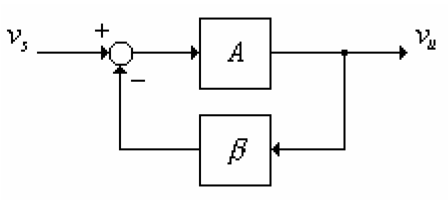
TEORIA DELLA REAZIONE E AMPLIFICATORI

- Concetto di reazione

Secondo la teoria semplificata dei controlli, un sistema in reazione può essere schematizzato per mezzo dello schema a blocchi classico mostrato in figura, nella quale il blocco di guadagno A risulta essere retroazionato dal blocco di guadagno b. Per questo modello si ha:

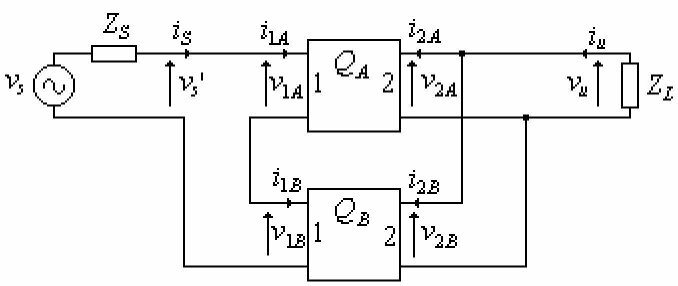


$$v_u = \frac{A}{1+bA} v_S \quad \text{(A)} \qquad \text{dove } A \text{ e } b \text{ sono i guadagni.}$$

Per tale schema si assuma come ipotesi basilare che la catena di azione (o rete amplificatrice) e quella di retroazione (o rete di reazione) siano unilaterali, ovvero che i blocchi prelevino il segnale da una parte e, dopo averlo elaborato, lo restituiscano dall'altra, ma non il viceversa (successivamente saranno mostrate le conseguenze della non unilateralità). Nel caso in cui l'ipotesi detta risulta non verificata, la teoria semplificata dei controlli non può essere applicata, e si ha la necessità di affrontare uno studio completo del sistema.
Se il blocco sulla catena di azione è un amplificatore, la presenza della reazione permette di fissare il guadagno del sistema indipendentemente dal reale guadagno dell'amplificatore:

$$v_u = \frac{A}{1+bA} v_S \qquad \text{nell'ipotesi che sia } |bA| >> 1 \text{ (B) si ha} \qquad v_u = \frac{1}{b}\frac{bA}{1+bA} v_S \approx \frac{v_S}{b}$$

Si noti che per avere amplificazione è necessario che sia $b < 1$ (condizione realizzabile per mezzo di una rete passiva), e quindi, perché sia verificata la condizione (B), deve essere $|A| >> 1$, cioè l'amplificatore deve avere di per sé un guadagno elevato.
La reazione ha inoltre l'effetto benefico di stabilizzare l'uscita, nel senso che la rende meno sensibile ai disturbi (quali potrebbero essere quelli dovuti alle fluttuazioni dell'alimentazione), e alle variazioni delle caratteristiche dell'amplificatore (come per esempio quelle dovute alle variazioni di temperatura).
Si consideri, a titolo di esempio, il circuito ottenuto per mezzo di una connessione tensione-serie tra due quadripoli. Come fatto precedentemente, ai fini dello studio di questo circuito si potrebbe decidere di procedere sostituendo a tutto ciò che si trova a valle del generatore (considerato con la relativa impedenza interna) il quadripolo equivalente, i parametri del quale possono essere ottenuti semplicemente sommando i parametri dei due quadripoli di partenza. Una scelta alternativa, intuitiva e spesso utile, consiste nel pensare il sistema come un circuito in reazione. In particolare, poiché nell'ipotesi che sia possibile trascurare la tensione sull'impedenza Z_S Q_A riceve sulla porta 1 la differenza tra la tensione erogata dal generatore e la tensione sulla



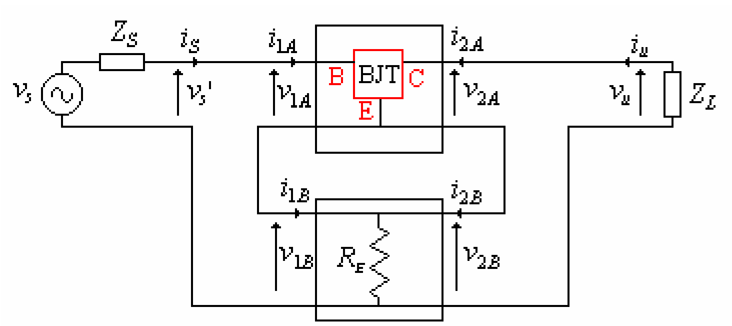
porta 1 di Q_B ($v_{1A} = v_S - v_{1B}$), questo può essere pensato come il blocco della catena di azione, e Q_B come il blocco della catena di retroazione. In altre parole il blocco Q_A appare come un sistema che produce la tensione di uscita come conseguenza della tensione d'ingresso $v_{1A} = v_S - v_{1B}$, mentre il blocco Q_B come un sistema la cui funzione è quella di leggere la tensione in uscita ed inviarla, una volta "trattata" opportunamente, al nodo sommatore. Questo tipo di approccio sistemistico presuppone, oltre all'unilateralità, che i legami tra le tensioni d'ingresso e di uscita di entrambi i blocchi siano del tipo:

$$v_u = v_{2A} = Av_{1A} \qquad\qquad v_{1B} = Bv_{2B} = Bv_u \qquad \text{(C)}$$

indipendentemente dall'impedenza di carico e di sorgente. Essendo $v_{1A} = v_S - v_{1B}$, per le (C) si ha:

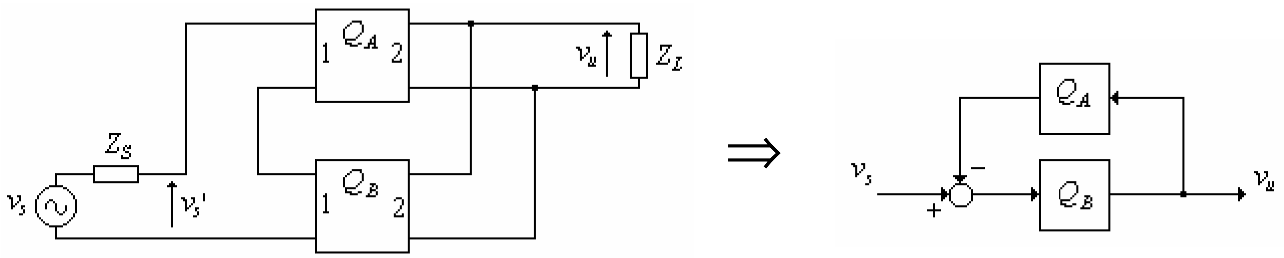
$v_{1A} = v_S - Bv_u = v_S - BAv_{1A} \Rightarrow v_{1A} = \dfrac{v_S}{1+BA}$ e quindi $v_u = Av_{1A} = \dfrac{A}{1+BA} v_S$ (D), in accordo con quanto effettivamente previsto dalla teoria dei controlli.

E' stato precedentemente dimostrato che effettivamente il legame tra la tensione sulla porta d'uscita e la tensione sulla porta di ingresso di un generico quadripolo è del tipo (C), ma nella stessa occasione si è anche visto che la costante di proporzionalità tra queste tensioni è tutt'altro che indipendente dall'impedenza di carico e di sorgente. Anche se apparentemente potrebbe sembrare che, una volta assunte come vere le (C), l'unica ipotesi che permette di ricavare la (D) sia la trascurabilità della caduta di tensione su Z_S, è necessario prestare attenzione al fatto che deve essere verificata anche la condizione di unilateralità. Infatti, tale condizione fondamentale, necessaria per poter applicare la teoria semplificata dei controlli, non è affatto detto che sia verificata. Come esempio tipico dell'impossibilità di applicare la teoria della reazione tradizionale, si consideri l'amplificatore con resistenza di reazione R_E sull'emettitore:



banalmente è possibile rendersi conto del fatto che la catena di retroazione costituita da R_E non è unidirezionale, e, come se non bastasse, se nel modello per piccoli segnali del BJT si tiene conto della presenza del generatore controllato $h_{re}v_{ce}$, neanche la catena amplificatrice risulta essere unidirezionale. Ovviamente per un simile sistema la (A) non è valida, se non in modo approssimato.

Ritornando al caso della connessione tensione-serie tra due generici quadripoli, per rendersi conto delle conseguenze che la non unilateralità ha, è sufficiente pensare al fatto che nel circuito il ruolo di Q_A può essere tranquillamente scambiato con quello di Q_B:



questo porta al risultato $v_u = \dfrac{B}{1+AB} v_s$, nettamente in contrasto con il risultato (D).

E' inoltre possibile, disattivando v_S e ponendo un generatore di corrente in parallelo a Z_L, scegliere come uscita la corrente su Z_S (che assume il ruolo di impedenza di carico) e come ingresso la corrente erogata dal generatore. Anche in questo caso la scelta è arbitraria: è possibile scegliere come rete amplificatrice Q_A e come rete di reazione Q_B, o viceversa Q_B come rete amplificatrice e Q_A come rete di reazione.

Un possibile modo di procedere, che porta a conclusioni sicuramente corrette, può essere quello di scrivere le esatte relazioni ingresso uscita, e quindi recuperare il concetto intuitivo di reazione (questo modo di affrontare il problema ha poco senso, infatti, si perde l'agilità ed il carattere intuitivo che si hanno nel metodo diretto). Si ha:

$$\begin{pmatrix} i_{1A} \\ v_{2A} \end{pmatrix} = G_A \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i_{1B} \\ v_{2B} \end{pmatrix} = G_B \begin{pmatrix} v_{1B} \\ i_{2B} \end{pmatrix} \quad \text{(E)}$$

visto il tipo di collegamento deve essere $i_{1A} = i_{1A}$ e $v_{2A} = v_{2B}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} i_{1A} \\ v_{2A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{1B} \\ v_{2B} \end{pmatrix}$, che per le (E) diventa $G_A \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} = G_B \begin{pmatrix} v_{1B} \\ i_{2B} \end{pmatrix}$, poiché $G_B^{-1} = H_B$ si ha $\begin{pmatrix} v_{1B} \\ i_{2B} \end{pmatrix} = H_B G_A \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix}$, essendo $v_S^{'} = v_{1A} + v_{1B}$ e $i_u = i_{2A} + i_{2B}$, l'ultima relazione scritta diventa

$$\begin{pmatrix} v_S^{'} - v_{1A} \\ i_u - i_{2A} \end{pmatrix} = H_B G_A \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_S^{'} \\ i_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} = H_B G_A \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_S^{'} \\ i_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} + H_B G_A \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} \text{ e quindi}$$

$$\begin{pmatrix} v_S^{'} \\ i_u \end{pmatrix} = [I + H_B G_A] \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix} = [I + H_B G_A]^{-1} \begin{pmatrix} v_S^{'} \\ i_u \end{pmatrix} \quad \text{(F)}$$

ricavando $\begin{pmatrix} v_{1A} \\ i_{2A} \end{pmatrix}$ dalla prima relazione (E), si ottiene $G_A^{-1} \begin{pmatrix} i_{1A} \\ v_{2A} \end{pmatrix} = [I + H_B G_A]^{-1} \begin{pmatrix} v_S^{'} \\ i_u \end{pmatrix}$, la quale, ricordando che $i_{1A} = i_S$ e $v_{2A} = v_u$, può essere riscritta come segue

$$\boxed{\begin{pmatrix} i_S \\ v_u \end{pmatrix} = G_A [I + H_B G_A]^{-1} \begin{pmatrix} v_S^{'} \\ i_u \end{pmatrix}} \quad \text{(G)}$$

Se si decide, come fatto nell'approccio sistemistico, di trascurare la caduta di tensione su Z_S, è possibile sostituire nella relazione ottenuta v_S a $v_S^{'}$.

Si noti che la (G) mette in relazione le possibili variabili di uscita (v_u quando si immagina un generatore v_S in serie a Z_S e i_S quando si immagina come sorgente un generatore di corrente posto in parallelo a Z_L e il generatore v_S disattivato) con le possibili variabili di ingresso ($v_S \approx v_S^{'}$ nel primo caso e i_u nel secondo). Osservando la struttura dell'espressione (G), è possibile rendersi conto del fatto che questa esprime le equazioni di legame tensione corrente del quadripolo equivalente a parametri g, ovvero che $G_T = G_A [I + H_B G_A]^{-1}$ (H). Per avere conferma di quanto detto è sufficiente verificare che sia $G_T = H_T^{-1}$ (I). E' stato precedentemente dimostrato che in una connessione tensione-serie i parametri del quadripolo equivalente sono $H_T = H_A + H_B$, sostituendo questa e la (H) nella (I) si ha:

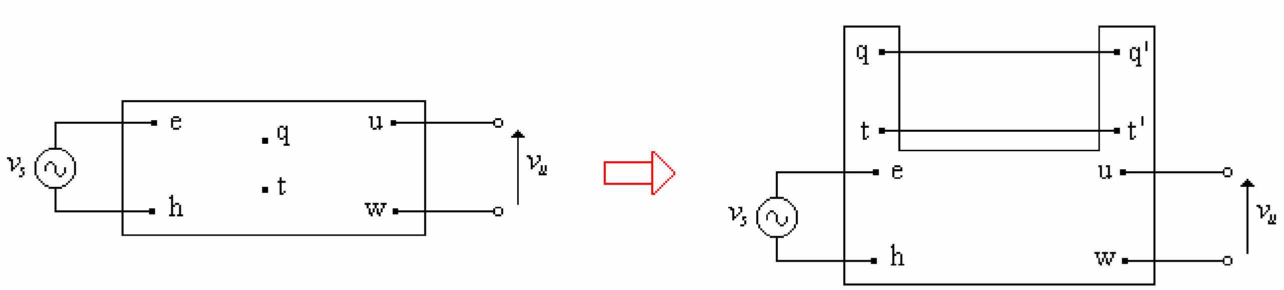
$$G_A[I + H_B G_A]^{-1} = [H_A + H_B]^{-1} \Rightarrow G_A^{-1}[I + H_B G_A] = H_A + H_B \Rightarrow G_A^{-1} + H_B = H_A + H_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_A^{-1} = H_A \quad \text{c.v.d.}$$

Come già accennato, questo modo di procedere, pur portando a risultati sicuramente corretti, non ha una grossa utilità proprio a causa del fatto che non possiede l'intuitività e la semplicità offerti invece dal metodo diretto della teoria semplificata dei controlli. Tuttavia esiste la possibilità di operare una trasformazione sulle reti al fine di ricondursi alla teoria intuitiva, tale trasformazione si basa sul teorema di scomposizione, e su di esso è possibile fondare una formulazione rigorosa e generale della teoria della reazione.
Per concludere è forse il caso di sottolineare il fatto che la reazione non è una proprietà intrinseca di un circuito, ma piuttosto un modo di pensare il circuito che, in alcuni casi, ne permette la valutazione di alcune proprietà significative.

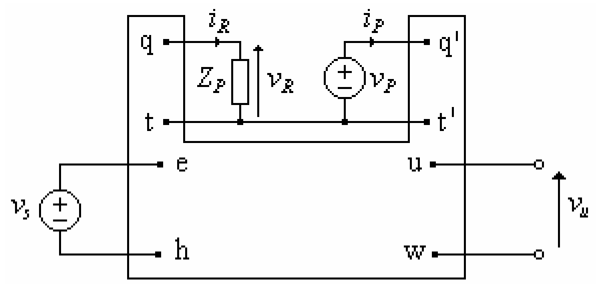
- Teorema di Scomposizione

Si consideri la rete generica lineare a quattro morsetti mostrata nella prima figura, con q e t sono stati indicati due generici punti della rete. Questa può essere ridisegnata come mostrato nella seconda figura, dove si ha $q \equiv q'$ e $t \equiv t'$.



Il teorema di scomposizione stabilisce che condizione necessaria e sufficiente affinché la rete ottenuta tagliando la connessione tra q e q', inserendo fra q e $t \equiv t'$ una impedenza Z_P e fra q' e $t \equiv t'$ un generatore indipendente di tensione v_P (vedi figura), sia equivalente a quella di partenza, è che v_P e Z_P valgano rispettivamente:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Z_P} = \dfrac{1}{Z_{IN}} + \dfrac{r}{a}(1 - bA) \\ v_P = \dfrac{a v_S}{1 - bA} \end{cases} \qquad \text{(A)}$$



dove le quantità coinvolte sono definite come segue:

$$r = \left.\frac{i_P}{v_S}\right|_{v_P=0} \quad ; \quad a = \left.\frac{v_R}{v_S}\right|_{v_P=0} \quad ; \quad g = \left.\frac{v_u}{v_S}\right|_{v_P=0} \quad ; \quad A = \left.\frac{v_u}{v_P}\right|_{v_S=0} \quad ; \quad b = \left.\frac{v_R}{v_u}\right|_{v_S=0} \quad ; \quad Z_{IN} = \left.\frac{v_P}{i_P}\right|_{v_S=0} \qquad \text{(B)}.$$

Per far vedere che effettivamente l'equivalenza tra le reti è garantita dalle (A), si osserva innanzitutto che nella rete di partenza la corrente che esce dal nodo q è uguale a quella che entra nel nodo q', ed inoltre che la differenza di potenziale tra q e t è uguale alla differenza di potenziale tra q' e t', e quindi che entrambe le condizioni, caratterizzanti il circuito di partenza, devono necessariamente essere verificate anche nel circuito scomposto perché sia garantita l'equivalenza. Per quanto detto deve essere quindi $v_R = v_P$ (C) e $i_R = i_P$ (D).
Grazie all'ipotesi di linearità della rete è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, e quindi ai fini del calcolo della tensione v_R è possibile far agire separatamente i generatori v_S e v_P:
grazie alla linearità della rete è possibile essere certi che il legame sia del tipo $v_R = C_1 v_S + C_2 v_P$ dove, per il principio di sovrapposizione degli effetti e per le definizioni (B), si ha $C_1 = \left.\frac{v_R}{v_S}\right|_{v_P=0} = a$ e $C_2 = \left.\frac{v_R}{v_P}\right|_{v_S=0} = \left.\frac{v_R}{v_u}\frac{v_u}{v_P}\right|_{v_S=0} = \left.\frac{v_R}{v_u}\right|_{v_S=0} \left.\frac{v_u}{v_P}\right|_{v_S=0} = bA$.

Per la condizione (C) deve quindi essere $av_S + bAv_P = v_P \Rightarrow v_P = \frac{av_S}{1-bA}$ (E) c.v.d.

Con considerazioni del tutto analoghe è possibile ottenere la relazione $i_R = rv_S + \frac{1}{Z_{IN}}v_P$, e quindi dalla condizione (D) $rv_S + \frac{1}{Z_{IN}}v_P = i_P$, che, essendo $i_P = i_R = \frac{v_R}{Z_P} = \frac{v_P}{Z_P}$, può essere riscritta come segue $rv_S + \frac{1}{Z_{IN}}v_P = \frac{v_P}{Z_P}$, sostituendo a v_P l'espressione (E) ricavata si ottiene:

$$rv_S + \frac{1}{Z_{IN}}\frac{av_S}{1-bA} = \frac{1}{Z_P}\frac{av_S}{1-bA} \Rightarrow r + \frac{1}{Z_{IN}}\frac{a}{1-bA} = \frac{1}{Z_P}\frac{a}{1-bA} \Rightarrow$$

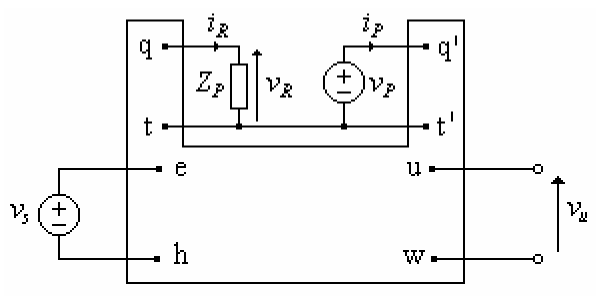
$$\Rightarrow \frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_{IN}} + \frac{r}{a}(1-bA) \quad \text{(F)} \quad \text{c.v.d.}$$

Anche il guadagno di tensione della rete può essere calcolato per mezzo del principio di sovrapposizione degli effetti:
$v_u = \left.\frac{v_u}{v_S}\right|_{v_P=0} v_S + \left.\frac{v_u}{v_P}\right|_{v_S=0} v_P = gv_S + Av_P$ ricordando la (E) $v_u = gv_S + A\frac{av_S}{1-bA} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_V = \frac{v_u}{v_S} = g + \frac{aA}{1-bA}$ (G), questa esprime quindi la funzione di trasferimento del sistema.

Il teorema di scomposizione è un modo alternativo di studiare la rete, ovvero permette di ricavare le grandezze e le proprietà di interesse in termini delle funzioni caratterizzanti A, bA, a ecc, senza alcun riferimento al concetto di reazione. Tuttavia i risultati che si ottengono applicando il teorema di scomposizione sono del tutto analoghi a quelli che si ottengono per mezzo degli approcci tradizionali della reazione. Si presti attenzione al fatto che, grazie alla presenza del termine al denominatore $1-bA$, la funzione di trasferimento

(G) è analoga alla funzione di trasferimento prevista dalla teoria semplificata dei controlli per un sistema retroazionato. Si intuisce pertanto che il teorema di scomposizione permette di pensare una generica rete lineare come una rete ad anello chiuso, con il vantaggio che il concetto di reazione, così facendo, è definito in maniera rigorosa ed è valido qualunque sia la struttura del sistema lineare. E' possibile dire che una rete è reazionata rispetto ad una prescelta scomposizione quando nella funzione di trasferimento figura il termine $1-bA$ (differenza di ritorno o fattore di reazione), e quindi quando si ha $bA \neq 0$.

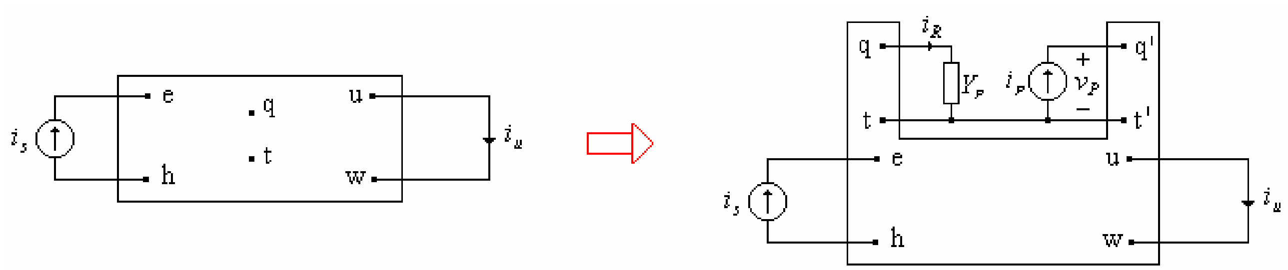
In particolare, con riferimento alla rete scomposta mostrata in figura, assume il significato di catena di azione, e quindi di collegamento diretto tra ingresso ed uscita, la rete i cui morsetti d'ingresso sono q' e t', i cui morsetti d'uscita sono u e w, e caratterizzata dalla funzione di trasferimento A. Assume invece il significato di catena di retroazione, e quindi di collegamento diretto tra uscita ed ingresso, la rete i cui morsetti d'ingresso sono u e w, i cui morsetti d'uscita sono q e t, e caratterizzata dalla funzione di trasferimento b.



Si definisce anello di reazione la rete con ingresso la porta q' t', e con uscita la porta q t; la sua funzione di trasferimento può essere valutata calcolando il rapporto $\frac{v_R}{v_P}$ quando $v_S = 0$, servendosi delle definizione (D) risulta immediato verificare che $\left.\frac{v_R}{v_P}\right|_{v_S=0} = bA$ (guadagno di anello).

Le funzioni di rete a e g assumono rispettivamente il significato di attenuazione di ingresso e di coefficiente di perdita. Quest'ultimo tiene conto della non unilateralità della rete, e quindi, i qualche modo, della non unilateralità della catena di reazione.

Alternativamente alla scomposizione in tensione, è possibile applicare ad una generica rete lineare una scomposizione in corrente, ovvero il teorema di scomposizione può essere enunciato per mezzo delle correnti d'ingresso e d'uscita:



in questo caso, condizione necessaria e sufficiente perché le due reti di figura siano equivalente è che:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Y_P} = \dfrac{1}{Y_{IN}} + \dfrac{r}{a}(1-bA) \\ i_P = \dfrac{a i_S}{1-bA} \end{cases}$$

dove le funzioni di rete sono definite come segue

$$r = \left.\frac{v_P}{i_S}\right|_{i_P=0} \;;\quad a = \left.\frac{i_R}{i_S}\right|_{i_P=0} \;;\quad g = \left.\frac{i_u}{i_S}\right|_{i_P=0} \;;\quad A = \left.\frac{i_u}{i_P}\right|_{i_S=0} \;;\quad b = \left.\frac{i_R}{i_u}\right|_{i_S=0} \;;\quad Y_{IN} = \left.\frac{i_P}{v_P}\right|_{i_S=0} .$$

Analogamente a come fatto nel caso precedente per il calcolo del guadagno di tensione, è possibile verificare che il guadagno di corrente è: $A_I = \frac{i_u}{i_S} = g + \frac{aA}{1-bA}$.

In generale, indicando con G_S la grandezza d'ingresso e con G_u quella di uscita, si ha:

$$\begin{cases} \frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_{IN}} + \frac{r}{a}(1-bA) \\ v_P = \frac{aG_S}{1-bA} \end{cases} \Rightarrow \text{s. in tensione} \qquad \begin{cases} \frac{1}{Y_P} = \frac{1}{Y_{IN}} + \frac{r}{a}(1-bA) \\ i_P = \frac{aG_S}{1-bA} \end{cases} \Rightarrow \text{s. in corrente}$$

$$r = \left.\frac{i_P / v_P}{G_S}\right|_{v_P / i_P=0} \;;\quad a = \left.\frac{v_R / i_R}{G_S}\right|_{v_P / i_P=0} \;;\quad g = \left.\frac{G_u}{G_S}\right|_{v_P / i_P=0} \;;\quad A = \left.\frac{G_u}{v_P / i_P}\right|_{G_S=0} \;;\quad b = \left.\frac{v_R / i_R}{G_u}\right|_{G_S=0} \;;$$

$$Z_{IN} / Y_{IN} = \left.\frac{v_P}{i_P}\right|_{G_S=0} \Bigg/ \left.\frac{i_P}{v_P}\right|_{G_S=0} \;;\; A = \frac{G_u}{G_S} = g + \frac{aA}{1-bA} \qquad \text{(x/y = s. in tensione / s. in corrente).}$$

Nota: la reazione si dice negativa se $|1-bA| > 1$, positiva altrimenti.

- Tipi di reazione

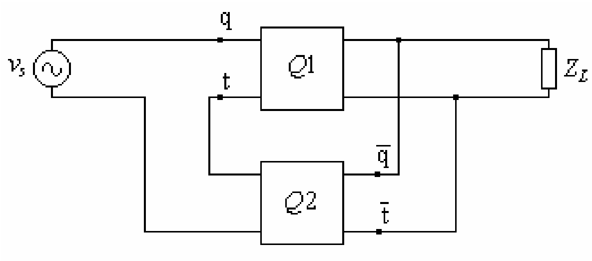
In generale la reazione di un sistema può appartenere ad una (in realtà, come sarà chiaro, appartiene a due categorie) delle categorie di seguito riportate:

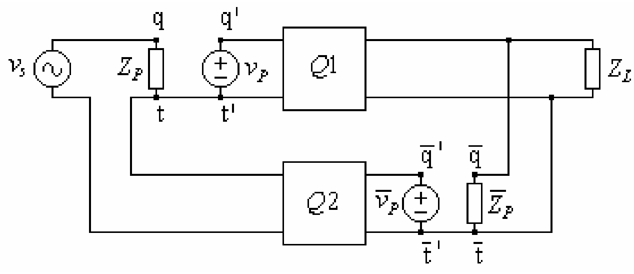
Tensione. La reazione è di tipo tensione se esiste una scomposizione (di tensione o di corrente) in uscita (applicata cioè a due punti della rete direttamente connessi ai morsetti d'uscita) per la quale Z_P (o Y_P) risulta essere in parallelo all'impedenza di carico Z_L;

Corrente. Perché la reazione sia di tipo corrente deve esistere una scomposizione in uscita per quale Z_P (o Y_P) risulti in serie a Z_L;

Serie. In questo caso la condizione che è necessario sia verificata riguarda l'ingresso, infatti, deve esistere una scomposizione in ingresso (applicata a due punti della rete direttamente connessi ai morsetti d'ingresso) per la quale Z_P (o Y_P) risulta in serie al generatore di tensione d'ingresso v_S (più in generale al generatore equivalente d'ingresso);

Parallelo. Analogamente in questo caso Z_P (o Y_P) deve risultare in parallelo al generatore d'ingresso.

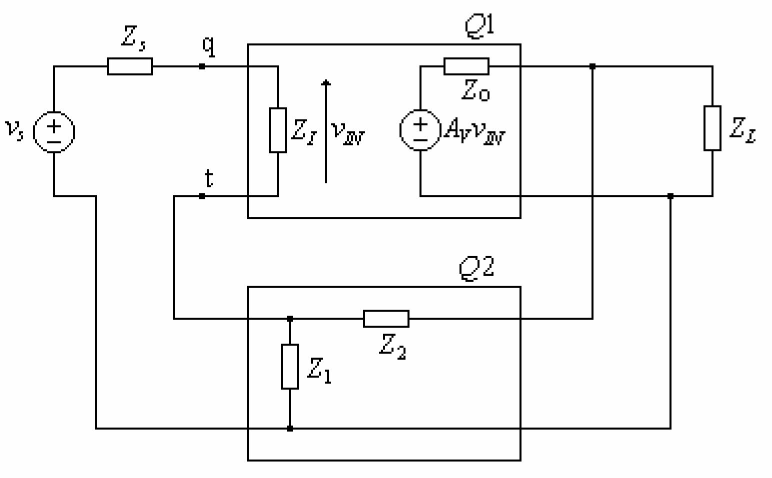




Per esempio, dati due quadripoli Q1 e Q2, tra i quali vi è una connessione di tipo tensione-serie (vedi prima figura), applicando il teorema di scomposizione tra q e t e tra q' e t', si ottiene il circuito mostrato nella seconda figura. E' immediato notare che Z_P è in serie a v_S, e $\overline{Z}_P$ è in parallelo a Z_L, ed inoltre che tali condizioni risultano verificate indipendentemente dal modo in cui è applicato il teorema di scomposizione in ingresso e in uscita. Pertanto la reazione si dirà, in questo caso, tensione-serie.
Vale la regola secondo cui il tipo di reazione di un sistema ottenuto connettendo due quadripoli, coincide, appunto, con il tipo di connessione tra i due quadripoli (questo grazie a come è stata pensata la classificazione delle reazioni).

- Esempio: Amplificatore con reazione tensione-serie

Si consideri l'amplificatore unilaterale con reazione tensione-serie, mostrato in figura:



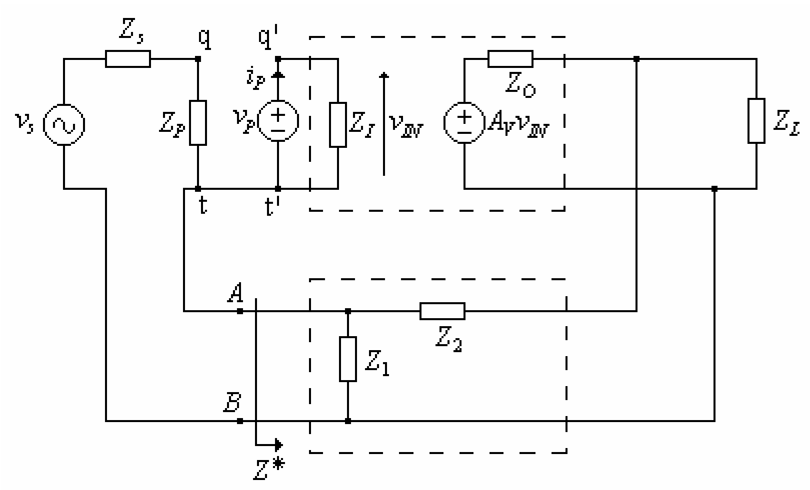
per poter affrontare lo studio servendosi della teoria semplificata dei controlli, bisogna fare l'ipotesi che i blocchi siano unilaterali (si noti che, anche se Q1 lo è, non c'è ragione perché lo sia anche Q2) ed inoltre che il guadagno di ogni singolo blocco sia indipendente dall'impedenza d'ingresso e di carico, in altre parole è necessario trascurare l'effetto caricante di Z_L, Z_S e l'effetto caricante mutuo tra Q1 e Q2. In questo modo è possibile assumere che i guadagni dei due quadripoli siano quelli che sarebbero se ognuno di essi fosse sconnesso dal resto del circuito, e quindi non avesse alcun carico sull'uscita. Per quanto detto i guadagni di Q1 e Q2 sono rispettivamente $A = A_V$ e $b = \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$, e per quanto riguarda la funzione di trasferimento complessiva si ha:

$$\frac{v_u}{v_S} = \frac{A}{1+bA} = \frac{A_V}{1+\left(\dfrac{Z_1}{Z_1+Z_2}\right)A_V}, \quad \text{se} \quad \left|\left(\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\right)A_V\right| >> 1 \quad \text{diventa} \quad \frac{v_u}{v_S} \approx= \frac{1}{\dfrac{Z_1}{Z_1+Z_2}} = \frac{1}{b}.$$

Poiché le ipotesi fatte sono fortemente irrealistiche, si ha la necessità di studiare il circuito in maniera corretta, questo può essere fatto applicando il teorema di scomposizione come mostrato in figura, ovvero operando una scomposizione in tensione tra i punti q e t. Si ricordi che:

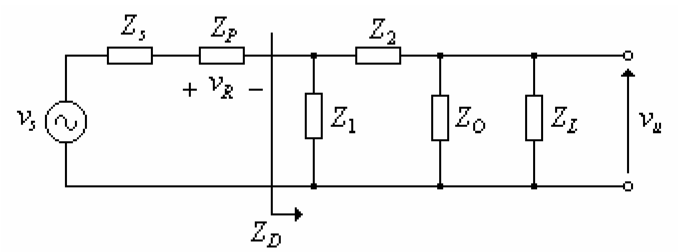
$$v_P = \frac{a v_S}{1-bA}, \quad \frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_{IN}} + \frac{r}{a}(1-bA), \quad r = \left.\frac{i_P}{v_S}\right|_{v_P=0}, \quad a = \left.\frac{v_R}{v_S}\right|_{v_P=0}, \quad g = \left.\frac{v_u}{v_S}\right|_{v_P=0}, \quad A = \left.\frac{v_u}{v_P}\right|_{v_S=0},$$

$$b = \left.\frac{v_R}{v_u}\right|_{v_S=0}, \quad Z_{IN} = \left.\frac{v_P}{i_P}\right|_{v_S=0}.$$



Si osservi che in tale circuito la quantità A_V è il guadagno a vuoto del quadripolo Q1 ($A_V v_{IN}$ è il generatore equivalente di Thevenin ottenuto tagliando ai terminali di uscita del quadripolo), ma questo non significa che si sta assumendo un guadagno costante per Q1, infatti in realtà la presenza dell'impedenza di carico provoca un abbassamento del guadagno. Questo, nel modello considerato, è tenuto in conto per mezzo dell'impedenza d'uscita Z_O (impedenza equivalente di Thevenin). Inoltre A_V è indipendente dall'impedenza del generatore d'ingresso, non per qualche ipotesi semplificativa, ma bensì perché questo è definito come il rapporto tra la tensione d'uscita a vuoto e la tensione ai morsetti d'ingresso del quadripolo (e non la tensione a vuoto del generatore d'ingresso).

Per il calcolo di r , a e g il circuito da considerare è quello ottenuto ponendo nel circuito precedente $v_P = 0$. Si ha:



dove $Z_D = Z_1 // \left[Z_2 + (Z_O // Z_L) \right]$.

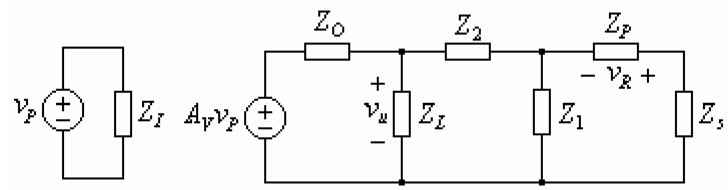
E' possibile procedere come mostrato di seguito:

$$i_P = 0 \Rightarrow r = \frac{i_P}{v_S} = 0; \quad \frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_{IN}} + \frac{r}{a}\left(1 - bA\right) = \frac{1}{Z_{IN}} \Rightarrow Z_P = Z_{IN} \quad \text{(A);}$$

$$a = \frac{v_R}{v_S} = \frac{v_S \dfrac{Z_P}{Z_S + Z_D + Z_P}}{v_S} = \frac{Z_P}{Z_S + Z_D + Z_P} \quad \text{(B);}$$

$$g = \frac{v_u}{v_S} = \frac{v_D \dfrac{Z_O // Z_L}{Z_O // Z_L + Z_2}}{v_s}$$ essendo $$v_D = v_S \frac{Z_D}{Z_D + Z_S + Z_P}$$ si ha

$$g = \frac{Z_D}{Z_D + Z_S + Z_P} \frac{Z_O // Z_L}{Z_O // Z_L + Z_2} \quad \text{(C).}$$



Per il calcolo di A, b e Z_{IN}, dovendo essere $v_S = 0$, il circuito da considerare è quello di figura (si noti che $A_V v_{IN} = A_V v_p$). Si ha:

$$A=\frac{v_u}{v_P}=\frac{1}{v_P}A_V v_P\frac{Z_L//[Z_2+Z_1//(Z_P+Z_S)]}{Z_L//[Z_2+Z_1//(Z_P+Z_S)]+Z_O}=A_V\frac{Z_L//[Z_2+Z_1//(Z_{IN}+Z_S)]}{Z_L//[Z_2+Z_1//(Z_{IN}+Z_S)]+Z_O}\quad\text{(D)};$$

$$b=\frac{v_R}{v_u}=\frac{-v_u\frac{Z_1//(Z_P+Z_S)}{[Z_1//(Z_P+Z_S)]+Z_2}\frac{Z_P}{Z_P+Z_S}}{v_u}=-\frac{Z_1//(Z_P+Z_S)}{Z_1//(Z_P+Z_S)+Z_2}\frac{Z_P}{Z_P+Z_S}=$$

$$=-\frac{Z_PZ_1(Z_P+Z_S)}{(Z_1+Z_P+Z_S)(Z_P+Z_S)[Z_1//(Z_P+Z_S)+Z_2]}=-\frac{Z_PZ_1}{(Z_1+Z_P+Z_S)\left[\frac{Z_1(Z_P+Z_S)}{(Z_1+Z_P+Z_S)}+Z_2\right]}=$$

$$=-\frac{Z_PZ_1}{Z_1(Z_P+Z_S)+Z_2(Z_1+Z_P+Z_S)}=-\frac{Z_PZ_1}{Z_1Z_P+Z_1Z_S+Z_2Z_1+Z_2Z_P+Z_2Z_S)}=$$

$$=-\frac{Z_PZ_1}{Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)(Z_P+Z_S)}\quad\text{(E)};$$

$$Z_{IN}=\frac{v_P}{i_P}=Z_I\quad\text{(F)}.$$

Dalla (F) si capisce quindi che il parametro Z_{IN} assume il significato di impedenza d'ingresso della catena di azione, nel caso in cui questa sia unilaterale. Risulta semplice inoltre rendersi conto del fatto che come conseguenza dell'unilateralità si ha $r=0$, infatti, se in serie a Z_I ci fosse stato un generatore di tensione controllato dalla tensione d'uscita, anche per $v_P=0$ si avrebbe avuto $i_P\neq 0$, e quindi $r\neq 0$. In particolare, se il generatore eroga la tensione $h_r v_u$, si ha $r=-\frac{h_r v_u}{v_S Z_I}$, essendo, come visto nel calcolo di g, la tensione d'uscita $v_u=v_D\frac{Z_O//Z_L}{Z_O//Z_L+Z_2}=v_S\frac{Z_D}{Z_D+Z_S+Z_P}\frac{Z_O//Z_L}{Z_O//Z_L+Z_2}$ (in presenza del generatore controllato, il calcolo non cambia), si ottiene $r=-\frac{h_r}{Z_I}\frac{Z_D}{Z_D+Z_S+Z_P}\frac{Z_O//Z_L}{Z_O//Z_L+Z_2}$. Esiste quindi un legamene diretto tra r e h_r, di conseguenza r è una misura dell'influenza che l'uscita dell'amplificatore ha sull'ingresso, tenuto conto dell'effetto caricante di Z_L, Z_S e del quadripolo in reazione Q2. Confrontando i risultati (D) ed (E) i guadagni associati ai quadripoli nella trattazione semplificata, è immediato rendersi conto che il trascurare l'effetto caricante della rete esterna sui blocchi di azione e di reazione, ed il supporre Q2 unilaterale, porta a commettere grossi errori.

E' stato già dimostrato che il guadagno di una generica rete può essere espresso per mezzo dei sei parametri coinvolti nel teorema di scomposizione come segue:

$$A_{TOT}=g+\frac{aA}{1-bA}=g-\frac{a}{b}\frac{(-bA)}{1-bA}\qquad\text{(G)}$$

questa, nell'ipotesi che sia $\boxed{|bA|>>1}$ (H) diventa $A_{TOT}=g-\frac{a}{b}\frac{(-bA)}{1-bA}\approx g-\frac{a}{b}$, in genere il termine g assume importanza solo alle alte frequenze, quindi $A\approx-\frac{a}{b}$, ancora, nell'ipotesi che sia $\boxed{|Z_I+Z_S|>>|Z_D|=|Z_1//[Z_2+(Z_O//Z_L)]|}$ (I) per a è possibile utilizzare la seguente espressione semplificata $a = \frac{Z_P}{Z_S + Z_D + Z_P} \approx \frac{Z_I}{Z_S + Z_I}$ (si ricordi che $Z_P = Z_{IN} = Z_I$), quindi si ha $A_{TOT} \approx -\frac{1}{b}\frac{Z_I}{Z_S + Z_I}$, per la (E) $A_{TOT} \approx \frac{Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_2)(Z_I + Z_S)}{Z_1}\frac{1}{Z_S + Z_I}$, facendo a questo punto una terza ipotesi $\boxed{|Z_I + Z_S| >> |Z_1|}$ (L), si ottiene:

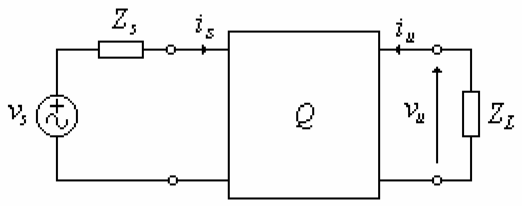
$$A_{TOT} \approx \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_I + Z_S)}{Z_1}\frac{1}{Z_S + Z_I} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \quad \text{(M)}$$

questo risultato è esattamente quello ottenuto con la trattazione semplificata nell'ipotesi che fosse $|bA| >> 1$ (attenzione che in quel caso i guadagni b e A avevano altre espressioni).
La conclusione ottenuta mette in evidenza la possibilità di fissare, per mezzo della reazione, il guadagno di un amplificatore al valore voluto, indipendentemente dall'effettivo guadagno del blocco della catena di azione, e quindi indipendentemente dalle effettive caratteristiche dell'amplificatore (che, tra l'altro, sono soggette a variazioni come quelle dovute all'influenza della temperatura di lavoro). Ovviamente l'amplificatore deve avere le caratteristiche necessarie a soddisfare le ipotesi (H), (I) e (L); per esempio, perché sia verificata la (H), è necessario con tutta probabilità che il guadagno proprio dell'amplificatore sia sufficientemente elevato. Un'altra caratteristica importante dell'amplificatore con reazione tensione-serie, che può essere notata ancora una volta dalla (M), è che il guadagno del sistema non dipende in alcun modo dalle impedenze del generatore d'ingresso e di carico (questo, se vogliamo, è scontato se si pensa al fatto che il risultato (M) è identico al risultato ottenuto partendo proprio dall'ipotesi che i guadagni dei singoli blocchi fossero indipendenti dal resto della rete). Attenzione che l'accordo tra il risultato ottenuto per mezzo della teoria semplificata dei controlli, e quello ottenuto applicando il teorema di scomposizione, e quindi per mezzo di una trattazione rigorosa, non autorizza a seguire il primo approccio, infatti, i limiti di validità della (M), imposti dalle condizioni (H), (I) e (L), sono di gran lunga più stretti rispetto a quelli previsti dalla teoria semplificata dei controlli. Delle tre condizioni che è necessario siano verificate, la più restrittiva è la (I), infatti la (H) è in maniera relativamente semplice realizzabile, e la (L) è spesso soddisfatta come conseguenza della (I).

- Classificazione degli amplificatori

Dato un generico quadripolo elettrico, i possibili legami tra una qualsiasi delle due grandezze d'ingresso v_I e i_I, e una delle due grandezze d'uscita v_u e i_u, sono quattro:

$v_u = A_V v_S$ (A); $\quad i_u = A_I i_S$ (B);
$i_u = G v_S$ (C); $\quad v_u = R i_S$ (D).



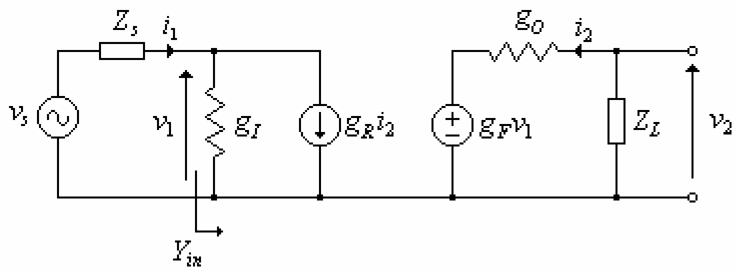
Sebbene per ogni quadripolo sia possibile utilizzare tutte e quattro le relazioni (A), (B), (C) e (D), in base alle proprietà dei coefficienti A_V, A_I, G ed R, è possibile, per mezzo di un'opportuna classificazione, distinguere quadripoli di tipo diverso. Più precisamente è opportuno classificare gli amplificatori in riferimento al tipo generatore controllato ad essi associato:

1) Amplificatori di tensione o convertitori tensione-tensione. Appartengono a questa categoria gli amplificatori il cui comportamento è assimilabile a quello di un generatore di tensione controllato in tensione. Perché ciò si verifichi è necessario che il guadagno di tensione A_V dipenda il meno possibile dall'impedenza di carico Z_L e dall'impedenza interna del generatore d'ingresso Z_S. Un amplificatore di questo tipo è ideale se A_V non dipende da Z_L e Z_S.
2) Amplificatori di corrente o convertitori corrente-corrente. Analogamente appartengo a questa categoria gli amplificatori che si comportano da generatori di corrente controllati in corrente. Gli amplificatori ideali di questo tipo sono caratterizzati da un guadagno di corrente A_I indipendente dalle impedenze Z_L e Z_S, comunque, in generale appartengono a questa categoria gli amplificatori per i quali A_I dipende poco dalle impedenze d'ingresso e di carico (amplificatori di corrente reali).
3) Amplificatori transconduttivi o convertitori tensione-corrente. In questo caso il comportamento è quello di un generatore di corrente controllato in tensione, per cui tali amplificatori sono caratterizzati da una G indipendente (nel caso ideale) dalle impedenze Z_L e Z_S.
4) Amplificatori transresistivi o convertitori corrente-tensione. Risulta a questo punto chiaro che il comportamento di questo tipo di amplificatori è quello di un generatore di tensione controllato in corrente, e che essi, nel caso ideale, sono caratterizzati da una R indipendente dalle impedenze Z_L e Z_S.

E' intuitivo comprendere che un amplificatore ideale può appartenere soltanto ad una di queste categorie: facendo riferimento per esempio al convertitore tensione-tensione, si capisce che, perché la tensione d'uscita si mantenga rigorosamente costante al variare dell'impedenza di carico, necessariamente deve variare fortemente la corrente, più precisamente, se quando l'impedenza di carico è $Z_L^{'}$ la corrente d'uscita è $i_u^{'}$, necessariamente per un'impedenza diversa $Z_L^{''}$ la nuova corrente $i_u^{''}$ deve essere tale da garantire la condizione $Z_L^{'} i_u^{'} = Z_L^{''} i_u^{''} \Rightarrow i_u^{''} = \frac{Z_L^{'} i_u^{'}}{Z_L^{''}} \neq i_u^{'}$, si capisce quindi che un amplificatore di tensione non può essere anche un amplificatore transconduttivo.

- Amplificatore di tensione

Partendo da una rappresentazione completa si vogliono trovare le condizioni che è necessario verifichi un quadripolo perché si comporti come un amplificatore di tensione. E' conveniente partire dalla rappresentazione a parametri g di un tripolo mostrata in figura (la



trattazione sarebbe identica se si considerasse un quadripolo, comunque in genere il modello per piccoli segnali di un amplificatore è un tripolo). Si ricordi che le equazioni corrispondenti a tale rappresentazione e l'espressione dell'ammettenza d'ingresso, sono:

$$i_1 = g_I v_1 + g_R i_2 \quad (A) \qquad v_2 = g_F v_1 + g_O i_2 \quad (B) \qquad Y_{IN} = \frac{i_1}{v_1} = g_I - \frac{g_F g_R}{g_O + Z_L} \quad (C)$$

Come detto precedentemente, perché il quadripolo sia un amplificatore di tensione, il guadagno di tensione $A_V = \frac{v_2}{v_S}$ deve essere indipendente dall'impedenza d'ingresso e dall'impedenza di carico, quindi, per capire quali sono le condizioni che garantiscono quanto detto la cosa migliore da fare è ricavare l'espressione di A_V:

si ha $A_V = \frac{v_2}{v_S} = \frac{v_2}{v_1}\frac{v_1}{v_S}$ (D), essendo $i_2 = -\frac{v_2}{Z_L}$ la (B) diventa $v_2 = g_F v_1 + g_O\left(-\frac{v_2}{Z_L}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow v_2 = \frac{g_F}{1+\frac{g_O}{Z_L}} v_1 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{g_F}{1+\frac{g_O}{Z_L}}$ (E), inoltre, sostituendo a tutto ciò che si trova a valle del generatore (inteso con la relativa impedenza interna) l'ammettenza equivalente (che sarebbe l'ammettenza d'ingresso), si ottiene $v_S = v_1 + Z_S i_1 = v_1 + Z_S Y_{IN} v_1 \Rightarrow \frac{v_1}{v_S} = \frac{1}{1+Z_S Y_{IN}}$,

sostituendo questa e la (E) nella (D) si conclude che $A_V = \frac{v_2}{v_S} = \frac{g_F}{1+\frac{g_O}{Z_L}} \frac{1}{1+Z_S Y_{IN}}$ (F).

Dall'espressione ricavata si vede che la condizione che garantisce l'indipendenza di A_V dalle impedenze Z_L e Z_S è $(1+Z_S Y_{IN})\left(1+\frac{g_O}{Z_L}\right) = 1 + Z_S Y_{IN} + \frac{g_O}{Z_L} + Z_S Y_{IN}\frac{g_O}{Z_L} = K$ (G), questa deve essere verificata presi due qualsiasi valori di Z_L e Z_S, quindi fissato un particolare valore per Z_S la (G) deve essere verificata per qualsiasi valore di Z_L. Per $Z_S = 0$ la (G) diventa $1+\frac{g_O}{Z_L} = K$, poiché, come detto, l'indipendenza di A_V deve essere garantita sempre, ed in questo caso particolare è garantita solo se $g_O = 0$, si conclude che una prima condizione sicuramente necessaria è appunto $g_O = 0$. Tenendo presente la condizione ottenuta, la (F) e la (G) diventano:

$$A_V = \frac{g_F}{1+Z_S Y_{IN}} = \frac{g_F}{1+Z_S\left(g_I - \frac{g_F g_R}{Z_L}\right)} \quad (H) \qquad 1+Z_S Y_{IN} = 1 + Z_S\left(g_I - \frac{g_F g_R}{Z_L}\right) = K \quad (I)$$

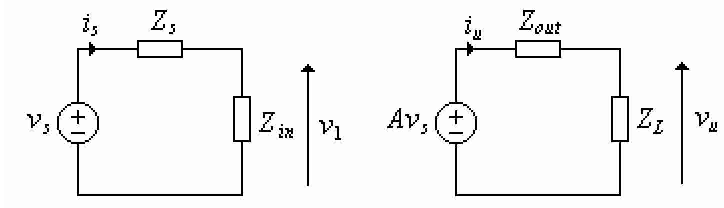
Per $Z_L \to \infty$ (nessun carico) la (I) diventa $1+Z_S g_I = K$, e con le stesse argomentazioni di prima è possibile comprendere che anche in questo caso particolare l'indipendenza di A_V deve essere garantita per qualunque valore di Z_S, e pertanto che necessariamente deve essere $g_I = 0$. Con l'aggiunta di questa nuova condizione si ha:

$$A_V = \frac{g_F}{1 - Z_S\frac{g_F g_R}{Z_L}} \quad (M) \qquad 1+Z_S Y_{IN} = 1 - Z_S\frac{g_F g_R}{Z_L} = K \quad (N)$$

Infine è immediato concludere che la (N) è verificata o per $g_F = 0$ o per $g_R = 0$, tuttavia la prima soluzione porterebbe al risultato inaccettabile $A_V = 0$, per cui l'unica soluzione significativa è $g_R = 0$.
In conclusione, affinché il tripolo di partenza sia un amplificatore di tensione è necessario che la matrice dei parametri g ad esso associata sia:

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_F & 0 \end{pmatrix}} \qquad \text{e per esso si ha} \qquad \boxed{A_V = g_F} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Y_{IN} = g_I - \dfrac{g_F g_R}{g_O + Z_L} = 0 \\ Z_{OUT} = g_O - \dfrac{g_F g_R}{g_I + \dfrac{1}{Z_S}} = 0 \end{array}}.$$

La conclusione ottenuta suggerisce quindi che un amplificatore di tensione ideale è caratterizzato da un'impedenza d'ingresso infinita e da un'impedenza d'uscita nulla.
Questo è in accordo con l'analisi qualitativa che può essere fatta modellizzando il quadripolo per mezzo dell'impedenza d'ingresso e di uscita (vedi figura):

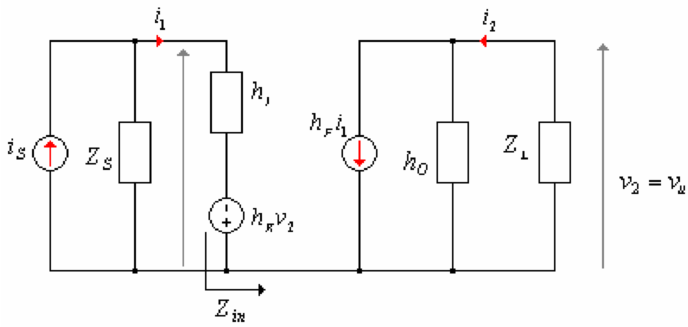


Facendo riferimento al circuito di figura è possibile ottenere le relazioni:

$$v_u = Av_S \frac{Z_L}{Z_L + Z_{OUT}} \quad \left(\Rightarrow \mathrm{A_V} = A\frac{Z_L}{Z_L + Z_{OUT}} \right) \text{ (O)} \quad \text{e} \quad v_1 = v_S \frac{Z_{IN}}{Z_S + Z_{IN}} \text{ (P)}$$

dove A è l'amplificazione a carico sconnesso.
Poiché, come precedentemente dimostrato, il guadagno della tensione v_1 (rapporto tra v_u e v_1) è indipendente dall'impedenza del generatore d'ingresso, affinché il guadagno complessivo sia il più possibile indipendente da Z_S è necessario che la tensione v_S sia il più possibile coincidente con la tensione v_1, dalla (P) si vede che se $Z_{IN} >> Z_S$ effettivamente si ha $v_1 \approx v_S$, in accordo con quanto ottenuto prima. Inoltre dalla (O) è possibile notare che, perché la tensione di uscita sia approssimativamente indipendente dall'impedenza di carico, deve essere $Z_{OUT} << Z_L$, in queste condizioni si ha inoltre $A_V \approx A$, cioè il guadagno complessivo coincide con il guadagno a carico sconnesso, che, a sua volta, risulta approssimativamente indipendente dall'impedenza del generatore solo se $Z_{IN} >> Z_S$ (cioè solo se $v_1 \approx v_S$).
Da un altro punto di vista è possibile dire che il generatore $A_V v_S$, a seguito di una variazione di Z_L, regola la corrente di uscita in maniera tale da mantenere $v_u = Z_L i_u$ costante.

- Amplificatore di corrente



Per trovare le condizioni che garantiscono un quadripolo si comporti da generatore di corrente ideale, è conveniente partire da una rappresentazione a parametri h (vedi figura), alla quale corrispondono le equazioni e l'impedenza d'ingresso:

$v_1 = h_I i_1 + h_R v_2$ (A) $\qquad i_2 = h_F i_1 + h_O v_2$ (B) $\qquad Z_{IN} = \frac{v_1}{i_1} = h_I - \frac{h_F h_R}{h_O + Y_L}$ (C).

In questo caso è necessario che l'amplificazione di corrente non dipenda dall'impedenza d'uscita e dall'impedenza interna del generatore. Quando fu definito il guadagno di corrente di un quadripolo (in quella occasione si fece riferimento ad una rappresentazione a parametri Y) si concluse, con argomentazioni sensate, che la presenza di un'impedenza in serie al generatore di tensione d'ingresso non influenza il guadagno di corrente, in questo caso le cose stanno in maniera un po' diversa, infatti il generatore d'ingresso è un generatore di corrente, e quindi, in quanto tale, è costituito da un generatore di corrente ideale con in parallelo l'impedenza interna. Pertanto non è possibile continuare a dire che il guadagno è indipendente dall'impedenza interna del generatore. Se si pensa al fatto che un generatore di tensione reale può essere trasformato in un generatore di corrente reale, quanto detto potrebbe apparire senza senso, si potrebbe infatti cadere in inganno e pensare che il problema in questione (generatore di corrente in ingresso piuttosto che di tensione) è identico al problema affrontato quando fu definito il guadagno. D'altra parte i calcoli che verranno svolti tra poco mostrano chiaramente che il guadagno dipende, in generale, dall'impedenza interna del generatore. La spiegazione del fatto che i due problemi sono in realtà diversi, risulta chiara se si pensa che il generatore di corrente ottenuto trasformando un generatore di tensione, eroga una corrente che dipende dall'impedenza interna del generatore di tensione dal quale si parte. Per meglio dire, non è vero che trasformando due generatori di tensione che a vuoto erogano la stessa tensione e con impedenze interne diverse, si ottengono due generatori di corrente uguali se non per l'impedenza interna. Infatti, anche la corrente erogata in condizioni di cortocircuito (solo in questo caso un generatore di corrente reale eroga la stessa corrente che erogherebbe se fosse ideale) è diversa.

Il calcolo dell'amplificazione $A_I = -\frac{i_2}{i_S}$ può essere svolto come segue:

essendo $v_2 = -\frac{i_2}{Y_L}$ la (B) diventa $i_2 = h_F i_1 + h_O\left(-\frac{i_2}{Y_L}\right) \Rightarrow i_2 = \frac{h_F}{1+\frac{h_O}{Y_L}} i_1$ (D), sostituendo a tutto ciò che si trova a valle del generatore l'impedenza d'ingresso, risulta immediato che

$i_1 = \dfrac{Z_S}{Z_S + Z_{IN}} i_S = \dfrac{1}{1 + Y_S Z_{IN}} i_S$, quindi la (D) diventa $i_2 = \dfrac{h_F}{1 + \dfrac{h_O}{Y_L}} \dfrac{1}{1 + Y_S Z_{IN}} i_S$, da questa si ottiene $A_I = -\dfrac{i_2}{i_S} = -\dfrac{h_F}{1 + \dfrac{h_O}{Y_L}} \dfrac{1}{1 + Y_S Z_{IN}} = -\dfrac{h_F}{1 + \dfrac{h_O}{Y_L}} \dfrac{1}{1 + Y_S \left(h_I - \dfrac{h_F h_R}{h_O + Y_L} \right)}$ (E).

Come per l'amplificatore di tensione anche in questo caso il guadagno deve essere sempre indipendente da Y_L e Y_S, ovvero per tutte le possibili coppie (Y_L, Y_S), di conseguenza non deve esistere nessun caso particolare in cui non si abbia la suddetta indipendenza. Come conseguenza di quanto detto, analizzando il caso particolare $Y_S = 0$, è possibile rendersi conto della necessità che sia verificata la condizione $h_O = 0$, imponendo il rispetto della quale la (E) diventa:

$$A_I = -\frac{h_F}{1 + Y_S \left(h_I - \dfrac{h_F h_R}{Y_L} \right)}.$$

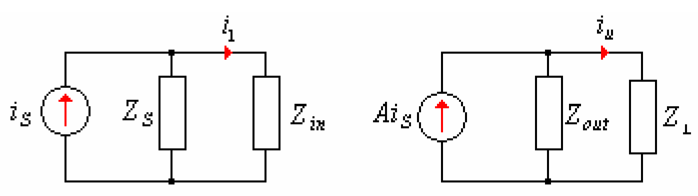
In maniera del tutto analoga, ponendosi nel caso particolare $Y_L \to \infty$, è possibile concludere che deve essere $h_I = 0$, e quindi:

$$A_I = -\frac{h_F}{1 - \dfrac{h_F h_R}{Y_L} Y_S}$$

da questa risulta banale verificare che l'unica soluzione accettabile che garantisce l'indipendenza di A_I da Y_S e Y_L, è $h_R = 0$. In definitiva si ha:

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_F & 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{A_I = h_F} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Z_{IN} = h_I - \dfrac{h_F h_R}{h_O + Y_L} = 0 \\ Y_{OUT} = h_O - \dfrac{h_F h_R}{h_I + Z_S} = 0 \end{array}}.$$

Quindi un amplificatore ideale di corrente è caratterizzato da un'impedenza d'ingresso nulla e da un'impedenza di uscita infinita. Lo stesso risultato può essere ottenuto in maniera qualitativa, modellizzando il quadripolo per mezzo delle impedenza di ingresso e di uscita. Come è possibile notare dalla figura, in questo caso è più conveniente ricorrere al modello in termini di generatori di corrente, che può essere ottenuto applicando, una volta in ingresso ed una volta in uscita, il principio del generatore equivalente di Norton (si presti attenzione al fatto che in questo caso A rappresenta il guadagno di corrente nella condizione in cui il carico sia stato sostituito con un cortocircuito):



Si ha:

$$i_u = Ai_S \frac{Z_{OUT}}{Z_{OUT} + Z_L} \quad \left(\Rightarrow A_I = A\frac{Z_{OUT}}{Z_{OUT} + Z_L} \right) \text{ (F)} \qquad i_1 = i_S \frac{Z_S}{Z_S + Z_{IN}} \text{ (G)}$$

Perché il comportamento sia effettivamente quello di un generatore di corrente ideale, ovvero che la corrente sul carico sia indipendente dal carico stesso, deve essere $Z_{OUT} >> Z_L$, infatti, in tal caso si ha $i_u \approx Ai_S \quad (\Rightarrow A_I \approx A)$. Ancora, perché il guadagno sia indipendente dall'impedenza interna del generatore di ingresso, deve essere $Z_{IN} << Z_S$.
E' possibile dare una chiave di lettura diversa e dire che, al variare dell'impedenza di carico Z_L, il generatore Ai_S regola la tensione da esso erogata in maniera tale da mantenere costante la corrente. Di conseguenza risulta evidente che un buon amplificatore di corrente è un pessimo amplificatore di tensione.

- Amplificatore transconduttivo

In questo caso conviene utilizzare una rappresentazione a parametri Y, e procedendo in maniera del tutto analoga ai casi precedenti, si ottiene:

$$\boxed{Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_F & 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{G = y_F} \qquad \boxed{\begin{matrix} Y_{IN} = 0 \\ Y_{OUT} = 0 \end{matrix}}$$

quindi un amplificatore di questo tipo è caratterizzato sia da un'impedenza di ingresso infinita, sia da un'impedenza di uscita infinita. Infatti, in questo caso il comportamento in uscita è analogo a quello di un amplificatore di corrente (ovvero la corrente deve rimanere costante al variare di Z_L), mentre il comportamento in ingresso è analogo a quello di un amplificatore di tensione (la tensione v_1 deve rimanere costante al variare di Z_S).

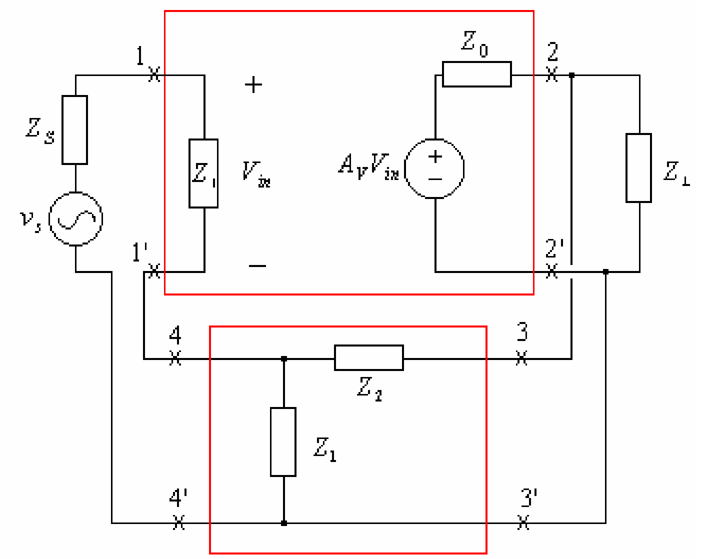
- Amplificatore transresistivo

Utilizzando la rappresentazione a parametri Z, e procedendo come nei casi precedenti, si ottiene:

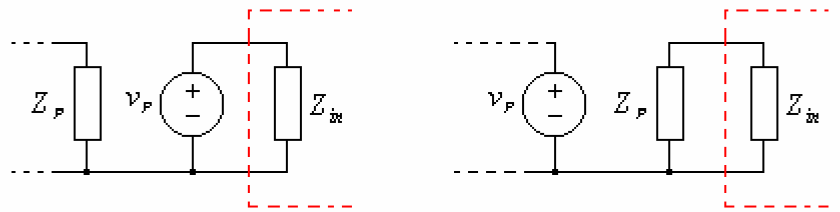
$$\boxed{Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_F & 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{R = z_F} \qquad \boxed{\begin{matrix} Z_{IN} = 0 \\ Z_{OUT} = 0 \end{matrix}}$$

in questo caso sia l'impedenza d'ingresso, sia l'impedenza di uscita, sono nulle.
Il comportamento in uscita di un amplificatore transresistivo, è simile a quello di un amplificatore di tensione (v_u indipendente da Z_L), mentre il comportamento in ingresso è analogo a quello di un amplificatore di corrente (i_1 indipendente da Z_S).

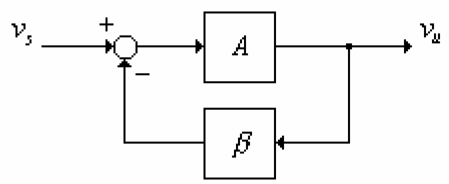
- Indipendenza di bA dalla scomposizione



Nell'applicare il teorema di scomposizione (in tensione o in corrente) tra due generici punti della rete di figura, è possibile scegliere tra due modi diversi di inserire la rete a quattro terminali fatta dal generatore v_P e dall'impedenza Z_P. Cioè, applicando per esempio il teorema di scomposizione tra i punti 1 e 1', apparentemente nulla vieta di scambiare il generatore v_P con l'impedenza Z_P. Esiste tuttavia la regola secondo la quale l'orientazione di v_P deve essere tale da dar luogo ad un corretto senso ciclico di anello (vedi figura).

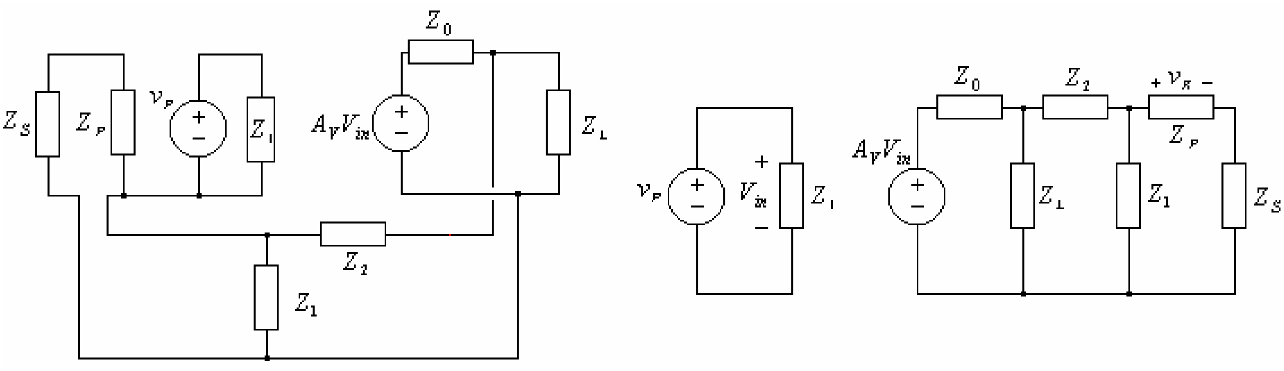


Poiché, come precedentemente detto, in una rete scomposta assume il significato di catena di azione la rete di ingresso la porta q'-t' (che nella scomposizione operata precedentemente per questo circuito, coincide con gli estremi del generatore v_P) e di uscita la porta u-w (estremi dell'impedenza di carico), e di catena di reazione la rete di ingresso la porta u-w e di uscita la porta q-t (estremi dell'impedenza Z_P), è possibile rendersi conto del fatto che effettivamente, relativamente all'orientazione suddetta, il segnale di ingresso v_S raggiunge l'uscita attraverso la catena di azione, e quindi viene retroazionato (il senso ciclico di anello è corretto). Le cose starebbero diversamente se si scegliesse l'orientazione contraria, infatti, in questo caso attraverso la catena di azione non passerebbe nulla (si avrebbe $v_{IN} = 0 \Rightarrow A_V v_{IN} = 0$), ed il segnale di ingresso raggiungerebbe l'uscita solo grazie al percorso che passa per la rete di reazione non unidirezionale. Il rispetto del senso ciclico di anello garantisce che sia verificata la condizione $bA \neq 0$, necessaria per poter dire che una rete risulta retroazionata rispetto ad una prescelta scomposizione. Precedentemente si è visto che $bA = \left.\frac{v_R}{v_P}\right|_{v_S=0}$, da questa risulta semplice capire che scegliendo di rivolgere il generatore v_P verso il generatore di ingresso, si ha $v_R = 0$ (tensione ai capi di Z_P), e quindi effettivamente $bA = 0$.



Per l'amplificatore con reazione tensione-serie, mostrato nella figura iniziale, esistono otto possibili modi di applicare il teorema di scomposizione, 2 modi per ognuna delle coppie di punti: 1-1'; 2-2'; 3-3'; 4-4' (non ha senso scomporre sul generatore di ingresso o sul

carico). Ma, poiché si ha la necessità di rispettare il senso ciclico di anello, per ogni coppia di punti si ha in realtà un solo modo di applicare il teorema, quindi in totale i modi sono quattro: scomponendo tra i punti 1-1' o 2-2' il generatore v_P deve stare a destra di Z_P; scomponendo tra i punti 3-3' o 4-4' il generatore v_P deve stare a sinistra di Z_P (solo in questo modo il senso ciclico di anello è corretto).
Facendo riferimento al caso particolare di scomposizione tra i punti 1-1', è stato dimostrato che il guadagno di anello risulta essere nullo se non è rispettato il senso ciclico di anello, tale risultato è, come detto, di validità generale, cioè il guadagno di anello è nullo in tutti quei casi in cui non è rispettato il senso ciclico. E' possibile dimostrare che per tutte le possibili scomposizione che rispettano il senso ciclico di anello si ha lo stesso guadagno di anello bA. Di seguito verrà verificata l'uguaglianza $(bA)_{1-1'} = (bA)_{3-3'}$:
poiché il collegamento in ingresso è di tipo serie, al fine di semplificare il problema, tra i punti 1-1' è conveniente applicare il teorema di scomposizione in tensione, che, tenuto conto del fatto che per il calcolo di bA è necessario sostituire un cortocircuito al generatore di ingresso ($v_S = 0$), porta ad ottenere il circuito mostrato nella prima figura, il quale tra l'altro può essere ridisegnato nella forma più leggibile mostrata nella seconda figura.



Lo svolgimento dei calcoli risulta a questo punto abbastanza semplice:

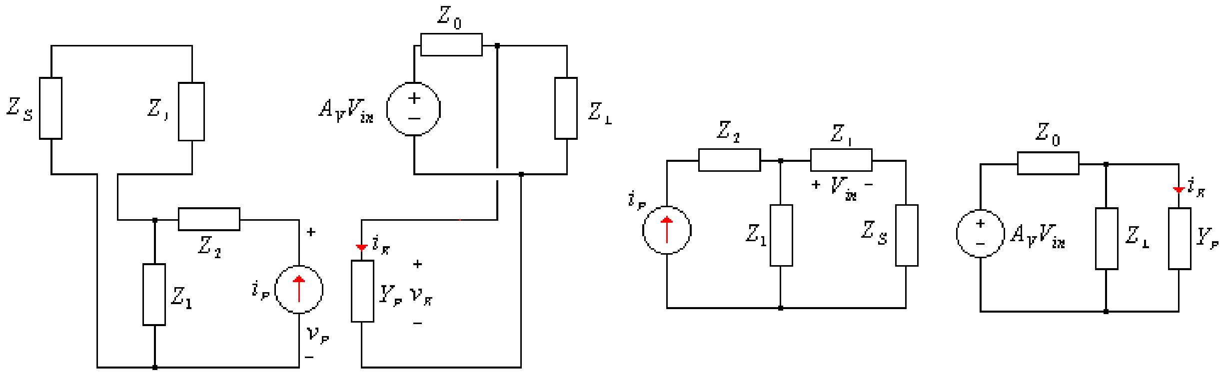
$$v_R = A_V v_{IN} \frac{Z_L //[Z_2 + Z_1 //(Z_P + Z_S)]}{Z_L //[Z_2 + Z_1 //(Z_P + Z_S)] + Z_O} \frac{Z_1 //(Z_P + Z_S)}{Z_2 + Z_1 //(Z_P + Z_S)} \left(- \frac{Z_P}{Z_P + Z_S} \right)$$

essendo $v_{IN} = v_P$ e come precedentemente dimostrato $Z_P = Z_{IN} = Z_I$ (si ricordi che Z_I è l'impedenza di ingresso del quadripolo della catena di azione), si ha

$$v_R = -A_V v_P \frac{Z_L //[Z_2 + Z_1 //(Z_I + Z_S)]}{Z_L //[Z_2 + Z_1 //(Z_I + Z_S)] + Z_O} \frac{Z_1 //(Z_I + Z_S)}{Z_2 + Z_1 //(Z_I + Z_S)} \left(- \frac{Z_I}{Z_I + Z_S} \right) \qquad \text{quindi}$$

$$bA = \left. \frac{v_R}{v_P} \right|_{v_S=0} = -A_V \frac{Z_L //[Z_2 + Z_1 //(Z_I + Z_S)]}{Z_L //[Z_2 + Z_1 //(Z_I + Z_S)] + Z_O} \frac{Z_1 //(Z_I + Z_S)}{Z_2 + Z_1 //(Z_I + Z_S)} \left(- \frac{Z_I}{Z_I + Z_S} \right).$$

Per quanto riguarda la scomposizione tra i punti 3-3', poiché il collegamento di uscita è di tipo tensione, è conveniente applicare il teorema di scomposizione in corrente. Ricordando ancora una volta che per il calcolo di bA è necessario sostituire il generatore di ingresso con un cortocircuito, risulta immediato ottenere il circuito della prima figura, che convenientemente può essere ridisegnato come mostrato nella seconda figura.



Ricordando che per la scomposizione in corrente si ha $bA = \left.\frac{i_R}{i_P}\right|_{v_S=0}$, è possibile procedere come segue:

$$i_R = \frac{A_V v_{IN}}{Z_O + Z_L // Z_P}\frac{Z_L}{Z_L + Z_P} = \frac{A_V v_{IN}(Z_L + Z_P)}{Z_O(Z_L + Z_P) + Z_L Z_P}\frac{Z_L}{Z_L + Z_P} = \frac{A_V v_{IN} Z_L}{Z_O(Z_L + Z_P) + Z_L Z_P}$$

essendo $v_{IN} = -\left(i_P \frac{Z_1}{Z_1 + Z_I + Z_S}\right) Z_I$ ed anche in questo caso $Z_P = Z_{IN}$ (infatti anche per la scomposizione 3-3' si ha $r = 0$), si ha

$$i_R = -\frac{A_V Z_L}{Z_O(Z_L + Z_{IN}) + Z_L Z_{IN}} i_P \frac{Z_1 Z_I}{Z_1 + Z_I + Z_S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bA = \left.\frac{i_R}{i_P}\right|_{v_S=0} = -\frac{A_V Z_L}{Z_O(Z_L + Z_{IN}) + Z_L Z_{IN}}\frac{Z_1 Z_I}{Z_1 + Z_I + Z_S}$$

con qualche passaggio si conclude che effettivamente $(bA)_{1-1'} = (bA)_{3-3'}$.

E' possibile dimostrare che per qualunque tipo di reazione si ha l'invarianza di bA rispetto alla scelta dei punti tra i quali effettuare la scomposizione, a patto di rispettare il senso ciclico di anello. Quindi, in una rete, una volta individuata una qualunque delle reazione precedentemente elencate, il guadagno di anello può essere visto come una proprietà della rete stessa.