Cenni storici sui numeri decimali

I.b

Prima di giungere al sistema metrico decimale, "invenzione" della rivoluzione francese, la storia registra vari passaggi nella conquista e nella padronanza delle frazioni, dei decimali, della notazione frazionale, del simbolismo.

Il nostro sistema di numerazione è detto *decimale polinomiale* perché rappresentiamo i numeri pensandoli come polinomi nelle potenze di 10. Le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sono i coefficienti di tali polinomi: ad esempio, la scrittura 5402 indica il numero $5\times10^3 + 4\times10^2 + 0\times10^1 + 2\times10^0$. Diciamo anche che il sistema è *posizionale* perché il valore di ogni cifra dipende dalla posizione che essa occupa nella scrittura del numero.

Su questo sistema è basato quello delle misure, cioè il *Sistema metrico decimale*, nel quale il passaggio da un'unità di misura ad un'altra omogenea avviene moltiplicando per una potenza di 10 con esponente intero positivo, negativo o nullo (per un cenno alle unità del *Sistema internazionale* rimandiamo alla fine del paragrafo II.b). Il Sistema metrico decimale è una "invenzione" della rivoluzione francese ed ha rappresentato la definitiva consacrazione dell'importanza, anche nell'uso quotidiano, dei numeri decimali limitati, cioè di quei numeri che possono essere scritti come frazioni con una potenza di 10 al denominatore e che, fin dalla terza elementare, siamo abituati a scrivere come numeri con virgola.

Essi hanno una lunga storia di cui diamo un breve cenno.

Le frazioni nell'antichità Uno fra i più antichi documenti matematici è di origine egiziana. Si tratta del Papiro di Rhind che lo scriba Ahmes ha trascritto nel 1650 a.C. usando documenti più antichi.

Il sistema di numerazione egiziano era decimale, perché privilegiava le potenze di 10 rappresentate con simboli speciali, e additivo, come quello dei Romani, perché i simboli venivano ripetuti, di norma non più di quattro volte sulla stessa riga, e sommati per stabilire il valore del numero.

Esempi di cifre nella scrittura geroglifica:

$$1 = |; \qquad 5 = \begin{matrix} ||| \\ || \end{matrix}; \qquad 10 = \cap; \qquad 100 = \rho$$

Il numero 243, per esempio, era scritto

$$\rho\rho\cap\cap\cap\cap|||$$

(lo stesso numero poteva essere scritto anche iniziando dalle unità).

Gli Egiziani usavano anche la scrittura ieratica. Ecco qualche esempio:

$$1 = |; \qquad 4 = \mapsto; \qquad 8 = =; \qquad 10 = \wedge; \qquad 40 = \div; \qquad 100 =)$$

Gli Egiziani non avevano un simbolo per lo zero.

Per le frazioni essi usavano un sistema piuttosto singolare: con l'eccezione di $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ (per le quali c'erano simboli specifici), scrivevano ogni altra frazione come somma di unità frazionarie con denominatori diversi; per esempio, scrivevano la frazione 3/5 come somma di 1/2 e 1/10. Nel sistema metrologico, soprattutto per le misure di capacità, gli Egiziani privilegiavano le unità frazionarie aventi per denominatore una potenza di 2.

Ecco qualche esempio, a partire dalle frazioni citate:

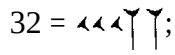
$$\frac{1}{2} = \supset; \qquad \frac{2}{3} = \text{⬭}||; \qquad \frac{3}{4} = \text{⬭}|||$$

$$\frac{3}{5} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) =$$ (leggendo da destra).

Contemporaneamente alla civiltà egiziana prosperava la civiltà assiro-babilonese; i suoi più antichi documenti matematici sono costituiti da tavolette di argilla risalenti a circa 2000 anni prima di Cristo.

Il sistema di numerazione assiro-babilonese era sostanzialmente sessagesimale perché basato sulle potenze di 60, ma intercalato con la base 10, utilizzata come base ausiliaria; inoltre era posizionale, come il nostro, ma anche additivo per i numeri fino a 59. I simboli fondamentali erano il cuneo per le unità e l'angolo per le decine. Per esempio, il nostro numero 23 era scritto come sequenza di 2 angoli e 3 cunei, il numero $95 = 1 \times 60 + 35$ era scritto con un cuneo più grande seguito da 3 angoli e 5 cunei. Non essendovi un simbolo per lo zero, si ricorreva a spaziature tra i gruppi di cifre, con esiti spesso incerti ed ambigui. Solo verso il III secolo prima di Cristo venne introdotto un simbolo, non considerato cifra, per distinguere le diverse potenze di 60 (*zero intercalare*).

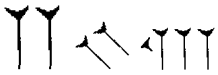
Ecco qualche esempio:

1 = ; 10 = ; 32 =  ;

Il numero 7213 ($= 2 \times 60^2 + 0 \times 60^1 + 13$) era scritto

(senza zero intercalare).

Con lo zero intercalare, il cui simbolo era , diventava



Gli Assiro-babilonesi estesero il principio posizionale anche alle frazioni. Le loro erano frazioni sessagesimali, cioè aventi come denominatore potenze di 60; ancora oggi noi le usiamo nella divisione dell'ora e del grado (1/60 *pars minuta prima*, $1/60^2$ *pars minuta secunda*), secondo la consuetudine che ci è stata tramandata dai Greci.

Ricordiamo qui, però, che gli Assiro-Babilonesi non usavano distinguere la parte frazionaria dalla parte intera, non avevano, cioè, un "punto" o una "virgola" sessagesimale. E ciò era fonte di ambiguità.

Per esempio, il numero scritto sopra poteva essere interpretato anche come:

$$2\times60^1 + 0\times60^0 + \frac{13}{60} = 120 + \frac{13}{60}.$$

I Greci si occuparono più delle proprietà intrinseche dei numeri (teoria dei numeri) che della loro rappresentazione. Il loro sistema prevalente, detto alfabetico perché usava le lettere dell'alfabeto come cifre, era decimale e additivo pressappoco come quello romano. Per le frazioni prediligevano quelle con numeratore 1, come gli Egizi, mentre nelle attività astronomiche e nelle misure di peso usavano le frazioni sessagesimali.

I Romani avevano un raffinato sistema decimale additivo e, in parte, sottrattivo, ma usavano frazioni duodecimali, cioè frazioni con denominatore potenze di 12 e loro multipli, soprattutto nelle misure di peso, con riflessi anche nel sistema monetario. Per esempio l'oncia (*uncia*), da cui deriva l'omonima unità di misura ancora in uso nei paesi anglosassoni, era 1/12 di asse, unità di misura di peso, mentre lo *scrupulum* era $\frac{1}{288} = \frac{1}{2\times12^2}$ di asse. Non è nota la ragione della scelta di queste frazioni, ma essa è stata relativamente felice, perché 12 ha diversi divisori e le operazioni con frazioni possono venire effettuate sfruttando le 12 falangi delle 4 dita (pollice escluso) di ciascuna mano; d'altra parte, non disponendo di un metodo di rappresentazione posizionale, i Romani non avrebbero avuto un reale vantaggio ad usare le frazioni decimali.

Le usarono invece i Cinesi, le cui principali opere matematiche sono di difficile datazione perché furono continuamente rielaborate da autori diversi; le due più importanti, cioè il *Classico aritmetico dello gnomone e delle orbite circolari del cielo* ed i *Nove capitoli sull'arte matematica*, sono da collocare nel IV-III secolo prima di Cristo.

Il sistema di numerazione cinese era decimale additivo moltiplicativo, perché usava nove simboli per le unità, mentre i multipli delle potenze di 10 si scrivevano anteponendo alla potenza il coefficiente

(cioè il numero per cui si moltiplica la potenza). Il valore del numero scaturiva dalla somma totale. Non era usato lo zero e perciò il sistema non era posizionale; per esempio il numero 23 era scritto = + ≡ (dove = è il 2, + è il 10, ≡ è il 3).

Coerentemente con il loro sistema di numerazione, i Cinesi usavano frazioni decimali soprattutto nei pesi e nelle misure.

Gli Indiani formarono il nostro attuale sistema posizionale, intorno al secolo VIII d.C., combinando tre principi fondamentali di origine molto antica:

1) la base decimale,
2) la notazione posizionale,
3) un simbolo diverso per ciascuna delle dieci cifre.

Non applicarono però lo stesso sistema alle frazioni, continuando ad usare quelle sessagesimali nelle attività astronomiche e quelle comuni nelle attività quotidiane. Il loro modo di scrivere le frazioni era uguale al nostro: mancava solo la linea di frazione che sarà introdotta dagli Arabi verso il 1200.

Gli Arabi adottarono il sistema di numerazione indiano, ma si comportarono con grande libertà nell'usare le frazioni.

Gli astronomi utilizzarono quasi esclusivamente le frazioni sessagesimali, i funzionari ed i commercianti prediligevano le unità frazionarie, con denominatore non superiore a 10, e con la loro somma esprimevano le frazioni comuni. Con molta prudenza i matematici arabi incominciarono ad estendere il principio posizionale decimale anche alle frazioni. Per esempio, Al-Uglidisi nel trattato *Capitoli dell'aritmetica indiana* del 952-53, usa le frazioni decimali per approssimare radici quadrate e cubiche irrazionali, ma subito dopo converte il risultato in frazione sessagesimale.

Un uso sistematico delle frazioni decimali in problemi di approssimazione si trova nel *Trattato di aritmetica* del 1172 di As-Samaw'al che introduce la terminologia "parte delle decine", "parte delle centinaia", ecc. per indicare i nostri decimi, centesimi ecc.

Fu, però, il persiano Iemshid Ibn Mesud Al-Kashi a dare, nel XV secolo, una prima trattazione sistematica e completa delle frazioni decimali nelle opere *Il trattato sulla Circonferenza del Cerchio* e *La chiave dell'Aritmetica*.

Il suo obiettivo, pienamente raggiunto, fu di costruire un sistema di frazioni nel quale, come in quello sessagesimale, tutte le operazioni si potessero effettuare seguendo le regole che si applicano ai numeri naturali.

Egli enunciò le principali regole delle operazioni con le frazioni decimali, le stesse che usiamo noi.

Le frazioni in Europa

Il sistema di numerazione indo-arabico giunse in Italia per mezzo di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci (1180 circa-1250). Mandato dal padre nell'Africa del Nord, occupata dagli Arabi, per imparare ed esercitarvi l'arte della mercatura, Leonardo studiò anche la matematica degli Arabi. Tornato a Pisa, pubblicò nel 1202 il *Liber Abaci*, in cui descriveva il sistema di numerazione indo-arabico; tale sistema, fra l'altro, rendeva molto semplice l'esecuzione delle quattro operazioni aritmetiche, per le quali fino ad allora si ricorreva all'abaco romano.

L'adozione in Italia ed in Europa del nuovo sistema di numerazione, e della conseguente aritmetica, non fu né facile né immediata, soprattutto per la decisa opposizione della corporazione dei "maestri abacisti", formata da quelle persone che, le sole, sapevano fare i calcoli con il sistema romano, e quindi tenevano i conti delle varie signorie e delle banche. Solo verso la fine del secolo XV il nuovo sistema di numerazione sostituì completamente quello romano. A titolo di curiosità diciamo che il primo libro le cui pagine sono numerate con le cifre indo-arabiche è il *Liber de remediis utriusque fortunae* del Petrarca, stampato a Colonia nel 1471.

Tuttavia anche Fibonacci, come tanti altri, continuò ad usare frazioni comuni, frazioni sessagesimali e frazioni con numeratore unitario e non frazioni decimali.

L'uso sistematico delle frazioni decimali si diffuse molto lentamente. Un primo cenno ad un sistema di "primi", "secondi", "terzi" ecc. decimali (terminologia che sarà ripresa da Stevin) fu proposto dall'astronomo Emmanuel Bonfils (1340-1377).

Una della prime opere a stampa nella quale si usano le frazioni decimali è *Die Coss* di Cristoph Rudolff (1500-1545): *Coss* è la traduzione tedesca di "cosa" termine usato, per esempio da Luca Pacioli

(1440-1515), per indicare l'incognita (che noi di solito indichiamo con *x*). *Die Coss* era un trattato di algebra, molto noto ai suoi tempi, tanto che Rudolff venne chiamato «il precettore in matematica di tutta la Germania». Rudolff ritornò sulle frazioni decimali nel trattato *Exempel Buchlin*, del 1530, nel quale insegnò anche la divisione per 10, 100, ecc. con lo spostamento della virgola.

Una particolare menzione merita il matematico francese François Viète (1540-1603) con il quale si fa iniziare il "periodo simbolico" dell'algebra. Egli condusse una vera battaglia in favore dell'adozione delle frazioni decimali al posto di quelle sessagesimali. Nel *Canon mathematicus* del 1579, scriveva: «Sessantesimi e sessantine non vanno mai usati se non raramente nella matematica, mentre millesimi e migliaia, centesimi e centinaia, decimi e decine, e progressioni simili, ascendenti e discendenti, vanno usati frequentemente o esclusivamente».

L'impulso decisivo all'uso generalizzato delle frazioni decimali, anche nell'"aritmetica pratica", fu dato dal fiammingo Simon Stevin (1548-1620), fisico, ingegnere e matematico. Il suo influsso fu così determinante che molti, a torto, lo ritennero l'inventore delle frazioni decimali. Ad esse egli dedicò l'opuscolo *De Thiende* pubblicato nel 1585 e tradotto in francese nello stesso anno con il titolo *Le Disme* (il Decimo). Il suo merito principale è di aver esposto con chiarezza, precisione e semplicità le regole di calcolo con le frazioni decimali, le stesse regole che ora si insegnano a scuola. In sostanza, il Decimo «è una specie di aritmetica, inventata per mezzo della Decima progressione» con la quale si possono fare «tutti i calcoli che si incontrano negli affari degli uomini» eseguendoli «con numeri interi senza rotti», cioè senza frazioni, ma usando un conveniente simbolismo che vedremo tra poco.

Stevin dimostrò la sua originalità e la sua lungimiranza anche suggerendo la metodica introduzione della divisione decimale di pesi e misure, pur essendo consapevole delle difficoltà che avrebbe incontrato l'attuazione di questa riforma. Passarono due secoli prima che quel suggerimento cominciasse a venire tradotto in atto: solo con la rivoluzione francese, infatti, si perfezionò ed iniziò ad imporsi il Sistema Metrico Decimale.

Con Stevin termina la storia delle frazioni decimali, ma continua quella del simbolismo decimale.

Il simbolismo

Nei sistemi di numerazione polinomiali, come il nostro, si pone il problema di distinguere la parte intera da quella decimale nella scrittura dei numeri. I simboli usati dai matematici furono diversi.

Il primo a rendersi conto del problema e a proporre una soluzione fu Al-Uglidisi. Egli suggerì di distinguere la parte intera da quella decimale ponendo un accento sopra la cifra delle unità e insistette perché tale segno fosse sempre usato. Sempre in ambiente arabo, Al-Kashi distinse la parte intera da quella decimale o scrivendola con un colore diverso o separandola con una sbarra verticale.

Ebbe questa stessa idea, senza conoscere gli scritti di Al-Kashi, Cristoph Rudolff il quale, sia in *Die Coss* che nell'*Exempel Buchlin*, usava una sbarra verticale per separare la parte intera da quella che noi chiamiamo parte decimale ed egli chiamava "resto". In *Die Coss*, per esempio, egli scrive pressappoco così: dividendo 652 per 10 si ottiene 65|2 con 65 quoziente e 2 resto.

Viète usò, in questo settore, più fantasia. Qualche volta si accontentava di scrivere la parte intera con caratteri più grandi di quelli usati per la parte decimale, altre volte le separava con una sbarra verticale, altre volte ancora usava la virgola combinata con una riga che sottolineava la parte decimale: per esempio, nella scrittura 314.159,<u>265,35</u> (in cui c'è un'evidente ridondanza di simboli) la prima virgola da sinistra è quella decimale, le altre venivano poste ogni tre cifre decimali, mentre il punto veniva posto per ogni blocco di tre cifre, partendo da destra della prima virgola.

Il grande "sponsor" dei numeri decimali, Simon Stevin, chiamava "inizio" la parte intera e la contrassegnava globalmente con il simbolo ⓪ (uno zero racchiuso in un cerchio). «Ciascuna decima parte dell'unità di inizio la chiamiamo Primo e ha segno ① (1 racchiuso in un cerchio); e la decima parte dell'unità di un primo è chiamata Secondo e ha segno ②». Seguono i Terzi, i Quarti, ecc., ciascuno con il relativo simbolo.

Ad esempio, il nostro numero 27,847 veniva scritto così da Stevin

2 7 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③.

La notazione era piuttosto complicata ed altri matematici cercarono di semplificarla: così, ad esempio, al posto del nostro 241,4 lo svizzero Joost Burgi (1552-1632) scriveva 2414 ponendo uno zero sotto la cifra 1.

Gli storici della matematica non sono unanimi nell'assegnare la "primogenitura" per l'introduzione della virgola. Alcuni la attribuiscono a Giovanni Antonio Magini (1555-1617), astronomo amico di Keplero, altri a Cristoforo Clavio (1537-1612), un gesuita pure amico di Keplero. Essi sono, invece, concordi nel ritenere che la consacrazione della virgola o del punto come separatore decimale sia da ascriversi a John Napier (1550-1617), più noto come Nepero, quello dei bastoncini per la moltiplicazione (si veda ad esempio il libro di D'Amore & Speranza citato alla pagina seguente, pp. 99-105). Nell'opera *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas, libri duo,* del 1617, egli usa indifferentemente il punto o la virgola, mentre nell'opera postuma *Mirifici logarithmorum canonis constructio* del 1619 adotta il punto decimale.

Dopo Napier l'uso del punto o della virgola decimale si diffuse gradualmente, ma divenne esclusivo solo verso la fine del secolo XVIII con l'adozione del Sistema Metrico Decimale.

Per due secoli il punto, preferito dai Paesi di area anglosassone, e la virgola, preferita dagli altri Paesi europei, convissero con i simboli precedenti e con altri inventati dopo, come il "semirettangolo" (esempio: 34|267) o la scrittura più piccola, in alto e sottolineata della parte decimale (esempio: $25^{\underline{21}}$). Anche dopo la vittoria definitiva del punto o della virgola, i matematici giocarono a scrivere la parte decimale in alto o, più spesso, in basso.

Attualmente nei calcolatori viene usato esclusivamente il punto, anche nella notazione esponenziale, preferita perché più compatta.

Ad esempio, se si usa la notazione esponenziale, anziché 0,0015 sul visore del calcolatore appare 1.5E–3, che significa $1{,}5\times10^{-3}$, cioè 1,5/1000 = 15/10 000.

Accanto alle merci esposte nei negozi con i prezzi in euro, si comincia a vedere un nuovo tipo di scrittura con la parte decimale scritta in alto a destra della parte intera e in carattere più piccolo: ad esempio, 15^{20} sta per 15 euro e 20 centesimi cioè 15,20 euro. Potrebbe essere la scrittura del prossimo futuro.

L'uso della *virgola* e del *punto* in molti Paesi stranieri è diverso da quello italiano: ad esempio, negli USA e in Gran Bretagna la scrittura 37,605.4 indica il numero che noi denotiamo con 37.605,4 (o, meglio, con 37 605,4).
Noi preferiamo seguire la tradizione italiana ed usiamo quindi la virgola per separare la parte intera dalla parte decimale di un numero; per altro, il diffondersi di calcolatrici tascabili e strumenti digitali sta rendendo sempre più popolare anche da noi l'uso del punto al posto della virgola (e non escludiamo che, nei prossimi anni, il punto sostituisca la virgola anche a scuola).
Aggiungiamo che nella notazione anglosassone, qualora la parte intera di un numero decimale sia uguale a zero, è lecito ometterla: ad esempio, si scrive semplicemente .8 invece di 0.8 per indicare il numero che noi scriviamo 0,8.

Bibliografia Per chi desidera approfondire gli argomenti trattati in questo paragrafo riportiamo alcune indicazioni bibliografiche, limitandoci a testi reperibili in lingua italiana.

Bagni G.T., 1996, *Storia della Matematica*, vol. I, Pitagora, Bologna.

Bottazzini U., Freguglia P. & Toti Rigatelli L., 1992, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Boyer C.B., 1980, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

Bunt L.N.H., Jones P.S. & Bedient J.D., 1983, *Le radici storiche delle Matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna.

Capelo A.C., Ferrari M. & Padovan G., 1990, *Numeri, aspetti storici linguistici e teorici dei sistemi di numerazione*, Decibel/Zanichelli, Padova/Bologna.

D'Amore B. & Speranza F. (a cura di), 1995, *La matematica e la sua storia*, Franco Angeli, Milano.

Giacardi L. & Roero S., 1979, *La matematica nelle civiltà arcaiche*, Stampatori, Torino.

Ifrah G., 1989, *Storia universale dei numeri*, Mondadori, Milano.

Loria G., 1950, *Storia delle Matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Hoepli, Milano (ristampa anastatica, 1982, Cisalpino-Goliardica, Milano).

Neugebauer O., 1974, *Le Scienze esatte nell'antichità*, Feltrinelli, Milano.