdaguer^{7,8} and Yurtsever⁹ valid for a scalar field interacting with gravitational waves is extended here to spin 1/2 massless particles.

2. Colliding waves: the Dirac equation

The most general form of the spacetime metric representing two colliding waves with parallel polarization can be written as

$$ds^2 = 2 g_{12} dx_1 dx_2 - g_{33} (dx_3)^2 - g_{44} (dx_4)^2, \quad (1)$$

where g_{12} , g_{33} , g_{44} are real functions of the null coordinates (x_1, x_2) . The complete spacetime description of the collision must patch together two single-wave regions (the approaching waves) plus a portion of flat spacetime corresponding to the situation before the passage of the waves and the nontrivial interaction region where the metric depends on both x_1 and x_2 . We distinguish the single-wave metrics by their dependence on a single null coordinate ($g_{ij} = g_{ij}(x_1)$ for the progressive wave and $g_{ij} = g_{ij}(x_2)$ for the regressive one), while in flat spacetime these components are constants, $g_{12} = 2$, $g_{33} = g_{44} = 1$. Khan and Penrose² identified a standard procedure to extend continuously the metric over all the various regions by a proper use of Heaviside step functions. We will discuss the details of this extended spacetime in the case of the explicit solution of Ferrari-Ibañez in the next section.

A wide variety of exact solutions can be found in the literature, the analysis of which is extremely simplified using the Newman-Penrose formalism¹⁰. Here the following NP null frame can be introduced

$$l = \partial_{x_2}, \quad n = 1/g_{12} \partial_{x_1}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \partial_{x_3} - i \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \partial_{x_4} \right]. \quad (2)$$

It is convenient to introduce the following two quantities

$$\Xi = \sqrt{g_{12}/(2g_{33})}, \quad \Phi = \sqrt{g_{12}/(2g_{44})} \quad (3)$$

which play a role in a conformally rescaled form of the metric (1)

$$ds^2 = \frac{g_{12}}{2} [4dx_1 dx_2 - \Xi^{-2} (dx_3)^2 - \Phi^{-2} (dx_4)^2] . \quad (4)$$

The Dirac equation for massless spin 1/2 particles then reduces to

$$\begin{aligned} (D + \epsilon - \rho) F_1 + (\delta^* + \pi - \alpha) F_2 &= 0 , \\ (\delta + \beta - \tau) F_1 + (\Delta + \mu - \gamma) F_2 &= 0 , \end{aligned} \quad (5)$$

where the notation and conventions for the NP formalism follow those of Chandrasekhar¹¹. A much simplified form of (5) results from rescaling the spin wave functions F_1 and F_2 as follows

$$\begin{aligned} F_1 &\rightarrow (g_{33} g_{44})^{-1/4} / \sqrt{g_{12}} H_1 = (-g)^{-1/4} H_1 , \\ F_2 &\rightarrow (g_{33} g_{44})^{-1/4} H_2 . \end{aligned} \quad (6)$$

According to the Khan-Penrose procedure², we must first examine the Dirac equation for each of the four regions.

2.1. Case 1: $g_{ij} = g_{ij}(x_1, x_2)$

The NP spin coefficients have a very simple and symmetric form in the general case

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{4} \partial_{x_2} \log(g_{33} g_{44}) , & \sigma &= -\frac{1}{4} \partial_{x_2} \log\left(\frac{g_{33}}{g_{44}}\right) , \\ \lambda &= -\frac{1}{4 g_{12}} \partial_{x_1} \log\left(\frac{g_{33}}{g_{44}}\right) , & \mu &= -\frac{1}{4 g_{12}} \partial_{x_1} \log(g_{33} g_{44}) , \\ \epsilon &= \frac{1}{2} \partial_{x_2} (\log g_{12}) , & \alpha &= \beta = \gamma = \kappa = \nu = \pi = \tau = 0 , \end{aligned} \quad (7)$$

while the Weyl scalars are

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= D\sigma - 2\sigma(\rho + \epsilon) = \frac{1}{8} \left[[\partial_{x_2} \log(g_{12} g_{33})]^2 - [\partial_{x_2} \log(g_{12} g_{44})]^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial_{x_2}^2 g_{33}}{g_{33}} - \frac{\partial_{x_2}^2 g_{44}}{g_{44}} \right) \right] , \\ \Psi_1 &= -\delta\epsilon = 0 , \\ \Psi_2 &= \frac{D\mu - \Delta\epsilon + 2(\mu\epsilon - \lambda\sigma)}{3} = \frac{1}{12 g_{12}} \left(2 \partial_{x_1} \log g_{12} \partial_{x_2} \log g_{12} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \partial_{x_1} \log(g_{33} g_{44}) \partial_{x_2} \log(g_{33} g_{44}) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial_{x_1} \partial_{x_2} g_{12}}{g_{12}} + \frac{\partial_{x_1} \partial_{x_2} g_{33}}{g_{33}} + \frac{\partial_{x_1} \partial_{x_2} g_{44}}{g_{44}} \right) \right) , \\ \Psi_3 &= 0 , \end{aligned}$$

$$\Psi_4 = -\Delta \lambda - 2 \lambda \mu = \frac{1}{8 g_{12}^2} \left[[\partial_{x_1} \log (g_{12} g_{33})]^2 - [\partial_{x_1} \log (g_{12} g_{44})]^2 - 2 \left(\frac{\partial_{x_1}^2 g_{33}}{g_{33}} - \frac{\partial_{x_1}^2 g_{44}}{g_{44}} \right) \right]. \quad (8)$$

Since the metric is independent of (x_3, x_4) one can seek solutions (normal modes) of the form

$$H_1 = e^{i(K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_1(x_1, x_2), \quad H_2 = e^{i(K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_2(x_1, x_2), \quad (9)$$

where K_3 and K_4 are real constants and h_1, h_2 will depend on them. The Dirac equation then becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= (K_4 \Phi - i K_3 \Xi) h_2(x_1, x_2), \\ \frac{\partial h_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= (-K_4 \Phi - i K_3 \Xi) h_1(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (10)$$

and the general solution can be given as superposition of modes

$$\mathcal{H}_1 = \int dK_3 dK_4 H_1, \quad \mathcal{H}_2 = \int dK_3 dK_4 H_2. \quad (11)$$

2.2. Case 2: $g_{ij} = g_{ij}(x_1)$

In this case, only λ and μ remain nonzero among the spin coefficients (7). Since the metric is independent of (x_2, x_3, x_4) one can seek solutions of the form

$$H_1 = e^{i(K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_1(x_1), \quad H_2 = e^{i(K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_2(x_1), \quad (12)$$

where K_2, K_3 and K_4 are real constants and h_1 and h_2 will also depend on them. The Dirac equation then becomes

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= \frac{1}{K_2} (-K_3 \Xi - i K_4 \Phi) h_2(x_1), \\ h_2'(x_1) &= \frac{i}{K_2} [(K_3 \Xi)^2 + (K_4 \Phi)^2] h_2(x_1), \end{aligned} \quad (13)$$

and the general solution can be given as superposition of these modes

$$\mathcal{H}_1 = \int dK_2 dK_3 dK_4 H_1, \quad \mathcal{H}_2 = \int dK_2 dK_3 dK_4 H_2. \quad (14)$$

2.3. Case 3: $g_{ij} = g_{ij}(x_2)$

Here the non-zero spin coefficients are ρ, σ and ϵ . Since the metric is independent of (x_1, x_3, x_4) one can seek solutions of the form

$$H_1 = e^{i(K_1 x_1 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_1(x_2), \quad H_2 = e^{i(K_1 x_1 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_2(x_2), \quad (15)$$

where K_1 , K_3 and K_4 are real constants and as in the previous cases h_1 and h_2 will also depend on them. The Dirac equation then becomes:

$$\begin{aligned} h_1'(x_2) &= \frac{i}{K_1} [(K_3 \Xi)^2 + (K_4 \Phi)^2] h_1(x_2) , \\ h_2(x_2) &= \frac{1}{K_1} (-K_3 \Xi + i K_4 \Phi) h_1(x_2) , \end{aligned} \quad (16)$$

and the general solution can be given as superposition of these modes:

$$\mathcal{H}_1 = \int dK_1 dK_3 dK_4 H_1 , \quad \mathcal{H}_2 = \int dK_1 dK_3 dK_4 H_2 . \quad (17)$$

2.4. Case 4: $g_{ij} = (\text{positive}) \text{ constants}$

For a metric with constant components the spin coefficients are obviously all zero. We assume without any loss of generality: $g_{12} = 2$ and $g_{33} = g_{44} = 1$. Since the metric is constant one can seek solutions of the form

$$H_1 = e^{i(K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_1 , \quad H_2 = e^{i(K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4)} h_2 , \quad (18)$$

with h_1 and h_2 also constants. The Dirac equation reduces to

$$\begin{aligned} K_2 h_1 + (K_3 + i K_4) h_2 &= 0 , \\ (K_3 - i K_4) h_1 + K_1 h_2 &= 0 , \end{aligned} \quad (19)$$

which implies (by setting to zero the determinant of the coefficient matrix of the linear system (19))

$$K_1 K_2 = K_3^2 + K_4^2 . \quad (20)$$

In the next section we will specialize these cases to the horizon-forming Ferrari-Ibañez metric and discuss their solutions.

3. The horizon-forming Ferrari-Ibañez metric

In 1987 Ferrari and Ibañez^{4,5} found a type D solution of the Einstein equations that can be interpreted as describing the collision of two linearly polarized gravitational plane waves propagating along a common direction z in opposite senses and developing a non-singular Killing-Cauchy horizon when they collide. Using the standard coordinates (t, z, x, y) , with an appropriate choice of the amplitude parameters associated with the strength of the waves, the metric takes the form:

$$ds^2 = (1 + \sin t)^2 (dt^2 - dz^2) - \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} dx^2 - \cos^2 z (1 + \sin t)^2 dy^2 . \quad (21)$$

The interaction region where this form of the metric is valid (designated as ‘‘Region I’’, as in most of the literature⁷) is represented in the (t, z) diagram by a triangle whose vertex (representing the initial event of collision) can be identified with the origin of the coordinate system; the horizon is mapped onto the base of the shaded triangle in Fig. 1.

In order to describe the larger spacetime of which this is only one region, one must introduce the two null coordinates

$$u = (t - z)/2, \quad v = (t + z)/2 \iff t = u + v, \quad z = v - u, \quad (22)$$

in terms of which the metric (21) takes the form

$$ds^2 = 4 [1 + \sin(u + v)]^2 du dv - \frac{1 - \sin(u + v)}{1 + \sin(u + v)} dx^2 - \cos^2(u - v) [1 + \sin(u + v)]^2 dy^2. \quad (23)$$

Following Khan-Penrose² one can easily extend the formula for the metric from the interaction region to the remaining parts of the spacetime representing the single wave zones and the flat spacetime zone before the waves arrive. The interaction region corresponds to the triangular region in the (u, v) plane bounded by the lines $u = 0$, $v = 0$ and $u + v = \pi/2$. One need only make the following substitutions in (23):

$$u \rightarrow u H(u) \quad v \rightarrow v H(v) \quad (24)$$

which give rise to the four regions

$u \geq 0, v \geq 0, u + v < \pi/2$	Region I	Interaction region	(25)
$0 \leq u < \pi/2, v < 0$	Region II	Single u -wave region	
$u < 0, 0 \leq v < \pi/2$	Region III	Single v -wave region	
$u < 0, v < 0$	Region IV	Flat space	

shown in fig. 1. In this way the extended metric in general is C^0 (but not C^1) along the null boundaries $u = 0$ and $v = 0$. It is worth noting that certain calculations are more easily done in one or the other of these two sets of coordinates, so we will switch back and forth between them as needed.

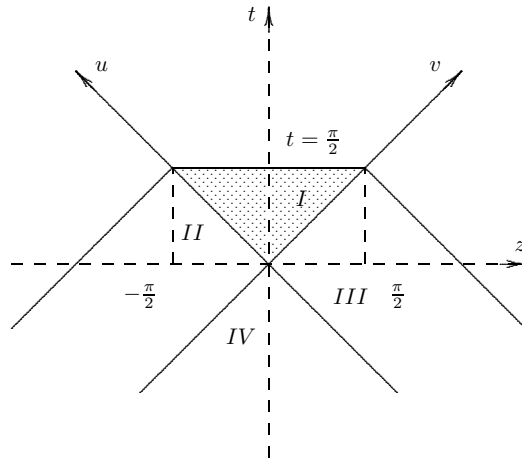


Fig. 1. The null coordinates (u, v) and the different regions they induce.

We can apply the results of the previous section using the coordinates (u, v, x, y) and the extended metric (23) – (24).

3.1. Region I: wave interaction

The metric

$$\begin{aligned} g_{12} &= 2 [1 + \sin(u + v)]^2 , \\ g_{33} &= \frac{1 - \sin(u + v)}{1 + \sin(u + v)} , \\ g_{44} &= \cos^2(v - u) [1 + \sin(u + v)]^2 . \end{aligned} \quad (26)$$

is of Petrov type D, the NP frame (2) is not principal (i.e. not aligned along the two repeated principal null directions of the spacetime) and the Dirac equation (10) becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial v} &= \left(\frac{K_y}{\cos(v - u)} - i K_x \frac{[1 + \sin(u + v)]^2}{\cos(u + v)} \right) h_2(u, v) , \\ \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial u} &= \left(-\frac{K_y}{\cos(v - u)} - i K_x \frac{[1 + \sin(u + v)]^2}{\cos(u + v)} \right) h_1(u, v) , \end{aligned} \quad (27)$$

where a convenient notational change has been made with respect to the previous section, denoting $K_{1,2,3,4}$ as $K_{u,v,x,y}$.

To exploit the symmetries of (27) we again transform the Dirac variables

$$\begin{aligned} h_1(u, v) &= s_1(u, v) + s_2(u, v) , \\ h_2(u, v) &= s_1(u, v) - s_2(u, v) , \end{aligned} \quad (28)$$

and then we switch back to the spacetime coordinates (t, z, x, y) , introducing the abbreviated notation

$$\alpha(t) = \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos t} , \quad \beta(z) = \frac{1}{\cos z} .$$

Equations (27) then become

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial s_2(t, z)}{\partial z} &= -i K_x \alpha(t) s_1(t, z) - K_y \beta(z) s_2(t, z) , \\ \frac{\partial s_1(t, z)}{\partial z} + \frac{\partial s_2(t, z)}{\partial t} &= K_y \beta(z) s_1(t, z) + i K_x \alpha(t) s_2(t, z) . \end{aligned} \quad (29)$$

These equations can be separated by assuming $s_1(t, z) = T_1(t)Z_1(z)$ and $s_2(t, z) = T_2(t)Z_2(z)$. In fact dividing the first by $T_2(t)Z_1(z)$ and the second by $T_1(t)Z_2(z)$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{T_1'(t)}{T_2(t)} + \frac{Z_2'(z)}{Z_1(z)} + i K_x \alpha(t) \frac{T_1(t)}{T_2(t)} + K_y \beta(z) \frac{Z_2(z)}{Z_1(z)} &= 0 , \\ \frac{T_2'(t)}{T_1(t)} + \frac{Z_1'(z)}{Z_2(z)} - i K_x \alpha(t) \frac{T_2(t)}{T_1(t)} - K_y \beta(z) \frac{Z_1(z)}{Z_2(z)} &= 0 , \end{aligned} \quad (30)$$

and hence

$$\begin{aligned}
T_1'(t) + i K_x \alpha(t) T_1(t) &= -K T_2(t) , \\
T_2'(t) - i K_x \alpha(t) T_2(t) &= -J T_1(t) , \\
Z_1'(z) - K_y \beta(z) Z_1(z) &= J Z_2(z) , \\
Z_2'(z) + K_y \beta(z) Z_2(z) &= K Z_1(z) ,
\end{aligned} \tag{31}$$

where J and K are arbitrary constants. By differentiating these equations the functions T, Z are seen to satisfy a system of four completely separated second-order differential equations of the following form:

$$\frac{df(x)}{dx^2} - [a^2 \mathcal{A}(x)^2 + a \mathcal{A}'(x) + J K] f(x) = 0 , \tag{32}$$

with the respective sets of values for $f(x)$, a , \mathcal{A} :

$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} T_1 \\ T_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{cases} \quad a \Rightarrow \begin{cases} -i K_x \\ i K_x \\ K_y \\ -K_y \end{cases} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(t) \\ \alpha(t) \\ \beta(z) \\ \beta(z) \end{cases} . \tag{33}$$

With the restriction $\{JK = -(\frac{n}{2})^2, n \in N\}$, the (32) for Z_1, Z_2 can be integrated analytically. In fact with the variable change $z = \pi/2 - \theta$ and the rescaling $Z_{1,2}(\theta) = \sqrt{\sin \theta} \Theta_{1,2}(\theta)$ the resulting equation for $\Theta_{1,2}(\theta)$ becomes

$$\Theta''(\theta) + \cot \theta \Theta'(\theta) + \left[\frac{2 s m \cos \theta - m^2 - s^2}{\sin^2 \theta} + l(l+1) \right] \Theta(\theta) = 0 , \tag{34}$$

where $JK = -[l(l+1) + s^2]$ and $s = \mp 1/2$ must hold in order to have regular solutions, with $\Theta_1(\theta)$ corresponding to $s = -1/2, m = K_y$ (or $s = 1/2, m = -K_y$) and $\Theta_2(\theta)$ corresponding to $s = 1/2, m = K_y$ (or $s = -1/2, m = -K_y$). A class of solutions of (34) is represented by the *spin-weighted spherical harmonics* ${}_s Y_l^{\pm K_y}(\theta, 0)$ (first introduced by Newman and Penrose¹⁰ as a natural extension of the scalar harmonics to the Hilbert space of the square-integrable spin- s functions defined on the 2-dimensional unit sphere). An explicit definition of these functions, together with a list of their main properties and features is given in the Appendix. The corresponding solutions of Eqs. (31-33) can then be denoted by

$$\begin{aligned}
T_1(t) &= T_l^{K_x}(u+v), \\
T_2(t) &= T_l^{-K_x}(u+v) \\
Z_1(z) &= \sqrt{\cos(v-u)} {}_{-1/2} Y_l^{K_y}(\pi/2 + u - v, 0), \\
Z_2(z) &= \sqrt{\cos(v-u)} {}_{1/2} Y_l^{K_y}(\pi/2 + u - v, 0)
\end{aligned} \tag{35}$$

where indices 1, 2 correspond to the signs \pm respectively. The general solution will then be a superposition of such modes

$$h_1(u, v) = \sqrt{\cos(v-u)} \sum_{l=|K_y|}^{\infty} C_l [T_l^{K_x}(u+v) {}_{1/2} Y_l^{-K_y}(\pi/2 + u - v, 0) +$$

$$T_l^{-K_x}(u+v) {}_{1/2}Y_l^{K_y}(\pi/2+u-v, 0)] \quad (36)$$

with an analogous expression for h_2 , where but the functions $T_l^{\pm K_x}(u+v)$ can only be given numerically.

3.1.1. Teukolsky Master Equation

We notice here that as this portion of spacetime is Petrov type D actually one can write, following notation and conventions of Teukolski¹², a Master Equation for any spin $s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2$ perturbations of the form

$$\psi(t, z, x, y) = e^{iK_x x} e^{iK_y y} T(t) Z(z) \quad (37)$$

of this background. To do this it is convenient to adopt a (Kinnersley) principal null tetrad, different from the one introduced above for the Dirac field, aligned with the two repeated principal null directions of the spacetime

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2 \cos t} \left[\partial_t + \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos t} \partial_x \right], \\ n &= \frac{\cos t}{(1 + \sin t)^2} \partial_t - \partial_x, \\ m &= \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \sin t)} \left[\partial_z + \frac{i}{\cos z} \partial_y \right], \end{aligned} \quad (38)$$

so that one gets two decoupled equations, one for $Z(z)$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \tan z \frac{dZ(z)}{dz} - V_z(z) Z(z) = 0, \quad (39)$$

where

$$V_z(z) = \frac{K_y^2 - 2K_y s \sin z + s^2}{\cos^2 z} + \Omega, \quad (40)$$

with Ω a separation constant, and one for $T(t)$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} - (1 + 2s) \tan t \frac{dT(t)}{dt} - V_t(t) T(t) = 0, \quad (41)$$

where

$$V_t(t) = \Omega + s(s+1) - K_x^2 \frac{(1 + \sin t)^4}{\cos^2 t} - 2iK_x s \left(\sin t + 2 \frac{1 + \sin t}{\cos^2 t} \right). \quad (42)$$

Again, by introducing the new variable $\theta = \pi/2 + z$ Eq. (39) takes the same form of Eq. (34), and with $\Omega = -l(l+1)$, with $l, m = K_y$ integers or half-integers and $s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2$, its solutions are the spin-weighted spherical harmonics, with spin-weight s , generalizing the results already given for the Dirac field.

To accomplish the task of extending this description all over the spacetime it is obviously necessary to match the equations for the various spin fields also in the other two regions of type N and in the Minkowski portion. This can be done for spin $s = 1$ in complete analogy to what we have done for the $s = 1/2$ case. The

gravitational case $s = 2$ is to be more carefully handled because of the nonvanishing radiative contribution of the background gravitational field in the two N regions. However this analysis goes beyond the aims of the present paper and it will be studied subsequently.

3.2. Region II: single u -wave

The metric

$$\begin{aligned} g_{12} &= 2(1 + \sin u)^2, \\ g_{33} &= \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u}, \\ g_{44} &= \cos^2(u)(1 + \sin u)^2, \end{aligned} \quad (43)$$

is of Petrov type N, the NP frame (2) is principal and the Dirac equation (13) gives

$$\begin{aligned} h_1(u) &= \frac{-K_x(1 + \sin u)^2 - iK_y}{K_v \cos u} h_2(u), \\ h_2'(u) &= i \frac{K_y^2 + K_x^2(1 + \sin u)^4}{K_v \cos^2 u} h_2(u). \end{aligned} \quad (44)$$

The ordinary differential equation for $h_2(u)$ can be solved exactly

$$h_2(u) = -\sqrt{2} N \frac{K_v}{K_x + iK_y} e^{\frac{i}{K_v} [K_x^2 A(u) + K_y^2 \tan u]}, \quad (45)$$

where N is a normalization constant and the function $A(x)$ is defined by

$$A(x) = \frac{(\sin x + 8)(\cos^2 x + 2)}{2 \cos x} + 7 \tan x - \frac{15}{2} x - 12. \quad (46)$$

3.3. Region III: single v -wave

The metric

$$\begin{aligned} g_{12} &= 2(1 + \sin v)^2, \\ g_{33} &= \frac{1 - \sin v}{1 + \sin v}, \\ g_{44} &= \cos^2(v)(1 + \sin v)^2 \end{aligned} \quad (47)$$

is again of Petrov type N, the NP frame (2) is principal and the Dirac equation (16) is:

$$\begin{aligned} h_1'(v) &= i \frac{K_x^2(1 + \sin v)^4 + K_y^2}{K_u \cos^2 v} h_1(v), \\ h_2(v) &= -\frac{K_x(1 + \sin v)^2 - iK_y}{K_u \cos v} h_1(v). \end{aligned} \quad (48)$$

The solution for $h_1(v)$ is

$$h_1(v) = \sqrt{2} N e^{\frac{i}{K_u} [K_x^2 A(v) + K_y^2 \tan v]}, \quad (49)$$

where N is a normalization constant and $A(v)$ is defined in (46). Here one has the same problems matching the solution to region I as for region II.

3.4. Region IV: flat spacetime

The metric

$$g_{12} = 2, \quad g_{33} = g_{44} = 1. \quad (50)$$

is the Minkowski metric. The relation between the K-constants that comes from the Dirac equation (20) is

$$K_u K_v = K_x^2 + K_y^2 \quad (51)$$

(which corresponds to energy-momentum conservation for the test particle⁶).

A straightforward solution for the amplitudes of the wave functions is:

$$h_1 = \sqrt{2} N, \quad h_2 = -\sqrt{2} N \frac{K_v}{K_x + i K_y} = -\sqrt{2} N \frac{K_x - i K_y}{K_u}. \quad (52)$$

This list of the various cases concludes the analysis of the Dirac equation. We have seen that an explicit solution can be given completely in the two type N regions and of course in the flat Minkowski region. In the type D region the Dirac equation can be separated in its (t, z) dependence, but only the separated z equation can be solved exactly in terms of spin-weighted spherical harmonics.

3.5. Tracking the Dirac field

It is now clear how to obtain the formal solution of the Dirac equation in the four spacetime regions. However, since the general solution in region I can only be given numerically, the problem of (continuously) matching at the boundaries $I - II$ and $I - III$ can only be approached numerically. To be more explicit, consider the example of a transition from region I to region II for h_1 . Approaching the u axis ($v \rightarrow 0$) one has

$$\lim_{v \rightarrow 0} h_1(u, v) = \sqrt{\cos u} \sum_{l=|K_y|}^{\infty} C_l [T_l^{K_x}(u) {}_{1/2}Y_l^{-K_y}(\pi/2 + u, 0) + T_l^{-K_x}(u) {}_{1/2}Y_l^{K_y}(\pi/2 + u, 0)], \quad (53)$$

and this limit must coincide with the solution $h_1(u)$ of Eq. (44) in region II, so that it can be seen as a series representation for $h_1(u)$ in terms of spin-weighted spherical harmonics. But the coefficients of this expansion are not constant and thus we can no longer use the orthonormality properties of the harmonics to extract the coefficients C_l analytically.

Special cases can be studied numerically. For example, once the (K_u, K_v, K_x, K_y) parameters are assigned in region IV, the solution is continuously propagated into regions II and III without any arbitrariness, reaching the boundaries of region I.

At each crossing point a single mode solution of region I can be numerically constructed and made continuous with the cited single wave solutions of region II and III. Even if they could be superimposed, these single mode solutions can account for a qualitative description of the behaviour of the Dirac field as scattered by the gravitational waves.

In the next section the neutrino current will be analyzed separately in the four regions of the spacetime following this procedure.

4. Neutrino current

In order to study the properties of the solution and its matching across the boundary of the various regions of the spacetime, we analyze the associated neutrino current.

From the Newman-Penrose formalism, the expression for the neutrino current null vector is the following:

$$J = 2 [l |F_1|^2 + n |F_2|^2 + m (F_1 F_2^*) + \bar{m} (F_1^* F_2)] . \quad (54)$$

In terms of the formalism developed so far the neutrino current density can be expressed in the form

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{-g} J = j^u \partial_u + j^v \partial_v + j^x \partial_x + j^y \partial_y , \\ &= 2 \{ |h_2|^2 \partial_u + |h_1|^2 \partial_v + 2 \Xi \Re(h_1 h_2^*) \partial_x + 2 \Phi \Im(m(h_1 h_2^*)) \partial_y \} \end{aligned} \quad (55)$$

that can easily be specialized to the various regions by identifying the correct dependence of h_1 , h_2 , Ξ , Φ . The current conservation law in the wave interaction region results in the simple condition

$$\partial_u j^u + \partial_v j^v = 0 , \quad (56)$$

which trivially becomes $\partial_u j^u = 0$ in region II and $\partial_v j^v = 0$ in region III. Introducing the (closed) “projected current 1-form”

$$I = j^u dv - j^v du , \quad dI = 0 \quad (57)$$

allows the use of Stokes’ theorem over a bounded portion Ω of spacetime inside region I: $\int_{\partial\Omega} I = 0$. In order to get information on the interaction of the neutrino current with the colliding gravitational waves we examine the behaviour of the neutrino current vector limiting ourselves to the (u, v) plane, drawing the corresponding field lines

$$\frac{du}{dv} = \frac{J^u}{J^v} = \frac{j^u}{j^v} = \frac{|h_2|^2}{|h_1|^2} . \quad (58)$$

Along such lines the 1-form I vanishes identically by definition.

This equation can be exactly integrated in the single wave regions, giving

$$v = \frac{K_y^2}{K_v^2} \tan v + \frac{K_x^2}{K_v^2} \hat{A}(v) + C_1 \quad (59)$$

in region II and

$$u = \frac{K_y^2}{K_u^2} \tan v + \frac{K_x^2}{K_u^2} \hat{A}(u) + C_2 \quad (60)$$

in region III, where C_1 and C_2 are integration constants and

$$\hat{A}(x) = A(x) + 12. \quad (61)$$

Moreover, one can show by explicit calculation that the following remarkable property holds (in the single wave regions only): the (null) neutrino current rescaled by the wavefront volume element

$$J_r^\alpha = \sqrt{g_{33} g_{44}} J^\alpha \quad (62)$$

is geodesic, i.e. satisfies a speciality property as discussed by Wainwright¹³.

The lines of the neutrino current are plotted in Figs. 2-4 for selected values of the (global) parameters K_x and K_y for a particle entering the single u -wave region from the flat spacetime regime, with different values of energy (i.e. for different values of K_v). In regions II and III the integral curves of the current density are null geodesics.

In all the plots, the corresponding null geodesics are superimposed on the current lines. These are the same in the single wave region but evolve differently in the interaction region. Several different mode current lines are plotted, entering the collision wave region, i.e. a sort of mode-by-mode analytical extension of the single

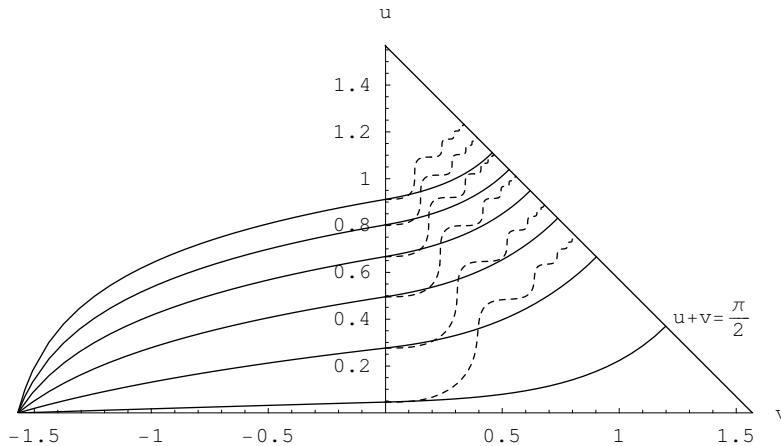


Fig. 2. Several lines of the current field are plotted here, corresponding to the case $K_x = 1$, $K_y = 1/2$, $0.2 < |K_v| < 2.2$, $l = 1/2$, where the particle is conventionally set to enter the single-wave zone at the point $(-\pi/2, 0)$. For $v < 0$ the lines follow geodesic paths in this (u, v) slice, while in region I they decouple (current lines are dashed, geodesic lines are solid). The current clearly oscillates around $u - v = \text{const.}$ axes, damping its oscillations as the horizon (the oblique line at the right) is approached.

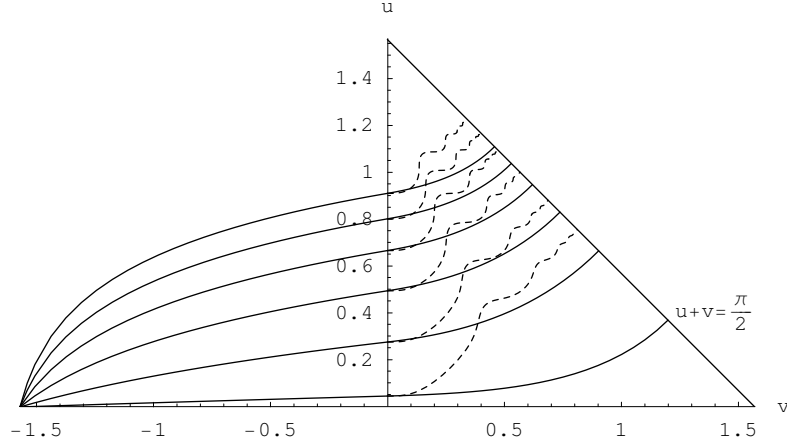


Fig. 3. Figure 2 repeated for $l = 3/2$, showing the influence of this parameter: it just slightly changes the amplitude of the oscillations, while having almost no effect on the horizon-crossing value of the field lines.

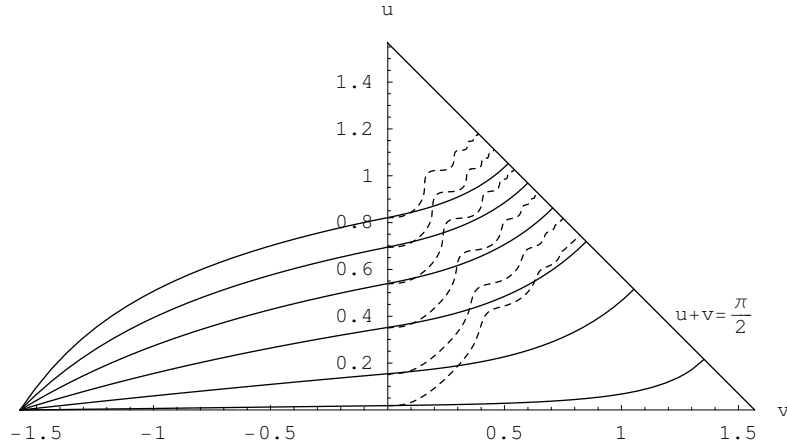


Fig. 4. Figure 3 repeated with instead $K_y = 3/2$. Neither the current lines nor the geodesics change qualitatively.

wave region current is attempted, since the general solution for $h_1(u, v)$ and $h_2(u, v)$ is not available here. These current lines are also superimposed on the geodesics. In any case, this is enough to study the general behaviour of the process: in the interaction region (considering the single modes for various l as elementary solutions of the Dirac equation) the single mode neutrino current is no longer geodesic, i.e. the helicity of the Dirac particle couples to the spacetime curvature; for generic

values of K_x and K_y , this current shows a typical oscillatory behaviour that is more and more damped as one approaches the horizon; for $K_x = 0$ the behaviour is rather different in the sense that the oscillations are not as damped as in all the other cases, including the companion one $K_y = 0$.

It is worth noting that once again the ∂_x direction has special properties which we have studied in terms of Papapetrou fields and Killing directions in a previous paper⁶.

5. Concluding remarks

The Dirac equation in the background spacetime of two colliding gravitational waves with parallel polarization is studied in detail in the Newman-Penrose formalism. Explicit results have been considered for the so called Ferrari-Ibañez degenerate solution. In this case the equation is separated in all the four spacetime regions, but the integration is complete in the single wave and flat spacetime regions only. In the collision region instead, only a partial analytic form of the solution can be given, involving the spin-weighted spherical harmonics. Continuously matching the solution across the regions' boundaries is briefly discussed too. The characteristics of the associated neutrino current are analysed, showing that it is geodesic in the single wave regions, and the results are graphically summarized (see figs. 2-6).

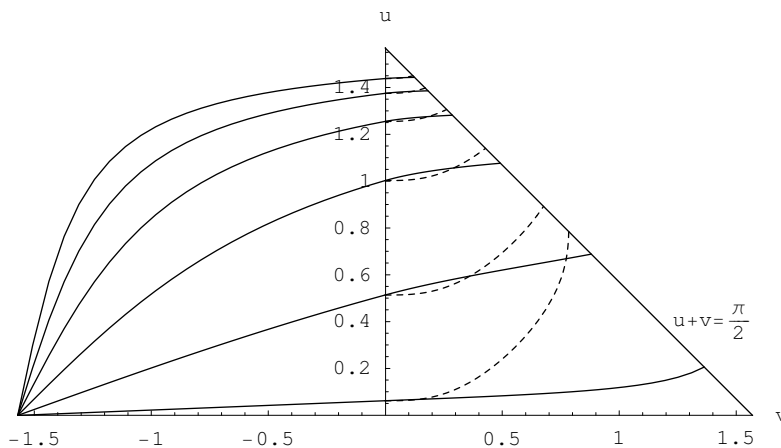


Fig. 5. Figure 2 repeated for $K_x = 0$, $K_y = 1/2$, $0.1 < |K_v| < 1.1$, $l = 1/2$. This choice of K_x changes the behaviour of the current field in region I: the lines of force do not oscillate around directions perpendicular to the horizon (i.e. around fixed values of z) anymore and they are strongly different from geodesic trajectories.

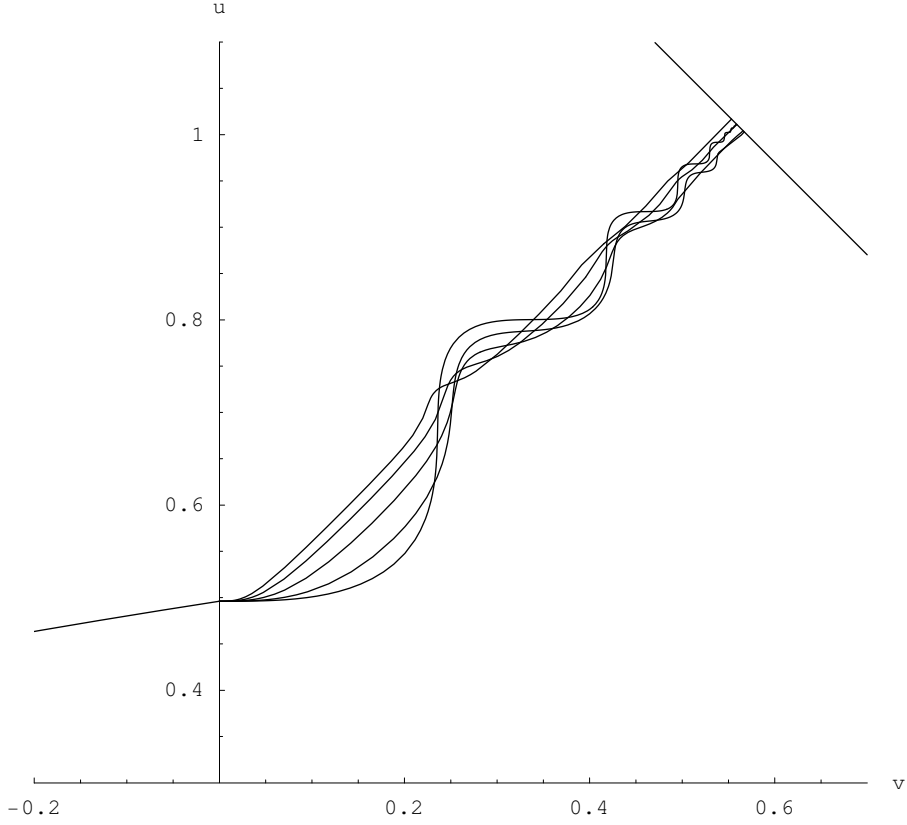


Fig. 6. This figure shows how a multiplet of current field lines forms in the transition between region II and region I. Here $K_x = 1$, $K_y = 1/2$, $|K_v| = 1$ and l goes from $1/2$ to $9/2$: the oscillations are damped for higher values of l .

Appendix. Spin-weighted spherical harmonics

(1) Analytic, implementable definition

$$\begin{aligned}
 {}_s Y_l^m(\theta, \phi) &= e^{i m \phi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+s)!(l-s)!}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2l} \\
 &\times \sum_{r=-l}^l (-1)^{l+m-r} \binom{l-s}{r-s} \binom{l+s}{r-m} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{2r-m-s} \quad (63)
 \end{aligned}$$

(2) Compatibility with spherical harmonics

$${}_0 Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) \quad (64)$$

(3) Conjugation relation

$${}_s Y_l^{m*}(\theta, \phi) = (-1)^{m+s} {}_{-s} Y_l^{-m}(\theta, \phi) \quad (65)$$

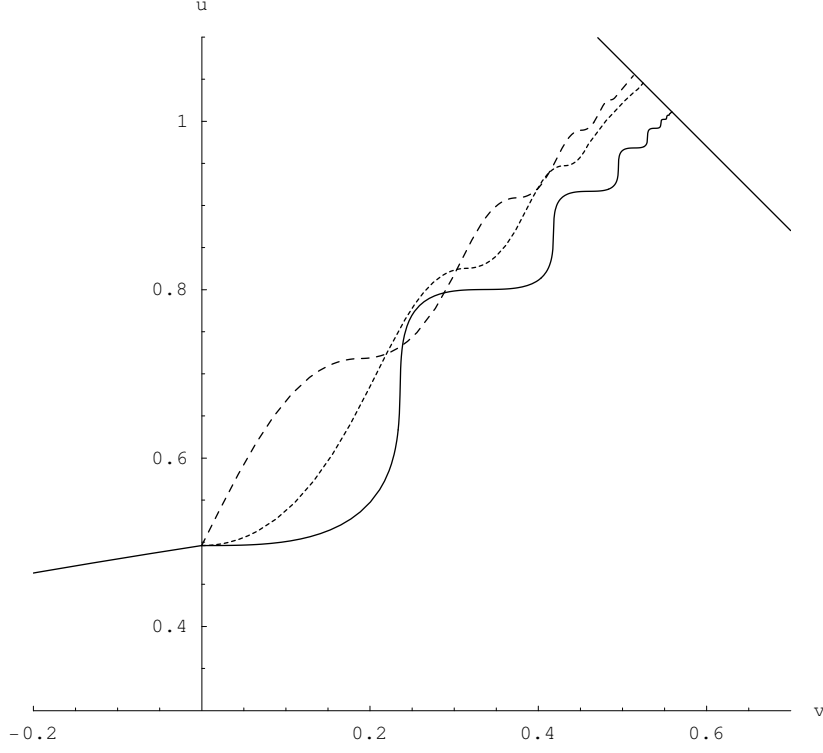


Fig. 7. Here $|h_1|$ and $|h_2|$ (the widely and finely dotted lines, respectively) are plotted, with $K_x = 1$, $K_y = 1/2$, $|K_v| = 1/8$ and $l = 1/2$, and compared to the current (solid line).

(4) Orthonormality relation

$$\int d\Omega [{}_s Y_l^{m*}(\theta, \phi)] [{}_s Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi)] = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (66)$$

(5) Completeness relation

$$\sum_{l,m} [{}_s Y_l^{m*}(\theta, \phi)] [{}_s Y_l^m(\theta', \phi')] = \delta(\phi - \phi') \delta(\theta - \theta') \quad (67)$$

(6) Parity relation

$${}_s Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l {}_{-s} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (68)$$

(7) Clebsch-Gordan relation

$$\begin{aligned} ({}_{s_1} Y_{l_1}^{m_1}) ({}_{s_2} Y_{l_2}^{m_2}) &= \frac{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}}{4\pi} \sum_{l,m,s} \langle l_1, l_2; m_1, m_2 | l, l_2; l, m \rangle \\ &\times \langle l_1, l_2; -s_1, -s_2 | l, l_2; l, -s \rangle \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} ({}_s Y_l^m) \quad (69) \end{aligned}$$

(8) Spin raising and lowering operators

$$\begin{aligned}
{}_s\partial^+ {}_sY_l^m &= -\sin^s \theta \left[\partial_\theta (\sin^{-s} \theta {}_sY_l^m) + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi (\sin^{-s} \theta {}_sY_l^m) \right] \\
&= \sqrt{l-s} \sqrt{l+s+1} ({}_{s+1}Y_l^m) , \\
{}_s\partial^- {}_sY_l^m &= -\sin^{-s} \theta \left[\partial_\theta (\sin^s \theta {}_sY_l^m) - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi (\sin^s \theta {}_sY_l^m) \right] \\
&= \sqrt{l+s} \sqrt{l-s+1} ({}_{s-1}Y_l^m) .
\end{aligned} \tag{70}$$

Harmonics with $s = 1/2$ and different l and m are listed in the following table.

(l, m)	${}_{1/2}Y_l^m$
$(1/2, -1/2)$	$-\frac{i}{\sqrt{2}\pi} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2)$
$(1/2, 1/2)$	$\frac{i}{\sqrt{2}\pi} e^{i\phi/2} \sin(\theta/2)$
$(3/2, -3/2)$	$-\sqrt{\frac{3}{\pi}} i e^{-3i\phi/2} \cos^2(\theta/2) \sin(\theta/2)$
$(3/2, -1/2)$	$-\frac{i}{2\sqrt{\pi}} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) (3 \cos \theta - 1)$
$(3/2, 1/2)$	$\frac{i}{2\sqrt{\pi}} e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) (3 \cos \theta + 1)$
$(3/2, 3/2)$	$-\sqrt{\frac{3}{\pi}} i e^{3i\phi/2} \cos(\theta/2) \sin^2(\theta/2)$

References

1. J.B. Griffiths, *Colliding Plane Waves in General Relativity*, Clarendon Press Oxford (1991).
2. K. Khan and R. Penrose, *Nature* (London) **229**, 185 (1971).
3. V. Ferrari and J. Ibañez, *Gen. Rel. Grav.* **19**, 385 (1987).
4. V. Ferrari and J. Ibañez, *Gen. Rel. Grav.* **19**, 405 (1987).
5. V. Ferrari and J. Ibañez, *Proc. R. Soc. Lond.* **A417**, 417 (1988).
6. D. Bini, G. Cruciani and A. Lunari, *Class. Quantum Grav.* **20**, 341 (2003).
7. M. Dorca and E. Verdaguer, *Nucl. Phys.* **B403**, 770 (1993).
8. M. Dorca and E. Verdaguer, *Nucl. Phys.* **B484**, 435 (1997).
9. U. Yurtsever, *Phys. Rev.* **D40**, 360 (1989).
10. E. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* **7**, 863 (1966).
11. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Univ. Press New York (1983).
12. S.A. Teukolsky *Astrophys. J.* / **185**, 635 (1973).
13. J. Wainwright, *J. Math. Phys.* **12**, 828 (1971).