LUIGI VERDI

Organizzazione delle altezze nello spazio temperato

DIASTEMA ANALISI

Via Isonzo, 10 - 31100 TREVISO
tel./fax: 0422-260226; altro tel.: 265584
Email: diastema@tin.it
http://web.tin.it/ensemble900

DIASTEMA ANALISI, 4
Collana diretta da: Paolo Troncon

Prefazione dell'autore

Una conoscenza approfondita delle leggi numeriche che governano certi fenomeni di aggregazione dei suoni è indispensabile per una più corretta comprensione dei fenomeni stessi; tuttavia è bene sottolineare che l'impiego di procedimenti numerici nell'elaborazione di una composizione musicale non può dar luogo che a sterili formulette, se ad essi non si unisca un adeguato discernimento anziché una acritica accettazione. L'approccio quantitativo è facilmente schematizzabile in termini numerici: in numeri è traducibile l'armonia, la melodia, il ritmo, la forma. Una analisi quantitativa può essere perfetta sotto ogni punto di vista eppure non spiegare o dimostrare nulla; essa rischia di contraddire l'essenza stessa della musica se non è seguita della elaborazione qualitativa; per questo motivo è opportuno che le informazioni contenute in questo libro siano considerate dal loro punto di vista puramente quantitativo, lasciando ai lettori più ricettivi il compito di elaborarne le possibili implicazioni qualitative.
La capacità di risolvere problemi 'ben definiti' è meccanica, e può essere insegnata; la capacità di risolvere problemi 'mal definiti' non può essere insegnata, ma per potersi esplicare necessita della capacità meccanica come condizione imprescindibile. La mente umana non è un computer, e se questo può essere uno svantaggio dal punto di vista meccanico e della catalogazione dei dati, essa è però insostituibile per quanto riguarda l'elaborazione e la trasformazione qualitativa dei dati stessi; in questa direzione occorre perciò soprattutto indirizzare la mente umana, valorizzando ed esaltando ciò che essa possiede di non meccanico e di 'mal definito'. Ciò non significa che si debba rinunciare a definire quanto meglio possibile gli aspetti quantitativi di un problema, ma soltanto che è opportuno porli come base e presupposto di una successiva elaborazione qualitativa: l'Arte è infatti la tendenza dell'uomo a porsi dei problemi ed a risolverli in forme diverse, in modo da potersene porre sempre di nuovi, attraverso una continua ridefinizione di ciò che 'deve' essere e ciò che 'può' essere in base a ciò che si 'vuole'.

Il presente lavoro si propone in primo luogo di organizzare lo spazio sonoro temperato in base alle varie possibilità di disporre le altezze al suo interno, indagandone successivamente le principali proprietà combinatorie. I processi che regolano la costituzione delle varie combinazioni sono espressi attraverso semplici formule aritmetiche che, accompagnate da esempi elementari, risultano di facile applicazione.
Nella prima parte del libro vengono sintetizzate e sviluppate alcune nozioni di teoria generale, basate in particolare sulle ricerche elaborate da alcuni dei maggiori esponenti della scuola analitica americana: da Hanson a Martino, da Lewin a Forte, fino a Howe, Starr e Rahn. Ugualmente ampio spazio è stato dedicato alle teorie di studiosi e

compositori europei come Busoni, Costère, Hauer, Simbriger, teorie molto importanti che tuttavia, pur precedendo spesso cronologicamente quelle elaborate in America, hanno evidenziato minore sistematicità, facile empirismo, se non addirittura propensione per una ricerca troppo astratta o esoterica e, in ultima analisi, fine a se stessa.
Se alla base della trattazione vi è una serie molto ricca e variegata di sollecitazioni, molto numerosi sono anche i concetti e le elaborazioni del tutto nuovi e molto ampio il corredo di esempi originali. In questa prospettiva si colloca la classificazione di tutti gli insiemi, in una serie di tavole che riassumono e sintetizzano le proposte di tredici fra i maggiori ricercatori teorici di differenti estrazioni geografiche e culturali (Babbit, Busoni, Costère, Forte, Hauer, Martino, Mazzola, Perle, Pinos, Rahn, Solomon, Simbriger, Starr).
L'ampia parte teorica è seguita da un breve capitolo che esemplifica alcune possibili applicazioni pratiche, basate sui concetti sviluppati nella prima parte, mentre la sezione storica approfondisce alcuni aspetti propri delle numerose teorie sulla classificazione degli accordi. Nella sezione storica ampio spazio è dedicato anche ai compositori della scuola russa e ucraina del primo Novecento, che svilupparono tecniche compositive di tipo seriale e dodecafonico del tutto indipendenti dall'Occidente.
All'intero della grande varietà degli insiemi teoricamente possibili, quelli *simmetrici per trasposizione* hanno conosciuto una grande diffusione nell'opera dei compositori del XX secolo. In questa prospettiva, l'ampia sezione seguente, corredata di numerosi esempi, è dedicata all'analisi approfondita di queste particolari forme di aggegazione.
Il testo non va letto necessariamente seguendo la successione della trattazione; temi accennati nella parte teorica vengono spesso approfonditi nella parte storica e viceversa, per cui il lettore è invitato a scegliere i percorsi che preferisce.

I. TEORIA GENERALE

I.1. Spazio acustico o continuum sonoro

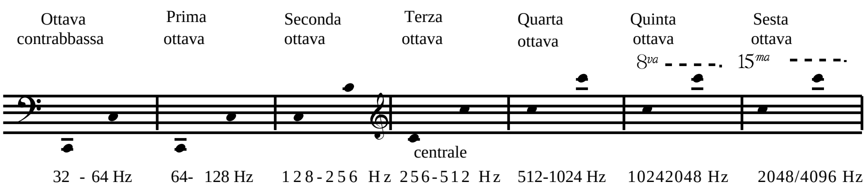
In senso generale, con il termine di *continuum sonoro* si indica l'insieme più ampio possibile di frequenze esistenti. Più in particolare, per continuum sonoro si intende la totalità delle frequenze percepibili dall'orecchio umano, ossia il totale di tutti i suoni udibili, all'interno di un ambito compreso all'incirca fra i 16 Hz e i 16.000 Herz al secondo (spazio acustico).
Allo scopo di analizzare l'enorme quantità di fenomeni sonori compresi in un ambito di questo tipo, è innanzitutto necessario spazializzare il continuum, attraverso l'adozione di alcuni punti di riferimento fissi; in tale prospettiva è possibile elaborare vari metodi di divisione regolare del continuum, in base alla struttura secondo cui le varie frequenze si distribuiscono al suo interno.

Un primo punto di riferimento, particolarmente importante, è costituito dalla divisione dello spazio acustico in ottave uguali. L'ottava fu individuata sin dall'antichità come un intervallo naturale perfetto e nella sua cornice si sono inquadrati tutti i sistemi musicali.
L'accettazione della ottava come prima divisione fondamentale del continuum risiede in una precisa legge fisica, dedotta empiricamente da Pitagora di Samo nel VI sec. a C., e ottenuta attraverso la divisione a metà di un monocordo. Non a caso il termine *armonia*, per gli antichi greci, stava ad indicare sia l'ottava, in quanto simbolo che esprimeva l'ordine del mondo materiale, sia il numero, in quanto simbolo che esprimeva l'ordine del mondo spirituale.
Le valutazioni di Pitagora furono confermate da tutte le osservazioni successive. In particolare è stato più volte verificato che i suoni a distanza di ottava si succedono secondo l'intervallo matematicamente più semplice, esprimibile con i numeri interi più piccoli (1/2): il numero di vibrazioni di ogni suono a distanza di ottava aumenta cioè secondo la proporzione di 1/2. Accetteremo quindi l'evidenza di un dato scientifico, dividendo lo spazio acustico in 10 ottave, da 16 a 16.000 vibrazioni al secondo (Herz) ponendo così, all'interno di un continuum incoerente, il primo punto di riferimento.

Per convenzione il suono udibile più basso (16 Hz) sarà denominato Do; saranno tutti Do quei suoni che si succederanno secondo l'intervallo semplice di 1/2, e cioè: 16 Hz, 32 Hz, 64 Hz, 128 Hz, 256 Hz, 512 Hz, 1024 Hz, 2048 Hz, 4096 Hz, 8192 Hz e 16284 Hz.
Nell'ottava cosiddetta sub-contrabbassa (16-32 Hz) non sempre l'orecchio umano è in grado di sintetizzare efficacemente le vibrazioni in una definita percezione di altezza, mentre nelle due ottave sovracute (4096-16284 Hz.), tale percezione è imprecisa, spesso dolorosa. Solo in casi eccezionali gli strumenti costruiti dall'uomo possono raggiun-

Note a p. 84

gere le regioni estreme dello spazio acustico: per questo motivo la quasi totalità del repertorio musicale si è sviluppato all'interno delle sette ottave centrali, che sono state denominate convenzionalmente Ottava Contrabassa (32-64 Hz), Prima Ottava (64-128 Hz), Seconda Ottava (128-256 Hz), Terza Ottava o Ottava centrale (256-512 Hz), Quarta Ottava (512-1024 Hz), Quinta Ottava (1024-2048 Hz), Sesta Ottava (2048-4096 Hz). Da un'analisi puramente statistica del repertorio musicale occidentale, si può giungere verosimilmente alla conclusione seguente: che l'uomo si sia espresso musicalmente per il 40% circa all'interno della Terza Ottava, per il 25 % all'interno della Seconda Ottava, per il 10 % all'interno della Prima, per il 20 % all'interno della Quarta e per il 5% all'interno delle altre tre ottave, soprattutto di quella Contrabbassa e della Quinta. Inutile sottolineare che l'estensione entro cui si è manifestato il fenomeno musicale corrisponde per buona parte all'estensione della voce umana, compresa nelle quattro ottave centrali (64-1024 Hz).
Es. 1.1



Gli *spazi acustici non ottavianti*, pur non rispettando le condizioni di propagazione del suono, rimangono teoricamente possibili e sono stati oggetto di interessanti ricerche da parte di numerosi compositori; la loro costituzione interna presenta, tuttavia, forti irregolarità, tali da rendere assai problematica la loro utilizzazione. Il compositore Ivan Vyšnegradskij[1] ad esempio, che teorizzò lo spazio non-ottaviante, lo definì come un continuum-sonoro non divisibile in altezze discrete a intervalli regolari. Uno spazio sonoro che non sia ciclico all'ottava (non ottaviante), non potrebbe quindi contenere scale cicliche, cioè scale che si potessero ripetere identiche, ad altezze assolute diverse.

I.2. Divisione dell'ottava

Il principio di identità dei suoni all'ottava è giustificato da numerose osservazioni, tanto da potere essere considerato come un assioma, necessario allo sviluppo di un qualsiasi sistema musicale. La divisione dell'ottava in 12 parti uguali è invece puramente convenzionale e tipica della civiltà musicale occidentale; questa distinzione non va sottovalutata, se non si vuole incorrere in una sorta di assolutismo culturale che non può rivelarsi che improduttivo.
La divisione dell'ottava in 12 parti uguali fu una scelta arbitraria che si rese necessaria

per assecondare l'evoluzione naturale del sistema musicale occidentale. Tale suddivisione si è rivelata quanto mai ricca di possibilità e di connessioni interne, tanto da porre la civiltà occidentale in una sorta di posizione privilegiata nello stabilire una innegabile egemonia culturale in campo musicale: Curt Sachs ad esempio, sosteneva che tutta la musica dovesse procedere verso una forma di standardizzazione e che tutti i sistemi musicali dovessero evolvere verso il temperamento equabile, il quale permetteva la più vasta gamma di trasposizioni.
Il compositore e teorico Josip Šillinger[2] si è a lungo interessato dei problemi connessi alla divisione dell'ottava; in *Theory of Pitch Scales*, Šillinger scrisse:

> Il numero intero 1, che esprime l'unità di misura equivalente ad un semitono, è la conseguenza del sistema di divisione dell'ottava, qui adottato. L'espressione matematica di questo sistema di temperamento (sviluppato da Andreas Werckmeister nel 1691) è $\sqrt[12]{2}$. Il numero 2 esprime il rapporto di frequenza di una ottava, cioè 2/1; l'esponente 12 esprime il numero delle divisioni uguali all'interno dell'ottava. I semitoni sono quindi numeri interi che esprimono i logaritmi su base $\sqrt[12]{2}$.
> Se costruiamo una serie di 12 radicali, in modo che l'indice della radice rimanga 12 mentre il valore del radicando passi da 1 a 12, otterremo una serie corrispondente alle frequenze del temperamento equabile attuale.[3]

I vari sistemi musicali possono avere diversi fondamenti, possono essere sorti da bisogni puramente musicali o da riflessioni matematiche e cosmologiche. In particolare il temperamento e la divisione della ottava in 12 parti uguali, nel sistema musicale occidentale, si rese necessario per dar modo alla musica tonale di manifestarsi compiutamente; esso non fu all'origine della musica tonale, bensì ne fu la conseguenza: determinato dalla pratica, solo successivamente fu codificato all'interno di una teoria grammaticale.
La tonalità si affermò come un modo di combinare i suoni così da rendere possibile la relazione di ognuno di essi con un suono fondamentale; essa risiedeva in affinità armoniche e melodiche fra i suoni, tali da determinare la loro successione e la loro aggregazione verticale. La successione orizzontale dei suoni si organizzò in scale di sette suoni, la aggregazione verticale in accordi di tre suoni; la composizione e la modificazione degli accordi e le leggi della loro successione furono il risultato necessario della tonalità. Scriveva Fétis: "Cambiate l'ordine dei suoni di una scala, distribuite differentemente i suoi intervalli, e la maggioranza delle relazioni armoniche cesserà di esistere".[4]

È una ipotesi plausibile che l'evoluzione musicale abbia proceduto da semplici formule a scale arbitrarie sempre più organizzate, per tendere verso lo spazio sonoro nella sua totalità: sarebbero state le 'note aggiunte', in sostanza, a determinare l'ampliamento di ogni sistema. Consideriamo per esempio un sistema musicale molto semplice, che contenga solo formule; queste formule tenderanno a proliferare in modo da formare scale sempre più complesse. Quando queste formule avranno perso la loro identità, il sistema si evolverà verso una nuova scala arbitraria, che diverrà a sua volta una formula di un sistema futuro (questo processo è uguale a quello che nella linguistica si chiama *blending*). L'introduzione di nuove formule porterà ad un ulteriore arricchimento del sistema e alla adozione di una nuova scala arbitraria che comprenderà tutte le precedenti.

La scala diatonica, tipica della musica tonale, aveva avuto origine da alcune brevi formule ripetitive che si erano stabilizzate in un sistema di relazioni. La adozione della scala diatonica finì poi con il dare origine alla divisione dell'ottava in 12 parti uguali, attraverso quel procedimento conosciuto come *temperamento equabile.*
Nella musica occidentale moderna tutte le altezze tendono a inquadrarsi all'interno della scala cromatica a dodici suoni: questa scala si è costituita come conseguenza delle varie scale diatoniche e quest'ultime, a loro volta, sono una somma delle triadi che esse contengono. In questa prospettiva appare molto utile l'introduzione dell'idea matematica di *insieme*. Un insieme può essere descritto come un sistema arbitrario di relazioni. Sono insiemi, ad esempio, 'tutti i numeri', 'tutti i numeri interi', 'tutti i numeri pari', ecc.: il primo di questi termini (soprainsieme) contiene gli altri due (sottoinsiemi), mentre il secondo contiene il terzo. Lo stesso ragionamento può essere applicato a insiemi sonori come 'tutte le altezze', 'tutte le altezze temperate secondo un certo sistema di divisione', 'tutte le altezze inscritte in una scala di Do maggiore', ecc.

Abbiamo sottolineato come il principio di ogni tipo di espressione musicale sia la scelta di pochi suoni all'interno di una vasta gamma di possibilità; tali suoni stanno fra loro in un determinato rapporto intervallare e la loro organizzazione determina la costituzione di scale, che sono alla base di ogni sistema musicale evoluto. In questa prospettiva, uno studio accurato della scala temperata di 12 suoni appare indispensabile per meglio focalizzare la natura di tutte le combinazioni (sottoinsiemi) in essa contenute, passando in rassegna e analizzando le possibili aggregazioni che ne derivano. Non si possono tuttavia omettere tre considerazioni:
1) Che sia possibile dividere ogni ottava in un numero qualsiasi di parti uguali tra loro (ad esempio in 24 parti, come nel sistema a 1/4 di tono).
2) Che sia possibile dividere ogni ottava in un numero qualsiasi di parti in qualsiasi modo diverse tra loro (ad esempio nelle scale indiane).
3) Che sia possibile dividere ogni ottava in un qualsiasi modo diverso dalle altre ottave, in un numero qualsiasi di parti, in qualsiasi modo diverse tra loro.

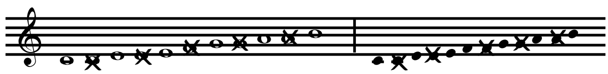
Fra le numerose divisioni dell'ottava teoricamente possibili, comprendenti un numero di intervalli maggiore di 12, Rasch[5] ne elenca ben 78, composte da un numero variabile di gradi, da 14 a 129. Fra le scale più conosciute, si segnalano brevemente le seguenti:
— 19 gradi (sistema dodecafonico-diatonico): Yasser (1932), Mandelbaum (1961);
— 24 gradi (sistema bi-dodecafonico o a quarti di tono): Haba (1927), Carrillo, Kallenbach-Greller (1926), Vyšnegradskij (1940), Schneider (1975);
— 31 gradi (sistema a quinti di tono): Vicentino (1555), Colonna (1618), Huygens (1691), Supping (1722), Fokker (1945);
— 36 gradi (sistema tri-dodecafonico o a sesti di tono): Haba (1927);
— 43 gradi (sistema a settimi di tono): Saveur (1701);
— 48 gradi (sistema a ottavi di tono);
— 53 gradi (sistema a noni di tono): Bosanquet (1876), White (1883), Tipple e Frye (1941) Fickenscher (1941);
— 72 gradi (sistema esa-dodecafonico o a dodicesimi di tono): Maedel e Herf (1977);
— 96 gradi (sistema otto-dodecafonico o a sedicesimi di tono): Carrillo (1948).

Es. 1.2

I.3. Altezze e intervalli

Si definiscono *altezze* (in inglese *pitch*) solo quei suoni le cui frequenze possono essere ottenute sommando ad una altezza standard (nel nostro caso Do =16 Hz) un numero intero di semitoni temperati. Le altezze si rappresentano tradizionalmente attraverso le note, simboli grafici distribuiti su una griglia di riferimento, il pentagramma, ai quali è dato il nome convenzionale di 'do', 'do#', 're', ecc. La notazione per ogni altezza non è unica, poiché ne esistono diverse possibili denominazioni, (enarmoniche) dovute alle cinque inflessioni utilizzate nel sistema tonale (♭♭, ♭,♮, #, ##). Tutte le notazioni enarmoniche sono equivalenti, in quanto le diverse denominazioni derivano dalla varietà dei significati funzionali che un'altezza può assumere all'interno di una logica di tipo tonale; le tre possibili notazioni dell'altezza Do ad esempio (si#, do, re♭♭) si possono ridurre ad una sola.

Numerosi sono stati i tentativi di ridurre la notazione di una altezza ad un unico simbolo grafico, che comprendesse tutte le inflessioni; tuttavia nessuno di questi tentativi ha avuto molto successo. Vanno segnalate in particolare le proposte di Busoni e di Alaleona, di Obuchov, di Golyšev e di Hauer, tutte motivate dalla necessità di uniformare i 'diesis' e i 'bemolle' in un unico simbolo, vista l'inutilità di ogni distinzione all'interno di un linguaggio non tonale.
Obuchov propose una riforma grafica nel 1915, riforma assai vicina, per certi aspetti, a quella del teorico argentino Menchaca, che stabiliva e fissava il carattere definitivo e assoluto del temperamento equabile. Hauer giungeva a conclusioni analoghe nel 1921. Anche Schönberg e Bartók ebbero a sottolineare la necessità di uniformare in un unico simbolo i 'diesis' e i 'bemolle'. Nell'esempio seguente sono riportati i simboli proposti da Obuchov, utilizzati da numerosi compositori del '900, fra cui Honegger.
Es. 1.3

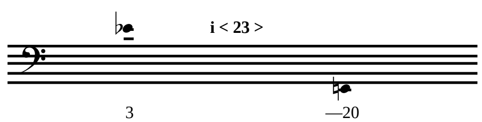


Abbiamo sottolineato come la pratica musicale abbia circoscritto l'estensione dello spazio sonoro utilizzabile in circa 7 ottave, ognuna delle quali suddivisa in 12 parti uguali, per un totale di 84 altezze. La totalità dei suoni disponibili con questo tipo di suddivisione appare chiaramente sul pianoforte, che è composto all'incirca da tanti tasti quanti sono i suoni compresi in 7 ottave divise in 12 parti, (cioè 84): il totale dello spazio sonoro temperato comprende in teoria fino a 120 unità (12x10).
Per designare le varie altezze, appare quanto mai utile e conveniente ricorrere ad una notazione che faccia uso dei numeri interi. I numeri interi possiedono infatti due proprietà fondamentali:
— Sono ordinati in modo che fra due di essi uno sia più grande.
— Sono egualmente spaziati; quello successivo è più grande del precedente esattamente di una unità.
Queste proprietà si accordano con i principi fondamentali di ogni scala a temperamento equabile, nella quale cioè tutte le altezze si succedano a intervalli regolari, per convenzione uguali a 1. Se, ancora per convenzione, chiameremo 0 il Do centrale, le altezze inferiori saranno rappresentate da numeri interi negativi, quelle superiori da numeri interi positivi. Fra due altezze sarà più acuta quella designata da un numero intero più grande (0+1 = un semitono sopra il Do = Do#).
Uno dei primi teorici che fece uso dei numeri interi per indicare gli intervalli fu Sergej Taneev; egli indicò l'unisono con lo 0, il semitono con 1 e così via. A questo proposito, nel suo *Contrappunto mobile nello stile rigoroso*, pubblicato per la prima volta nel 1909, Taneev ebbe a scrivere:

> […] che soltanto su una base matematica si può fondare una dottrina precisa e chiara sul contrappunto mobile... che soltanto per via matematica è possibile sollevare la cortina di arcano mistero che per tanto tempo ha avvolto la dottrina del contrappunto mobile.[6]

Adottando i principi di Taneev, un *intervallo* fra due altezze x e y può essere definito come "il numero intero di semitoni compresi fra x e y": esso può essere calcolato assumendo una altezza specifica, denominata x, e sommando un certo numero di semitoni temperati, fino ad arrivare alla altezza denominata y. Il numero di semitoni sommati sarà l'intervallo fra x e y. Per ogni due altezze x e y, l'intervallo <i> fra x e y sarà uguale alla differenza fra y e x.

Esempio:
x = mib = 3, y = mi = —20.
L'intervallo fra x e y si potrà indicare così:
i <x,y> = y—x, cioè i <3—20> = —20—3 = —23.
Es. 1.4



Un intervallo può essere *consecutivo* o *simultaneo*: nel primo caso potrà essere *ascendente* (positivo) o *discendente* (negativo); per motivi pratici è opportuno classificare

ogni intervallo nella sua forma ascendente, partendo dall'altezza più bassa e indicandolo con un valore assoluto positivo; nel caso precedente si avrà quindi:
3—(—20) = 23.
Gli intervalli superiori all'ottava sono denominati *intervalli composti*, gli intervalli compresi all'interno di una ottava sono denominati *intervalli semplici*. Esistono 12 tipi di intervalli semplici, che possono essere indicati coi numeri interi da 0 a 11. Essendo la denominazione tradizionale degli intervalli strettamente legata al sistema tonale, (all'esterno del quale non c'è una differenza sostanziale tra seconda eccedente e terza minore) appare in questo contesto indispensabile designare ogni intervallo con un numero che ne specifichi l'*ampiezza* (o *magnitudine*).
Nella tabella seguente appare il numero che qualifica ogni intervallo, con a fianco la sua denominazione nel sistema tonale:

intervalli semplici

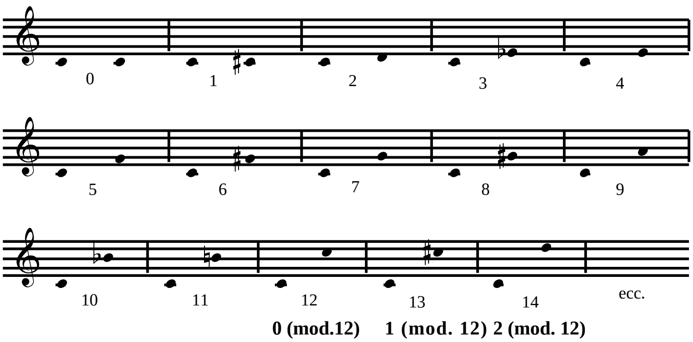
0	prima (unisono)
1	seconda minore (semitono); ottava eccedente
2	seconda maggiore (tono); terza diminuita
3	terza minore; seconda eccedente
4	terza maggiore; quarta diminuita
5	quarta giusta
6	quarta eccedente; quinta diminuita (tritono)
7	quinta giusta
8	quinta eccedente; sesta minore
9	sesta maggiore; settima diminuita
10	settima minore; sesta eccedente
11	settima maggiore; ottava diminuita

intervalli composti

0 mod.12 (12)	ottava
1 mod.12 (13)	nona minore
2 mod.12 (14)	nona maggiore

eccetera.

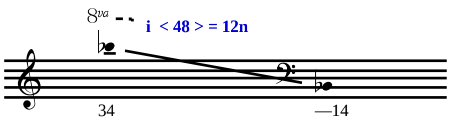
Es. 1.5



I.4. Classi di altezze

Secondo una definizione adottata da Milton Babbit nel 1955, tutte le altezze che differiscono per un numero intero di ottave appartengono ad una medesima *classe di altezze* (in inglese *pitch class*, abbreviato in *pc*).[7] Col termine di classe di altezze si indica quindi "l'insieme di quelle altezze che differiscono l'un l'altra solamente per l'ottava a cui appartengono". Tale nozione esclude ogni informazione inerente il registro, la durata, il timbro, la dinamica e ogni altra caratteristica secondaria di un suono: una classe di altezze è semplicemente l'insieme di tutte le altezze equivalenti a distanza di ottava.
I suoni di una stessa classe di altezze sono multipli interi a distanza di 12 semitoni; esistono perciò 12 classi di altezze, quante sono le divisioni della ottava temperata: ognuna è chiamata con il suo membro positivo più piccolo.
Due suoni x, y appartengono alla stessa classe di altezze, sono cioè equivalenti, se e solo se per un intero n, y = (12n) —c, ossia i <x,y> = 12n.

Esempio:
Per n = 4, x = 34, y = —14, si avrà:
34 = 12n —14 = 48—14, ossia i <34,—14> = —14—34 = 48.
Il membro positivo più piccolo della classe di altezze a cui appartengono —14 e 34 è 10, poiché i <—14,10> = 12n e i <34,10> = 12n.
Es. 1.6



In pratica per verificare se due altezze qualsiasi appartengano alla medesima classe di altezza occorre calcolare se l'intervallo che le divide sia multiplo di 12; questa definizione è chiamata in matematica *modulo* e, nel caso della scala cromatica (temperata in 12 parti uguali), si usa l'abbreviazione: mod.12.
L'orologio è un esempio familiare di un sistema a modulo 12: proprio riferendosi all'analogia fra orologio e scala cromatica, il compositore e teorico Peter Schat ha elaborato una teoria musicale che ha denominato *Tone Clock System*.[8]

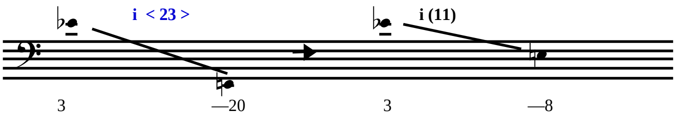
Poiché il materiale di base del sistema temperato occidentale è costituito da 12 differenti classi di altezza, esse si possono tutte rappresentare all'interno di una singola ottava, utilizzando i numeri interi da 0 a 11. Definiremo quindi *interi di classe di altezza* i numeri interi da 0 a 11. L'insieme che contiene tutte e 12 le classi di altezze all'interno di una ottava può essere definito *spazio temperato assoluto* (Per Babbit: *Aggregate*; per Simbriger: *Mantelkomplexion*).[9]
La *regolarità* è l'aspetto fondamentale dello spazio temperato. La presenza ad intervalli regolari di uno stesso fenomeno permette la riduzione dello studio di tutte le combinazioni all'interno di una unica ottava, poiché tutte le ottave possiedono esattamente le

stesse caratteristiche. Le classi di altezza sono le entità minime di suddivisione, e si possono rappresentare attraverso il simbolo grafico delle note distribuite sul pentagramma; esse potrebbero essere ugualmente rappresentate come punti disposti lungo una linea.

I.5. Intervalli fra classi di altezze e classi di intervalli

Per ogni due classi di altezze a e b, l'intervallo fra a e b sarà uguale a b—a mod.12.

Esempio:
a = mib = 3; b = mi = —20(mod.12) = —8.
L'intervallo fra a e b si potrà indicare così: i (a,b) = b—a, cioè i (3,—8) = —8—3 = —11.
Es. 1.7



Anche in questo caso, come per le altezze, sarà molto utile indicare l'intervallo come se fosse sempre ascendente, cioè con un valore assoluto positivo; nel caso precedente avremo quindi 3—(—8) = 11.
Gli intervalli fra classi di altezze sono sempre da considerarsi all'interno di una ottava (intervalli semplici). La somma dei due intervalli semplici, ascendente e discendente, dovrà sempre essere uguale a 0 mod.12, e l'uno sarà l'"inverso" dell'altro: nel caso precedente avremo —11+11 = 0.
Gli intervalli semplici si replicano periodicamente all'interno di una estensione sempre più ampia secondo la formula tn = <i>, dove t è il numero di parti uguali in cui è divisa ogni ottava, n è il numero delle ottave e <i> è il numero dei semitoni che formano l'intervallo composto (cioè non ridotto mod.12).
Si può così ottenere la tabella seguente, indicativa del numero di semitoni compresi in un numero sempre crescente di ottave:

ottave	semitoni
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
6	72
7	84

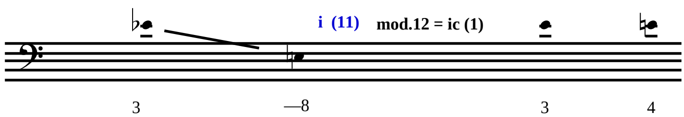
Assegnando un numero ad ogni intervallo, si possono eseguire agevolmente numerose operazioni. Ad esempio, l'estensione dello spazio sonoro temperato potrà essere dedotta dal circolo delle quinte completo (contando cioè 12 quinte ascendenti): infatti, partendo da un Do contrabbasso e procedendo per quinte, si giungerà a chiudere lo spazio esattamente dopo 7 ottave: poiché una quinta giusta = 7, allora 7x12 = 84, quante sono le divisioni dello spazio sonoro temperato.
Poiché ogni ottava è divisa dal tritono in due parti uguali (12:2 = 6), e le ottave sono 7, è evidente che lo spazio sonoro temperato è a sua volta diviso dal tritono in due parti uguali: poiché il tritono = 6, allora si avrà 84:2 = 42 e quindi 42:7 = 6.

Il numero delle parti uguali in cui può essere suddiviso un qualsiasi spazio temperato è dato dalla formula <i> = tn. L'adozione dei numeri interi permette di calcolare rapidamente gli intervalli, anche in ipotetici sistemi con un temperamento differente da 12, in quanto la formula generale è valida per ogni tipo di temperamento.

Esempio:
24 = 12x2 (spazio esteso su 2 ottave, di temperamento 12)
84 = 14x6 (spazio esteso su 6 ottave di temperamento 14)
54 = 18x3 (spazio esteso su 3 ottave di temperamento 18)

Con il computer si possono simulare alcuni casi piuttosto interessanti. Supponiamo, per esempio, di concentrare lo spazio compreso fra le quattro ottave centrali Do^1-Do^5 (12x4 = 48) in una sola ottava divisa in 48 parti uguali, cioè in ottavi di tono (48x1 = 48); con un computer si potrà far risuonare un qualsiasi brano musicale classico, ad esempio una sinfonia di Mozart, all'interno di una sola ottava, con effetti sorprendenti**.**

Per ogni due classi di altezze a e b, la *classe di intervalli* (ic) fra a e b sarà uguale al minore dei due possibili intervalli fra a e b (mod.12). Ogni classe di intervalli mod.12 si potrà indicare così: ic (a,b) = al minore fra i (a,b) e i (b,a) mod.12.
Nel caso precedente avremo: ic = al minore fra —11 e 11, cioè = —11 (mod.12) = 1.
Es. 1.8



Concludendo: ogni paia di altezze <a,b> comprende un intervallo definito dalla ampiezza b—a, invariante sotto ogni uguale trasposizione di entrambi le altezze.
Poiché b—a = a—b (nel caso precedente —11+11 = 11—11) e quindi i—i = 0, si definiscono sei classi di intervalli, di cui cinque comprendenti due intervalli semplici inversi fra loro (1-11, 2-10, 3-9, 4-8, 5-7), e una classe comprendente un intervallo inverso di se stesso (6-6). La classe di intervalli 0-12 è equivalente all'unisono.
Procedendo dal generale al particolare, si possono riassumere 5 modi per designare l'intervallo mib^3-mi^1.

i <mib^{3}\ mi^{1}>	—23 discendente composto
i <mi^{1}/mib^{3}>	23 ascendente composto
i (mib\,mi)	—11 discendente semplice
i (mi/mib)	11 ascendente semplice
ic (mib-mi)mod.12	1 classe di intervalli

I.6. Trasposizione e inversione

Occorre ora definire due operazioni fondamentali: *trasposizione* e *inversione*.
La *trasposizione* (T) è una operazione che consiste nell'addizionare una costante n (cioè un numero di semitoni costante) ad una altezza data. Per ogni altezza x e ogni intervallo n sarà applicabile la formula Tn (x) = x+n.
La trasposizione per le classi di altezze è data da una formula simile, e cioè:
Tn (x) = x+n mod.12.

Esempio:
T8 (7) = 7+8 mod.12 = 15—12 = 3, ossia T8 (sol) = mib

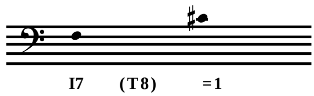
Il valore costituito dalla differenza fra la altezza trasposta e quella originaria costituisce l'*indice numerico di trasposizione* (Tn); nel caso precedente:
Tn = 15—7 = 8.

Es. 1.9

L'*inversione* (I) è una operazione che consiste nel trasformare una altezza data nel suo corrispondente negativo e viceversa. Per ogni altezza x sarà applicabile la formula: Ix = —x.
Per calcolare l'*inversione trasposta* occorrerà addizionare una costante n all'inverso di una altezza data. Per ogni altezza x e ogni intervallo n sarà applicabile la formula TnI (x) = —x+n.
Nel caso si operi con classi di altezze, l'inversione risponderà ad una formula simile e cioè: TnI (x) = —x+n mod.12.

Esempio:
T8I (7) = —7+8 = 1, ossia T8I (fa) = do#

Es. 1.10



Il valore rappresentato dalla somma dell'altezza inversa trasposta e l'altezza originaria costituisce l'*indice numerico di inversione* (TnI); nel caso precedente TnI = 1+7 = 8. Se TnI = 0, allora una altezza sommata alla sua inversione sarà uguale a 0.
Il centro di simmetria fra due altezze *correlate per inversione* è la metà del loro indice TnI, cioè TnI/2; nel caso precedente avremo: T8I (7) = —7+8 = 1; il centro simmetria fra —7 e 1 sarà uguale a —8/2 = —4 (ciò significa che tra fa e do# il centro di simmetria è la).

Una operazione composta è il prodotto di due o più altre operazioni.

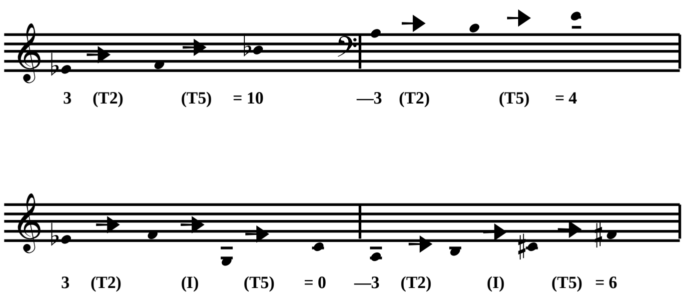
Esempio:

Tn	[Tm(x)]	=	(x+m)+n
Tn	[TmI(x)]	=	(—x+m)+n
TnI	[Tm(x)]	=	—(x+m)+n
TnI	[TmI(x)]	=	—(—x+m)+n

cioè

T5	[T2(3)]	=	(3+2)+5 = 10
T5	[T2I(3)]	=	(—3+2)+5 = 4
T5I	[T2(3)]	=	—(3+2)+5 = 0
T5I	[T2I(3)]	=	—(—3+2)+5 = 6

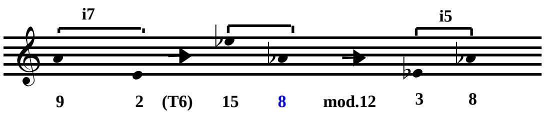
Es. 1.11



Ovviamente, come le singole altezze e le classi di altezze, anche gli intervalli possono essere trasportati. Il totale degli intervalli semplici, considerando le loro possibili

trasposizioni, è uguale a (5x12) + (1x6) cioè a 66.
Un intervallo trasportato mantiene invariato il suo contorno melodico. Se il livello di trasposizione supera l'ottava, allora l'intervallo trasportato (mod.12) si trasforma nel suo *rivolto trasposto*; in questa prospettiva trasposizione e rivolto appaiono come equivalenti.

Esempio:
Poiché i (9,2) = 7 allora, T6 i (9,2) = (9+6)—(2+6) = 15(mod.12)—8 = 3—8.
Quindi T6 i (9,2) mod.12 = i (3—8) = 5 (rivolto di 7).
È così che le varie operazioni di trasposizione e di inversione danno luogo a tutti gli intervalli ascendenti e discendenti.
Es. 1.12



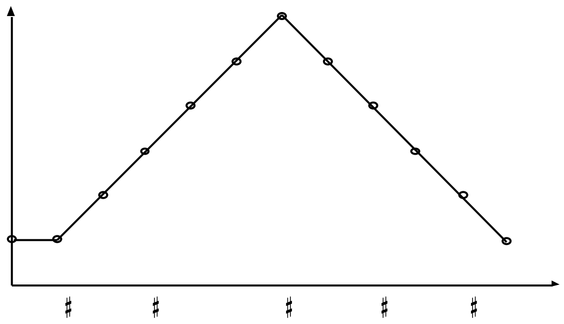
I.7. Rappresentazioni grafiche

Tutte le altezze possono essere rappresentate come punti disposti ad intervalli regolari lungo una linea:

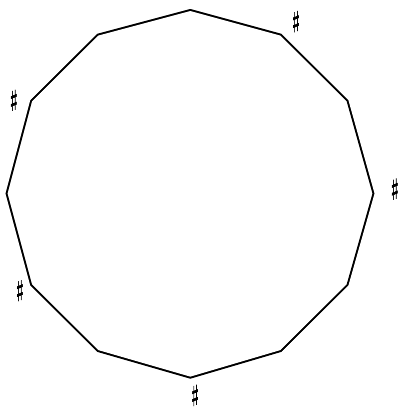
Do, Do#, Re, Re#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si,
——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——. ——.

Assai più interessante appare la possibilità di rappresentare le varie altezze su due dimensioni, ove in ascissa siano le 12 classi di altezze e in ordinata le differenti ottave di appartenenza. Nell'esempio seguente viene rappresentata in questo modo la serie di tutti gli intervalli:
Es. 1.13

Es. 1.14

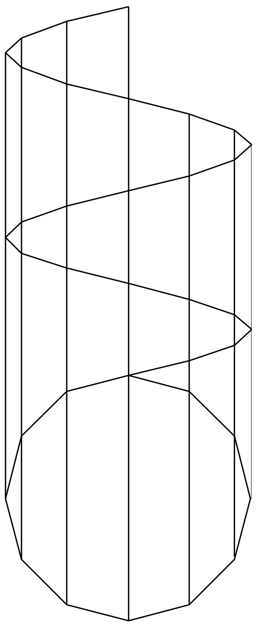


Lo schema precedente viene proposto da Eimert nel *Lehrbuch der Zwölftechnik,* adottando una notazione per numeri interi.[10] L'insieme delle 12 altezze può essere realizzato graficamente attraverso un dodecagono inscritto all interno di un cerchio, i 12 vertici del quale corrispondano alle diverse classi di altezze. La rappresentazione grafica attraverso il dodecagono appare in Hauer, Simbriger, Gingerich e numerosi altri teorici.
Es. 1.15

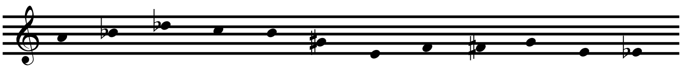


Per rappresentare compiutamente tutte le singole altezze, occorrerebbe ricorrere ad uno schema tridimensionale, precisamente a una spirale ad asse verticale, della quale il dodecagono sia una proiezione sul piano: la serie di tutte le altezze si definirà così dalla sintesi di due caratteristiche, una costante a percorso rettilineo, che procede secondo una proporzione aritmetica (quantità), e l'altra costante periodica, che procede secondo una proporzione geometrica (qualità) *(Teoria delle due componenti)*.[11]

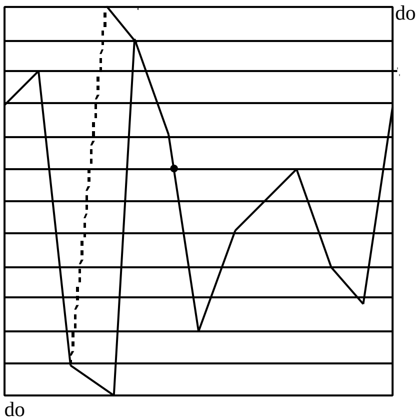
Es. 1.16



Fra le varie altre possibilità di rappresentazione grafica, si noti infine quella che ricorre ad un diagramma quadrato, del quale la scala cromatica rappresenta la diagonale.[12] Nell'esempio seguente viene rappresentata in questo modo una serie dodecafonica.
Es. 1.17



Es. 1.18



I.8. Distribuzione delle altezze all'interno dello spazio temperato

Le altezze si possono aggregare in varie maniere, dando luogo a molteplici *combinazioni*, definibili attraverso le seguenti caratteristiche fondamentali:
1) *densità* (d), data dal numero di altezze che costituiscono ogni combinazione;
2) *cardinalità* (c) o *misura*, data dal numero delle classi di altezze (mod.12) che costituiscono ogni combinazione;
3) *estensione* (e), data dalla distanza intervallare fra i suoni estremi di una combinazione, equivalente alla porzione di spazio entro cui essa si colloca.
4) *estensione minima* (em), data dalla distanza intervallare minima entro cui una combinazione può essere ridotta.
Designeremo l'insieme delle combinazioni costituite da una sola classe di altezze come *grado I di cardinalità* o *cardinalità 1*, l'insieme delle combinazioni di due classi di altezze *grado II di cardinalità*, e così vià. Come caso limite si avrà il *grado XII di cardinalità*, composto dall'insieme delle combinazioni di 12 classi di altezze.

Una combinazione disposta verticalmente forma un *accordo*, una combinazione disposta orizzontalmente forma una *successione*: se l'ordine delle sue componenti è considerato significante si avrà una *successione ordinata*, altrimenti si avrà una *successione disordinata*.
Le varie combinazioni possono essere sottoposte a tre tipi di operazioni fondamentali: *trasposizione*, *inversione* e *trasformazione*. In base a queste operazioni, alcune combinazioni possono essere considerate 'equivalenti', e quindi raggruppabili in 'insiemi' di ordine superiore.
Una combinazione disposta verticalmente (mod.12) forma un *campo armonico* (in tedesco *Klangzentrum*), una combinazione disposta orizzontalmente (mod.12) forma una *serie*, una combinazione disposta orizzontalmente (mod.12), in senso ascendente o discendente, forma una *scala*. Le altezze disposte in ordine scalare sono denominate *gradi*.
In generale su ogni campo armonico possono formarsi tanti *rivolti* quante sono le classi di altezze che lo compongono. Analogamente su di una scala possono formarsi tanti *modi* (m) quanti sono i gradi che la compongono, cioè m = c.

Si definisce *disposizione* (dp) la distribuzione delle varie altezze all'interno di una combinazione ordinata verticalmente. Si definisce *permutazione* (p) o *rotazione* (r) la possibilità di cambiare l'ordine di successione delle altezze all'interno di una combinazione data (successione di n altezze in un dato ordine). Una serie dodecafonica non è che una permutazione di un insieme di 12 elementi. Essa può definirsi come l'"insieme di paia ordinate i cui secondi membri siano immagine dei primi".

Nella differenza fra successione ordinata e disordinata, apparentemente secondario, sta la differenza fra due procedimenti compositivi diversi. La successione ordinata è tipica della dodecafonia, quella disordinata è tipica della prassi seriale in senso generale; su questo punto, Simbriger elabora alcune interessanti riflessioni:

> Bisogna constatare che la *Reihen-Komposition* (Serialità) non è identica al *Zwölfordnung* (Dodecafonia), ma che solamente i loro confini coincidono. Non si può dimenticare che la *Reihen-Komposition* è solo una fra le molte possibilità della *Zwölfordung*, ma che in realtà ha ben poco a che fare con essa. (Anche Schönberg utilizza serie con meno di 12 suoni; il principio seriale si è poi esteso anche a ritmo, dinamica e timbro, in parte interrompendo i principi dodecafonici).[13]

Simbriger tratta di un principio formale ampio e universale, in cui l'ordine dei singoli suoni sia solo un caso particolare, ma sotto il quale siano possibili molte altre forme ordinate.

I.9. Permutazione

La definizione del numero di permutazioni e di disposizioni possibili per ogni combinazione necessita di alcune semplici operazioni, che portano rapidamente a cifre molto elevate. Le possibilità di permutazione di una successione è in rapporto direttamente proporzionale alla propria densità; essa è data dalla formula:

$p = d!$, cioè $d(d—1)(d—2)...(d—d+1)$

dove p è il numero delle possibili permutazioni e d è il grado di densità della successione, cioè il numero delle altezze di cui è composta. In una combinazione a densità 5, per esempio, si avranno 5x4x3x2x1 = 120 possibilità di permutazione, ossia 5! (fattoriale 5): per una successione di 5 altezze, esisteranno quindi 120 possibilità di permutare le altezze fra loro.
La permutazione è una operazione che si riferisce alla successione orizzontale dei vari elementi di una combinazione, differenziandosi in questo dalla disposizione, che è invece la possibilità dei vari elementi di disporsi verticalmente. Joseph Mathias Hauer calcolò, attorno al 1920,[14] il numero delle permutazioni possibili all'interno dei 12 gruppi cardinali, ottenendo questa tabella:

c	**p**	
1	1	
2	2	(2 x 1)
3	6	(3 x 2)
4	24	(4 x 6)
5	120	(5 x 24)
6	720	(6 x 120)
7	5.040	(7 x 720)
8	40.320	(8 x 5.040)
9	362.880	(9 x 40.320)
10	3.628.800	(10 x 362.880)
11	39.916.800	(11 x 3.628.800)
12	479.001.600	(12 x 39.916.800)

Occorre sottolineare che nel caso di combinazioni a trasposizione limitata (delle quali si tratterà fra breve) questi numeri devono essere ridotti: la scala di 6 suoni per toni interi, ad esempio, può dar luogo solo a 120 permutazioni, invece che alle 720 proprie di una combinazione di 6 suoni; ma si tratta di una eccezione.
Nell'ambito di 12 diverse altezze, vi sono 479.001.600 possibilità di permutazione: si tratta di quelle possibilità che Hauer definì *Melosfälle*, e che avrebbe poi ridotto a 44 *tropi*, una sorta di modelli su cui orientarsi all'interno dell'universo sonoro.
Poiché le varie permutazioni hanno 12 possibilità di trasposizione, per avere il totale delle possibili permutazioni di un certo gruppo cardinale su tutti i gradi della scala cromatica, i numeri precedenti dovranno essere moltiplicati per 12:

1x12 = 12
2x12 = 24
6x12 = 72
24x12 = 288
120x12 = 1.440
720x12 = 8.640
5.040x12 = 60.480
40.320x12 = 483.840
362.880x12 = 4.354.560
3.628.800x12 = 43.545.600
39.916.800x12 = 479.001.600
479.001.600x12 = 5.748.019.200

Una permutazione può essere effettuata in vari *cicli*, a seconda del numero delle altezze coinvolte nel processo: ad esempio, dati i numeri 12345, la permutazione (21453) è a un solo ciclo, la permutazione (123)(54) è a due cicli, mentre la permutazione (1)(32)(54) è a tre cicli.
Un'importante proprietà del processo permutativo è quella di poterlo sommare a se stesso: se una combinazione di n altezze può essere permutata n! volte, vuol dire che si può generare, con solo n altezze, una successione continua di n x n! altezze, nel corso della quale non si possa riprodurre mai, a gruppi di n, la successione iniziale; tale successione si definisce *permutativa* (sp) ed è composta da tanti membri quanti n moltiplicato p.

Tabella successione permutativa

n	**p**	**sp**
1	1	
2	2	4 (2x2)
3	6	18 (3x6)
4	24	96 (4x24)
5	120	600 (5x120)
6	720	4.320 (6x720)

Un caso particolare di permutazione è quello che permette di realizzare una successione in cui ogni altezza sia sempre preceduta e seguita da una altezza differente, secondo la formula: n(n—1) = cp*(capacità permutativa)*. Tale successione è composta di tanti membri quanti n(n—1).

Tabella capacità permutativa

n	**cp**
2	2
3	6
4	12
5	20
6	30
7	42
8	56
9	72
10	90
11	110
12	131

Come esempio dei vari tipi di successione, poniamo una combinazione di 4 elementi: essi danno luogo a 24 possibilità di permutazione (Melosfälle), originando così una *successione permutativa* di 96 elementi (24x4). Facendo in modo che ogni elemento sia preceduto e seguito da un'altro sempre diverso, otterremo una *capacità permutativa* uguale a 12 (4x3).
Es. 1.19

successione permutativa (96 elementi)

capacità permutativa (12 elementi)

I.10. Operazioni di riduzione

Lo studio delle disposizioni verticali delle varie combinazioni può essere effettuato seguendo diversi criteri di classificazione, dal generale al particolare.
Poniamo il caso più generale: dato uno spazio temperato dodecafonico <i> = 12x7 (costituito da 7 ottave divise in 12 parti uguali, e comprendente un totale di 84 altezze), le possibilità di disposizione di una singola altezza saranno 7; ma quante saranno le possibilità di disposizione di una altezza, se consideriamo anche i suoi possibili raddoppi? Il numero di queste possibilità sarà dato dalla formula:

$$dp = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)/r!$$

dove n è il numero totale delle altezze comprese all'interno di una singola classe di altezza, e r il numero dei raddoppi considerati. Di conseguenza, due altezze appartenenti alla medesima classe, poste all'interno di uno spazio temperato di 12x7, si potranno disporre in 21 modi diversi (7x6/2), tre altezze in 35 modi diversi (7x6x5/3x2), quattro altezze in 35 modi (7x6x5x4/4x3x2) cinque altezze in in 21 modi (7x6x5x4x3/5x4x3x2), sei altezze in 7 modi (7x6x5x4x3x2/ 6x5x4x3x2) e sette altezze in 1 modo solo (7x6x5x4x3x2/7x6x5x4x3x2). La matrice delle possibili disposizioni delle 7 altezze comprese in una unica classe sarà la seguente:

7 21 35 35 21 7 1

Una operazione di questo genere *(sommatoria)* può essere applicata a qualsiasi combinazione, prendendo come riferimento uno spazio temperato qualsiasi, esteso in qualsiasi modo. Essa può essere applicata a un qualsiasi genere di oggetti, certamente anche non musicali. Ad esempio si può calcolare il numero delle possibili combinazioni di due lettere in un alfabeto di 21 lettere, come quello italiano: il totale sarà dato dall'operazione 21x20/2x1 = 210.
Continuando negli esempi, quante disposizioni potrà avere una combinazione di tre classi di altezze all'interno di 7 ottave, considerati tutti i raddoppi? Poiché 3x7 = 21, il numero totale delle disposizioni sarà: 21x20x19/3x2x1 = 1.330.
Nel caso di una combinazione di 6 classi di altezze, essa potrà avere una sola possibilità di diposizione all'interno di una ottava, 924 possibilità in due ottave, 18.564 in 3, 134.596 in 4 e così via.
Ben si possono immaginare i numeri che si otterrebbero considerando combinazioni più complesse: essi sarebbero così elevati da non consentire una classificazione di pratica utilità. Partendo dal numero delle disposizioni possibili di una combinazione qualsiasi, occorrerà quindi procedere a operazioni di riduzione successive, in modo da giungere ad individuare alcune forme fondamentali, dalle quali tutti le altre possano essere dedotte.

Per ridurre a numeri ragionevoli le possibilità di disposizione, la prima operazione dovrà essere la seguente:
— Soppressione di tutti i raddoppi, cioè di tutte le altezze che siano fra loro in rapporto di ottava. Dopo questa riduzione, il numero delle possibilità di disposizione di una

combinazione, pur notevolmente ridimensionato, sarà tuttavia ancora troppo elevato perché si possa procedere ad una utile classificazione.

All'interno di una ottava si ha una sola possibilità di disporre i singoli elementi di una combinazione, mentre all'interno di due ottave queste possibilità aumentano in proporzione geometrica, all'interno di tre ottave aumentano in proporzione cubica e così via, secondo la formula:

$dp = n^c$

dove n sta per numero di ottave e c per il numero cardinale di una combinazione (cioè il numero delle classi di altezze di cui è composta).

Esempio:
d = 2 (estensione 2 ottave) c = 4 (combinazione di 4 classi di altezze)

$dp = (2)^4 = 16$ (possibilità di disposizione di 4 classi di altezze, senza raddoppi, all'interno di 2 ottave.

È importante notare che, man mano che si allarga l'estensione a più ottave, vengono ad aumentare le possibilità di disposizione, in modo direttamente proporzionale al numero delle componenti di una combinazione. Inoltre vengono a ripetersi, trasportate, tutte le disposizioni contenute nello spazio temperato di n—1 ottave. Per avere perciò il numero delle disposizioni, escludendo tutte quelle trasportate, occorrerà sottrarre al numero totale delle disposizioni contenute all'interno di uno spazio temperato di n ottave, il numero totale delle disposizioni contenute all'interno di uno spazio temperato di n—1 ottave, secondo la formula:

$dp = n^c—(n—1)^c$ e cioè, nel caso precedente:

$dp = 2^4—(2—1)^4 = 16—1 = 15.$

Nella tabella seguente è riportato il numero di disposizioni di una combinazione in relazione al numero dei suoi elementi (da 1 a 4) e all'estensione entro la quale si colloca.

d \ **n**	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2
		$2^2—1$	$3^2—2^2$	$4^2—3^2$	$5^2—4^2$	$6^2—5^2$	$7^2—6^2$
3	1	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3
		$2^3—1$	$3^3—2^3$	$4^3—3^3$	$5^3—4^3$	$6^3—5^3$	$7^3—6^3$
4	1	2^4	3^4	4^4	5^4	6^4	7^4
		$2^4—1$	$3^4—2^4$	$4^4—3^4$	$5^4—4^4$	$6^4—5^4$	$7^4—6^4$

cioè

d \ **n**	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	4	9	16	25	36	49
		3	5	7	9	11	13
3	1	8	27	64	125	216	343
		7	19	37	61	911	127
4	1	16	81	256	625	1.296	2.401
		15	65	191	369	671	1.105

Un caso limite sarà costituito da una combinazione di 12 note che si potrà disporre su sette ottave in 12^7 modi diversi, cioè in 13.841.287.201 modi.

Se la tabella precedente può sembrare una inutile rassegna di possibilità, tuttavia un lavoro teorico di questo genere è necessario per meglio inquadrare la totalità del materiale disponibile per poi, in un secondo momento, indagare circa le sue possibilità combinatorie.
Poiché tutte le ottave sono identiche fra loro, appare molto opportuno ridurre le varie combinazioni all'interno di uno spazio temperato assoluto di una unica ottava, circoscrivendo così l'ambito dello studio. La riduzione di una combinazione all'interno di uno spazio assoluto di temperamento 12 (cioè mod.12) presenta il vantaggio di ridurre

decisamente le possibilità di disposizione, individuando una sola forma fondamentale dalla quale tutte le altre possono essere dedotte; in altre parole, la riduzione allo spazio assoluto non altera la qualità di una combinazione, ma solo la sua quantità. La seconda operazione di riduzione sarà quindi la seguente:
— Compressione di tutte le altezze di una combinazione all'interno di una ottava.
Come conseguenza determinante della precedente operazione, le possibili disposizioni di una combinazione poste all'interno di una spazio assoluto qualitativo (mod.12) si riducono a UNA sola. Questo tipo di disposizione verrà denominata *a modulo fisso*, mentre ogni altro tipo di disposizione oltrepassante l'estensione di una ottava verrà denominata *a modulo variabile*.

I due tipi di riduzione fin qui trattati (eliminazione dei raddoppi di ottava e disposizione a modulo fisso), lungi dall'essere unicamente delle speculazioni teoriche, sono alla base di numerose applicazione pratiche, in particolare nella tecnica compositiva dodecafonica e seriale. La riduzione delle varie altezze a 12 classi ha determinato un procedimento compositivo, noto come *fissazione di registro*, così definito:
"ogni classe di altezze deve presentarsi sempre in una determinata ottava all'interno dello spazio temperato". In pratica, è come se il compositore disponesse soltanto di 12 altezze, operando entro una sola ottava; un'armonia che ricorra solamente ad altezze fissate è stata denominata da Obuchov, uno dei primi ad adottare il procedimento, *Armonia assoluta*.[15]

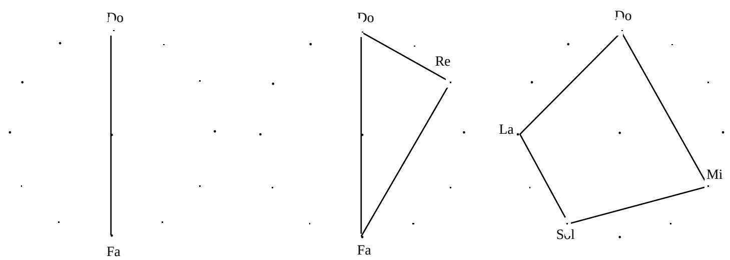
Nell'immediato secondo dopoguerra (1949), Olivier Messiaen ha fatto un uso sistematico della fissazione di registro: il suo *Mode de Valeurs et d'Intensités* ha rappresentato un precedente significativo, a cui si possono ricollegare numerose composizioni successive, come *Structures I* di Boulez e *Kreuzspiel* di Stockhausen.
L'adozione della fissazione di registro, all'interno di molta musica dodecafonica, è dovuta all'impossibilità di codificare organicamente lo spazio acustico temperato nella sua totalità: ai compositori parve conveniente ridurre lo spazio all'interno di una sola ottava e, in un secondo momento, disporre le varie classi di altezze, fissate, all'esterno di quest'ottava di riferimento.
Anche l'esclusione di ogni tipo di raddoppio era un procedimento tipico della musica dodecafonica, volto anch'esso a limitare le infinite possibilità di combinazione: ogni elemento, che fosse fissato o no, non doveva presentarsi contemporaneamente in due ottave differenti, all'interno dello spazio temperato. Il raddoppio all'ottava era considerato, dai compositori che avevano adottato la tecnica dodecafonica, come una perturbazione all'interno di un sistema altrimenti rigoroso: l'eliminazione di ogni raddoppio, più che da un'esigenza acustica, derivava quindi piuttosto da un'esigenza di semplificazione costruttiva.

I.11. Combinazioni all'interno di una ottava

L'assenza di particolari restrizioni che regolassero il succedersi degli accordi nelle composizioni atonali dell'inizio del XX secolo portò alcuni teorici e compositori a enucleare, dalle varie possibilità accordali, un certo numero limitato di combinazioni considerate *non equivalenti*. Il termine 'non equivalenti' si è prestato, tuttavia, a varie interpretazioni, determinando numerose enunciazioni teoriche diverse, spesso contrastanti. Come ha ben sottolineato Allen Forte:

> Spesso un problema teorico in musica diviene più significativo se si considerano i suoi aspetti 'combinatoriali'. Questo termine si riferisce a questioni quali: quanti? in quanti modi? ecc.[16]

Alla luce di queste considerazioni, il primo problema consiste nel riunire le varie possibili combinazioni in gruppi di appartenenza; poiché le combinazioni sono composte da un numero variabile di classi di altezze, da 1 a 12, esistono 12 gruppi di combinazioni, che si qualificano ognuno in base alla propria *cardinalità*, cioè in base al numero delle classi di altezze che li compongono; il *numero cardinale* sta a indicare il gruppo di appartenenza della combinazione, e si designa con una cifra che va da 0 a 12.
Una rappresentazione geometrica dei vari gruppi permette di cogliere rapidamente alcune relazioni fondamentali fra loro; se il totale delle 12 classi di altezza viene rappresentato attraverso un dodecagono regolare, allora esistono 12 insiemi di poligoni inscrivibili all'interno di questo dodecagono. Se il gruppo 0 viene compreso più per completezza teorica, il gruppo 1 corrisponde ai singoli vertici del dodecagono; il gruppo 2 comprende tutti i bicordi e corrisponde a segmenti di diversa lunghezza, dal più corto (per il semitono o la settima maggiore) corrispondente ai lati del dodecagono, al più lungo (tritono), corrispondente al diametro della circonferenza in cui è inscritto il dodecagono. I gruppi successivi possono essere rappresentati dal numero dei lati (o dei vertici) dei vari poligoni inscritti nel dodecagono. Il gruppo 3 comprenderà vari tipi di triangoli, il gruppo 4 sarà rappresentato da poligoni di 4 lati, dal quadrato, al rettangolo, al rombo, a vari tipi di trapezio e così via. Il gruppo 12 sarà costituito da tutto il dodecagono regolare. Si potrà infine formare un numero limitato di figure geometriche regolari (triangolo, quadrato, rettangolo, esagono, ottagono, ecc.): queste figure daranno luogo ad alcune combinazioni di altezze con particolari proprietà simmetriche (*modi a trasposizione limitata*, secondo la denominazione di Messiaen).
Es. 1.20



Come per le classi di altezze e per gli intervalli, sarà molto utile designare le varie combinazioni con una serie di numeri interi positivi separati da una virgola, ad indicare le classi di altezze di cui ogni combinazione è composta.

Esempio:
(0,3,6,7) = do,mib,fa#,sol

Questo tipo di notazione non dà alcuna informazione circa la effettiva disposizione di una combinazione all'interno di una costruzione musicale: gli elementi sono posti in una successione priva di senso musicale, necessaria unicamente allo scopo di una adeguata classificazione.
Si pone ora la domanda: "in quanti modi è possibile la divisione di un insieme di 12 classi di altezze (o *aggregato*) e, più in generale, in quanti modi è possibile la divisione di un insieme di n classi di altezze?".
Il numero delle combinazioni possibili all'interno di ogni gruppo cardinale si può ottenere in vari modi; a questo scopo è necessario individuare innanzitutto i metodi che consentano una più rapida ed efficace catalogazione di tutte le possibilità. Il primo passaggio consiste nel definire le coppie di elementi 'complementari':
"Due intervalli sono complementari se la loro somma (mod.12) è uguale a 0 (a+b = 0). Due combinazioni sono complementari se non hanno elementi in comune e se la loro unione contiene tutti e 12 le classi di altezza. Due insiemi sono complementari se per ogni combinazione contenuta nell'uno, la sua combinazione complementare è contenuta nell'altro".

La tabella seguente chiarirà meglio il concetto:

Cardinalità	complementare a	Cardinalità
0	→	12
1	→	11
2	→	10
3	→	9
4	→	8
5	→	7
6	→	6
7	→	5
8	→	4
9	→	3
10	→	2
11	→	1
12	→	0

Fra i 12 gruppi di combinazioni esiste una evidente simmetria, dovuta al fatto che ogni combinazione ne origina automaticamente una seconda, costituita da tutte le classi di altezze mancanti nella prima (relazione di complementarità). Poiché le altezze rimaste, dopo che ognuna delle diverse combinazioni di n altezze sarà stata sottratta dal totale

cromatico, costituiranno tutte le diverse combinazioni di 12—n altezze e viceversa, allora il numero di combinazioni di n altezze sarà uguale al numero di combinazioni di 12—n altezze; le combinazioni di 6 altezze, ancora più ricche di relazioni interne, possono essere divise in due gruppi, uno complementare dell'altro.
La simmetria fra il numero delle combinazioni che costituiscono i vari gruppi appare ancor più evidente dalla seguente tabella, in cui la relazione di complementarietà è evidenziata dal simbolo →

combinazioni	cardinalità		combinazioni	cardinalità
1	0	→	1	12
12	1	→	12	11
66	2	→	66	10
220	3	→	220	9
495	4	→	495	8
792	5	→	792	7
924	6			

Il numero totale delle combinazioni così tabulate è 4.096 = 2^{12} e corrisponde al numero di tutte le scale possibili (si veda anche a pag. 52). Il teorema che ha determinato i numeri della tabella è il seguente: "Il numero di combinazioni di n altezze prese r volte equivale al numero di permutazioni di n prese r volte diviso r!" secondo la formula, peraltro già nota:[17]

$$c = n(n—1)...(n—r+1) \ / \ r(r—1)...(r—r+1)$$

Nell'esempio precedente, n è 12 ed r è il numero di classi di altezze che costituiscono ogni combinazione. Il simbolo r! rappresenta il prodotto di r moltiplicato per tutti i numeri interi positivi minori di r. Se, ad esempio, vogliamo determinare con il sistema precedente il numero di accordi possibili di 4 note, dovremmo prima trovare il numero di permutazioni di 12 diverse note prese 4 volte, cioè 12x11x10x9 (11.880), e poi dividere il risultato per 4!, cioè 4x3x2x1 (24). Otterremo così 495, il numero totale di tutti gli accordi di 4 note possibili all'interno di una ottava, incluse le trasposizioni. Per 3 note otterremo il numero:
12x11x10 (1.320)/3x2x1 (6) = 220, per 2 note 12x11 (132)/ 2 = 66, ecc.
In quest'ultimo caso il numero delle possibili combinazioni di due note (bicordi), sarà uguale al numero dei possibili intervalli semplici, poiché intervalli e bicordi sono due aspetti dello stesso fenomeno.
Se vogliamo determinare anche il numero totale dei possibili modi, occorrerà moltiplicare il numero delle scale per il numero delle classi di altezze (elementi) che le costituiscono, ossia per la loro cardinalità. Ricordiamo che un modo è uno degli aspetti particolari di una scala, nel quale le varie altezze siano poste in successione ascendente "a partire da una nota determinata".

c = cardinalità		**m** = modi
1	12x1	=12
2	66x2	=132
3	220x3	=660
4	495x4	=1980
5	792x5	=3690
6	924x6	=5544
7	792x7	=5544
8	495x8	=3690
9	220x9	=1980
10	66x10	=660
11	12x11	=132
12	1x12	=12
Totale		=24.576

La formula per calcolare il numero delle possibili combinazioni all'interno del totale cromatico uguale a 12, ossia n(n—1)...(n—r+1)/r!, vale naturalmente anche per calcolare il numero delle possibili combinazioni all'interno di un totale minore di 12, come è riportato nella tabella seguente:

Cardinalità = 1

1 combinazione di	0 elementi	→	1 combinazione di	1 elemento

Cardinalità = 2

1 combinazione di	0 elementi	→	1 combinazione di	2 elementi
2 combinazioni di	1 elemento			

Cardinalità = 3

1 combinazione di	0 elementi	→	1 combinazione di	3 elementi
3 combinazioni di	1 elemento	→	3 combinazioni di	2 ”

Cardinalità = 4

1 combinazione di	0 elementi	→	1 combinazione di	4 elementi
4 combinazioni di	1 elemento	→	4 combinazioni di	3 ”
62 ”				

Cardinalità = 5

1 combinazione di	0 elementi	→	1 combinazione di	5 elementi
5 combinazioni di	1 elemento	→	5 combinazioni di	4 ”
10 ”	2 elementi	→	10 ”	3 ”

Cardinalità = 6

1 combinazione di	0 elementi	→	1 combinazione di	6 elementi
6 combinazioni di	1 elemento	→	6 combinazioni di	5 ”
15 ”	2 elementi	→	15 ”	4 ”
20 ”	3 ”			

Cardinalità = 7

1	combinazione di	0 elementi	→	1	combinazione di	7 elementi
7	combinazioni di	1 elemento	→	7	combinazioni di	6 ”
21	”	2 elementi	→	21	”	5 ”
35	”	3 ”	→	35	”	4 ”

Cardinalità = 8

1	combinazione di	0 elementi	→	1	combinazione di	8 elementi
8	combinazioni di	1 elemento	→	8	combinazioni di	7 ”
28	”	2 elementi	→	28	”	6 ”
56	”	3 ”	→	56	”	5 ”
70	”	4 ”				

Cardinalità = 9

1	combinazione di	0 elementi	→	1	combinazione di	9 elementi
9	combinazioni di	1 elemento	→	9	combinazioni di	8 ”
36	”	2 elementi	→	36	”	7 ”
84	”	3 ”	→	84	”	6 ”
126	”	4 ”	→	126	”	5 ”

Cardinalità = 10

1	combinazione di	0 elementi	→	1	combinazione di	10 elementi
10	combinazioni di	1 elemento	→	10	combinazioni di	9 ”
45	”	2 elementi	→	45	”	8 ”
120	”	3 ”	→	120	”	7 ”
210	”	4 ”	→	210	”	6 ”
252	”	5 ”				

Cardinalità = 11

1	combinazione di	0 elementi	→	1	combinazione di	11 elementi
11	combinazioni di	1 elemento	→	11	combinazioni di	10 ”
55	”	2 elementi	→	55	”	9 ”
165	”	3 ”	→	165	”	8 ”
330	”	4 ”	→	330	”	7 ”
462	”	5 ”	→	462	”	6 ”

Nella seguente tavola riassuntiva si possono leggere sulle diagonali i numeri delle possibili combinazioni per ogni singola cardinalità (cfr. pag. 87):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220		
1	5	15	35	70	126	210	330	495			
1	6	21	56	126	252	462	792				
1	7	28	84	210	462	924					
1	8	36	120	330	792						
1	9	45	165	495							
1	10	55	220								
1	11	66									
1	12										
1											

Se ogni combinazione ne origina automaticamente un'altra, costituita da tutti gli elementi mancanti alla prima, risulta evidente che all'interno di una sola ottava una combinazione di 12 altezze è complementare allo 0: non a caso un accordo di 12 suoni, all'interno di una ottava, non ha nessuna possibilità di movimento. I due gruppi cardinali 0 e 12 devono essere inseriti nella classificazione solamente per coerenza metodologica.[18]
Il gruppo a cardinalità 1 comprende una sola combinazione, costituita da un solo elemento; questo gruppo equivale graficamente ad un punto che non è in relazione che con se stesso; il suo gruppo complementare 11 possiede le stesse proprietà: questi due gruppi vengono trattati per coerenza metodologica, in quanto non presentano nessun elemento di interesse per una analisi di tipo combinatorio.
L'equivalenza fra i due gruppi cardinali 0 e 12 suggerisce alcune considerazioni.

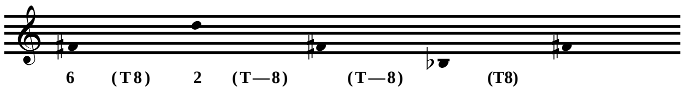
L'immagine del vuoto è stata spesso rappresentata dai compositori del XX secolo attraverso il ricorso a combinazioni accordali di tutti e 12 i suoni. Berg ad esempio utilizzò il 'totale cromatico', disposto verticalmente, nel terzo dei *Fünf Orchesterlieder* op. 4 (1910), in corrispondenza delle parole "Oltre i confini del tutto guardavi lontano pensando..." Cinquant'anni dopo Ligeti avrebbe utilizzato il totale cromatico, variamente disposto ed articolato, nella composizione orchestrale *Atmosphères*, per suggerire l'immagine del vuoto e di spazi immensi.
L'idea che il tutto possa corrispondere al nulla esprime un'esigenza reale, che si fonda su una concezione del mondo inteso come sintesi di fenomeni complementari; attraverso questi fenomeni si manifestano porzioni differenti di una totalità che, qualora affermata integralmente, si annulla in se stessa. Tradotta in termini musicali, questa concezione porta a considerare le varie formazioni accordali come tessere di un mosaico, in una sorta di gioco ad incastri dalle molte combinazioni possibili.
Anche nelle arti grafiche esiste un modo di procedere analogo, nel quale figura e sfondo vengono a fondersi l'una dentro l'altro: la figura si risolve nello sfondo poiché entrambi sono, in definitiva, interscambiabili. Su questa tecnica, che consiste nella divisione del piano geometrico in gruppi regolari, Escher scrisse: "Essa è la più ricca fonte di ispirazione da cui io abbia mai derivato le mie idee ed essa non è in nessun modo inaridita".[19]
Per dieci anni la divisione regolare del piano era stata per Escher un rompicapo, fino a quando, nel 1936, visitò col la moglie l'alhambra di Granada. Nuovamente ebbe l'impressione che nella ritmica scomposizione del piano risiedessero ricchissime possibilità. Traslazione (trasposizione), simmetria (inversione) rotazione (retrogradazione) simmetria di scorrimento, erano i possibili spostamenti che avrebbero portato un motivo ornamentale a coincidere con se stesso. Secondo Escher esistevano 17 diversi gruppi di trasformazione che potevano portare un motivo a coincidere con se stesso, come scrisse nello studio *Divisione regolare del piano* del 1958.[20] È interessante notare che proprio in quegli anni, alcuni importanti teorici musicali svilupparono, in maniera del tutto indipendente, una analoga teoria di divisione regolare dello spazio musicale temperato. Mentre tuttavia le realizzazioni grafiche di Escher hanno avuto una grande importanza nello sviluppo dell'arte contemporanea, si pensi ad esempio alla *Op art*, le teorie sulla divisione regolare dello spazio musicale non hanno conosciuto uguale fortuna.

I.12. Equivalenza per trasposizione

La trasposizione è una operazione che correla ogni elemento a se stesso: essa è quindi una operazione di equivalenza. Ciò significa che, sottoposta a trasposizione, ogni combinazione resta equivalente a se stessa. Ogni operazione di trasposizione è reversibile: l'inverso di Tn è T—n.

Esempio:
Se Tn (x) = x+n, allora T—n(x+n) = (x+n)—n = x
Se T8 (6) = 6+8, allora T—8(6+8) = 6+8—8 = 6

Es. 1.21



Tutte le trasposizioni di una data combinazione sono definite come diverse rappresentazioni equivalenti di una unica forma. Il totale delle trasposizioni di una combinazione viene definito *insieme delle combinazioni equivalenti per trasposizione*.
Ogni combinazione può essere trasposta 12 volte ed ha con le proprie trasposizioni un rapporto più o meno stretto, in relazione agli elementi comuni che ha con esse. La combinazione (0,1,2,3,6,8) ad esempio, ha con le sue dodici trasposizioni questi rapporti (per completezza viene riportata anche la trasposizione 0, corrispondente all'originale).

Trasposizione	
0	6 note comuni
1	3 note comuni
2	3 note comuni
3	2 nota comune
4	2 nota comune
5	3 nota comune
6	4 note comuni
7	3 nota comune
8	2 nota comune
9	2 nota comune
10	3 note comuni
11	3 note comuni
Totale relazioni	36 (6x6)

Es. 1.22

Per *relazione di note comuni* fra due combinazioni si intende il numero di elementi che costituiscono l'*intersezione* (@) fra le due combinazioni. Per *vettore numerico di note comuni (o di trasposizione)* di un insieme di combinazioni equivalenti per trasposizione si intende il totale delle relazioni di note comuni fra una combinazione e le sue dodici trasposizioni; il totale delle relazioni è uguale al quadrato della cardinalità della combinazione. Il *vettore numerico di note comuni* (iv) sta ad indicare gli elementi comuni fra una combinazione e le sue trasposizioni; esso può essere espresso simbolicamente in vari modi: nella sua forma completa è formato da 11 cifre, denominate "entrate", corrispondenti ognuna alle note comuni fra una combinazione e le sue 11 trasposizioni; nel caso precedente avremo: 33223 4 32233.
Attorno all'asse centrale, costituito dal tritono (T6), la prima metà si riproduce specularmente nella seconda metà. Questa proprietà, che deriva dalla riduzione degli 11 intervalli in 6 classi di intervalli fondamentali (1=11 2=10 3=9 4=8 5=7 6=6) può essere definita nel modo seguente:
"Ogni combinazione x contenuta in un insieme z (cioè ogni trasposizione a T di z) ha lo stesso numero di elementi in comune con la trasposizione a (12—T) di z."
Se T6 divide in due parti uguali e simmetriche la successione del vettore numerico di trasposizione, sarà allora sufficiente esprimere il vettore con 6 sole entrate: nel caso precedente avremo 332234.

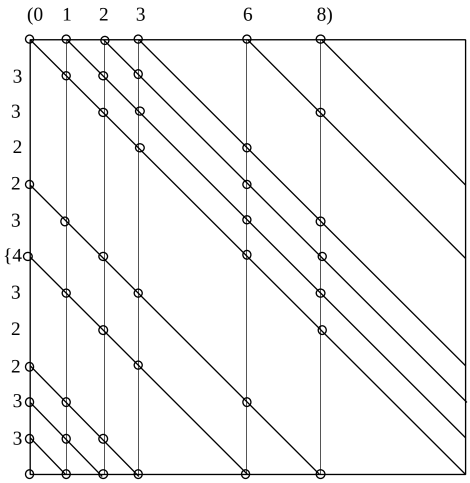
Il numero totale delle note comuni fra una combinazione e le sue trasposizioni definisce il suo grado di *isomorfismo*; nel caso precedente si avrà un livello di trasposizione (T6) con 4 note in comune con l'originale, 6 livelli di trasposizione (T1,T2,T5,T7,T10,T11) con 3 note in comune con l'originale, e 4 livelli di trasposizione (T3,T4,T8,T9) con 2 note in comune. Tutte le combinazioni a cardinalità n hanno lo stesso grado di isomorfismo; il grado di isomorfismo tende ad aumentare con il numero cardinale, cioè con il numero degli elementi che compongono la combinazione, secondo una legge numerica ben precisa:

cardinalià	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
grado isomorfismo	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Con l'aumento del numero cardinale aumentano i valori delle singole entrate del vettore numerico di note comuni, fino al caso limite di una combinazione a cardinalità 12, il cui vettore numerico sarà costituito da tutte entrate uguali a 12. Facendo ricorso ad una analogia di tipo geometrico, potremmo dire che ogni combinazione è costituita da un sottoinsieme di 12 combinazioni identiche, ruotate ognuna di 360:12 (30 gradi) rispetto a quella immediatamente precedente (12 trasposizioni). Le 12 trasposizioni a loro volta si possono organizzare in ulteriori sottoinsiemi, in base alla disposizione delle entrate del loro *vettore numerico di note comuni*. Quanto più alto sarà il valore di una entrata corrispondente a una certa trasposizione, cioè quanti più saranno gli elementi in comune con l'originale, tanto più le due trasposizioni tenderanno a coincidere.

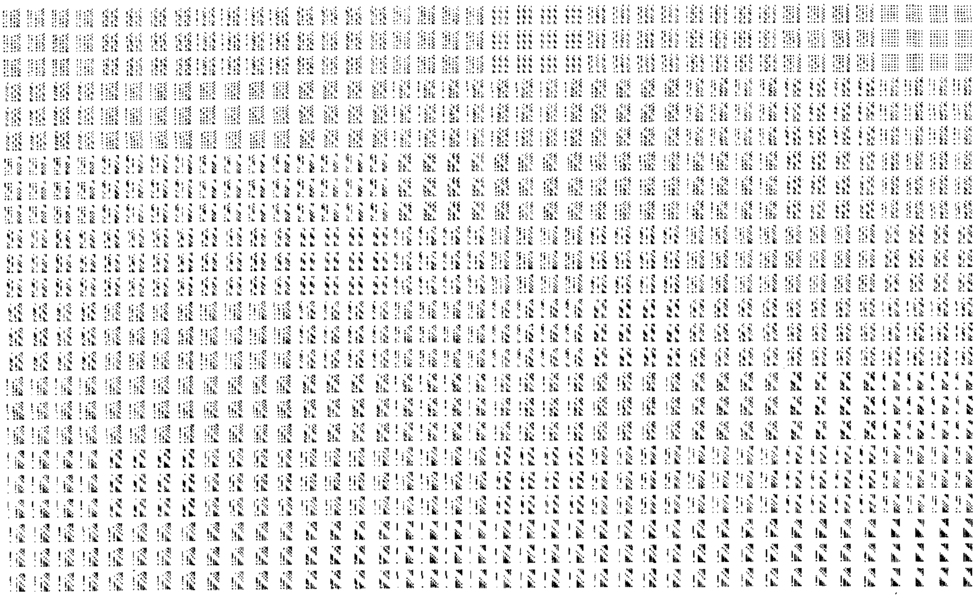
Il *vettore numerico di note comuni* è fondamentale per ben comprendere alcune proprietà delle singole combinazioni, configurandosi come una sorta di 'codice genetico' contenente le indicazioni necessarie per individuare relazioni particolari; esso si può calcolare empiricamente attraverso un semplice sistema di assi cartesiani che riporti, ordinate una sull'altra, tutte e 12 le trasposizioni di una combinazione. Dal diagramma seguente, costruito sulla combinazione (0,1,2,3,6,8), risulta immediatamente evidente il disporsi delle note comuni sui vari livelli di trasposizione, paragonabili ad alcune pedine disposte su una scacchiera (in ascissa sono allineati i suoni della combinazione; in ordinata appaiono i numeri dei suoni comuni sui 12 livelli di trasposizione).

Es. 1.23



Per ogni combinazione può essere individuato il corrispondente diagramma del vettore numerico di note comuni: ne derivano configurazioni geometriche ricche di varietà e di interesse. Facendo corrispondere ad ogni altezza un determinato colore, ne possono derivare diagrammi colorati.

Nella tavola seguente sono riportati in miniatura i diagrammi corrispondenti a tutte le combinazioni di sei suoni (esacordi).
Es. 1.24



I.13. Trasponibilità limitata

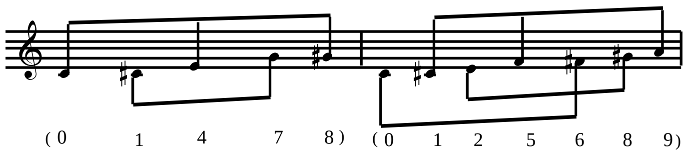
Alcune combinazioni hanno la proprietà di presentarsi uguali all'originale ad un livello di trasposizione inferiore a 12: si tratta delle combinazioni *simmetriche per trasposizione* (sT), più conosciute col nome di *modi a trasposizione limitata*, secondo un termine improprio introdotto da Olivier Messiaen.[21]
Per Messiaen, il primo modo corrisponde alla scala esatonale, ed è costituito da tutti toni interi, mentre il secondo modo, noto anche come *modo ottofonico* o *scala alternata* alterna tono e semitono; il terzo modo alterna due semitoni e un tono, mentre gli altri modi presentano caratteristiche via via differenti.
Le enunciazioni teoriche di Messiaen, anche se hanno conosciuto una notevole fortuna, sono molto lacunose e imprecise. Basti pensare che il compositore francese enumera solo 7 modi a trasposizione limitata, mentre in realtà essi sono 16.
La trasponibilità limitata è una proprietà particolarmente importante che necessita di un adeguato approfondimento.
Un *circolo* è una successione che si completa quando il primo membro viene ripetuto; nella scala cromatica di 12 suoni, la distanza fra classi di altezze adiacenti è uguale a 1: quindi la struttura si definisce come un *circolo* dell'intervallo 1; tuttavia un'ottava può

essere divisa in parti uguali in varie maniere, usando circoli di intervalli maggiori di 1. Un circolo dell'intervallo 2, ad esempio, divide l'ottava in 6 parti uguali, uno dell'intervallo 3 in 4 parti uguali, uno dell'intervallo 4 in 3 parti uguali, uno dell'intervallo 6 in 2 parti uguali. Un circolo dell'intervallo 5 (circolo delle quarte/quinte) divide l'ottava in 12 parti uguali, così come il circolo dell'intervallo 1, che comprende tutti i gradi della scala cromatica.

Il *coefficente di trasponibilità* (ct) indica quante volte una combinazione è trasponibile all'interno di una ottava e, di norma, è uguale a 12. Tutte le scale 'cicliche all''ottava' possono essere trasposte 12 volte, poiché al loro interno non si ripete ciclicamente una stessa figura. Al contrario, le combinazioni che contengono più volte una stessa figura, che possono cioè essere divise in segmenti uguali (tale proprietà è denominata *simmetria per trasposizione* o *degenerazione*) sono cicliche ad un intervallo minore di 12. Ognuna di queste combinazioni può essere trasposta un certo numero di volte, sempre inferiore a 12, e il valore del loro coefficente di trasponibilità deve essere un sottomultiplo di 12, cioè 1, 2, 3, 4 o 6; il numero dei semitoni compresi all'interno delle figure cicliche, moltiplicato per il coefficente di trasponibilità, dovrà essere uguale a 12.
Se all'interno di una combinazione una medesima figura si ripete 2 volte, le stesse note e gli stessi intervalli successivi si riprodurranno a partire dall'intervallo 6: la combinazione avrà solo 6 trasposizioni invece di 12 (ciclica all'intervallo 6) e il suo coefficiente di trasponibilità sarà uguale a 6, perché 6x2 = 12. Analogamente, se la medesima figura si ripete 3 volte, allora la combinazione disporrà di 4 trasposizioni; se la medesima figura si ripete 4 volte, la combinazione disporrà di 3 sole possibili trasposizioni, se si ripete 6 volte, la combinazione disporrà di 2 sole possibili trasposizioni. Anche la scala cromatica è una combinazione a trasposizione limitata poiché ha un solo livello di trasponibilità: se trasposta su un qualsiasi intervallo, il risultato sarà sempre uguale a se stesso.

Numerose sono le caratteristiche che differenziano le combinazioni a trasposizione limitatata da tutte le altre:
— Il numero dei loro modi è limitato: invece di essere equivalente alla cardinalità, è uguale al numero degli elementi che costituiscono la figura ciclica. Ad esempio la combinazione (0,1,2,6,7,8) ha solo tre modi perché la figura ciclica comprende tre elementi (0,1,2).
— Il livello di trasposizione sul quale queste combinazioni riproducono loro stesse dà luogo a una permutazione dei suoi elementi. Per esempio T4 (0,4,8) = (4,8,0), che è una permutazione dell'originale.
— Nelle combinazioni a trasposizione limitata, certe entrate del *vettore numerico di trasposizione* vengono a coincidere periodicamente (1, 2, 3, 4 o 6 volte) con la cardinalità (cfr. paragrafo I.12, 'Equivalenza per trasposizione').
— Tutte le combinazioni a trasposizione limitata sono formate da tritoni e/o quinte aumentate.
Benché le combinazioni di 5 e 7 suoni non possano essere a trasposizione limitata, in quanto il loro numero cardinale non è sottomultiplo di 12, tuttavia la combinazione (0,1,4,7,8) e la sua complementare (0,1,2,5,6,8,9) hanno alcune caratteristiche particolari: comunque si voglia sovrapporre un tritono ad una triade aumentata, senza rad-

doppi, il risultato sarà sempre equivalente a (0,1,4,7,8); comunque si vogliano sovrapporre due tritoni ad una triade aumentata, senza raddoppi, il risultato sarà sempre equivalente a (0,1,2,5,6,8,9).
Es. 1.25

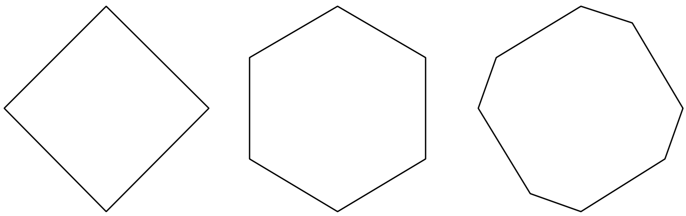


Tutte le combinazioni a trasposizione limitata sono *simmetriche per inversione*, tranne due che sono reciprocamente inverse *(correlate per inversione)*. Nella tabella seguente sono elencate tutte le combinazioni a trasposizione limitata, ordinate in base al loro *coefficiente di trasponibilità* e al loro *modello intervallare di base* o *bip* (cfr. paragrafo I.18, 'Costituzione intervallare', pag. 61).

ct	**bip**	**figura ciclica**	**cardinalità**	
(6)	1_6	0 (tritono)	2 suoni	
(6)	$4_1 1_2$	0,1,2,3,4	10 suoni	
(6)	$1_1 1_5$	0,1	4 suoni	
(6)	$3_1 1_3$	0,1,2,3	8 suoni	
(6)	$1_2 1_4$	0,2	4 suoni	
(6)	$2_1 2_2$	0,1,2,4	8 suoni	
(6)	$1_1 1_2 1_3$	0,1,3	6 suoni	] reciprocamente inverse
(6)	$1_1 1_3 1_2$	0,1,4	6 suoni	
(6)	2_1	0,1,2	6 suoni	
(4)	1_4	0 (triade aumentata)	3 suoni	
(4)	$1_1 1_3$	0,1	6 suoni	
(4)	$2_1 1_2$	0,1,2	9 suoni	
(3)	1_3	0 (settima diminuita)	4 suoni	
(3)	$1_1 1_2$	0,1 (scala alternata)	8 suoni	
(2)	1_2	0 (scala esatonale)	6 suoni	
(1)	1_1	0 (scala cromatica)	12 suoni	

Es. 1.26

Procedendo a una trascrizione grafica, le figure corrispondenti alle combinazioni a trasposizione limitata danno luogo a figure geometriche regolari: triangolo, quadrato, esagono, e tutti gli altri poligoni regolari inscrivibili in un dodecagono.
Es. 1.27



Le combinazioni a trasposizione limitata sono sempre connesse ai circoli di intervalli sottomultipli di 12 (1,2,3,4,6) e alla divisione dell'ottava in parti uguali. Attorno alla divisione elementare per due, che origina il tritono (circolo 6) e quella per tre, che origina la triade aumentata (circolo 4), si raggruppano tutte le altre.

Divisione dell'ottava per 2 (su tritono)

do,	fa#
do,do#,	fa#,sol
do,do#,re,	fa#,sol,sol#
do,do#,re,mib,	fa#,sol,sol#,la
do,do#,re,mib,mi,	fa#,sol,sol#,la,sib
do,do#,re,mib,mi,fa,	fa#,sol,sol#,la,sib,si

Divisione dell’ottava per 2+2 (su settima diminuita)

do,	mib,	fa#,	la
do,do#,	mib,	fa#,sol,	la
do,	mib, fa,	fa#,	la, si
do,do#,	mib,mi,	fa#,sol,	la,sib

Divisione dell’ottava per 2+3 (su tritono e su triade aumentata)

do, re,	fa#,sol#
do,re,mi,	fa#,sol#,sib
do,re mi,fa,	fa#,sol#,sib,si

Divisione dell’ottava per 3 (su triade aumentata)

do,	mi,	sol#
do,do#,	mi,fa,	sol#,la
do,do#,re,	mi,fa,fa#,	sol#,la,sib

Tutte le formazioni basate sul tritono sono generate dai 12 diversi modi di comporre il numero 6. Nella tabella seguente sono evidenziate le relazioni di complementarità.

ci costituzione intervallare
c cardinalità
M classificazione secondo Messiaen
→ indicazione di complementarità

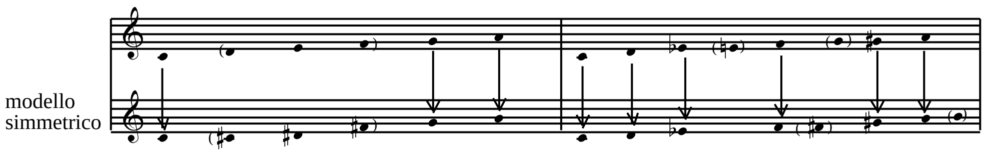
ci	**c**	**M**		**ci**	**c**	**M**
1-1-1-1-2	10 suoni	modo 7	→	6	2 suoni	tritono
1-1-1-3	8 suoni	modo 4	→	1-5	4 suoni	modo 2 (tronco)
1-1-2-2	8 suoni	modo 6	→	2-4	4 suoni	6ª aumentata
2-1-2-1	8 suoni	modo 2	→	3-3	4 suoni	7ª diminuita
1-2-3	6 suoni	modo 2 (tronco)	→	1-3-2	6 suoni	modo 2 (tronco)
1-1-4	6 suoni	modo 5				
2-2-2	6 suoni	modo 1				

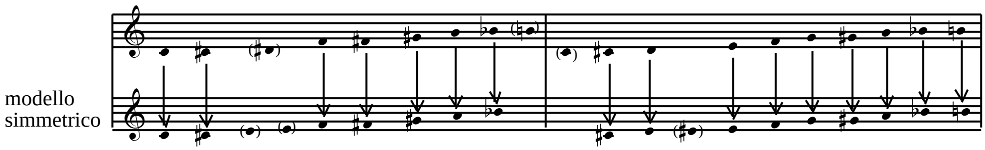
Tutte le formazioni basate sulla quinta aumentata sono generate dai 4 diversi modi di comporre il numero 4:

ci	**c**	**M**		**ci**	**c**	**M**
3-1	9 suoni	modo 3	→	4	3 suoni	5ª aumentata
1-3	6 suoni	modo 3 (tronco)				
2-2	6 suoni	modo 1				

Tutte le combinazioni di 6 note diverse comprendono almeno 3 note (50%) facenti parte di una combinazione simmetrica per trasposizione. Tutte le combinazioni di 8 note diverse comprendono almeno 6 note (il 75%) facenti parte di una combinazione

ottotonica simmetrica per trasposizione. Questo spiega come l'armonia atonale possa essere compresa per la maggior parte nei modelli simmetrici. Tutte le combinazioni di 9 note diverse, comprendono almeno 7 note appartenenti al modello simmetrico semitono-semitono-tono (ossia il 78%). Per 10 note la percentuale è addirittura del 90%: 9 note su 10 devono appartenere al modello simmetrico.
Es. 1.28





L'armonia tonale ricorre prevalentemente ad accordi asimmetrici, che si collegano fra loro in base a formule ben determinate tonalmente. Le formule costruite su accordi simmetrici per trasposizione, che sono in numero più limitato, non sono ben determinate tonalmente: ciò significa che all'interno di questi accordi esiste più di una tonica, così da generare una ambiguità ed una indeterminazione che non è possibile ottenere attraverso gli accordi asimmetrici.

I.14. Combinazioni equivalenti per trasposizione

L'*insieme delle combinazioni equivalenti per trasposizione* (eT) è stato variamente denominato; ecco alcuni dei termini utilizzati per indicarlo: *Sonority* (Hanson); *Unordered collection* (Lewin); *Source set* (Martino); *Unordered pitch class set* (Forte); *Pitch structure-Pitch class collection* (Howe); *Unordered row* (Perle); *Type* (Rahn); *Array* (Chrisman); *Klangzentrum* (Steger); *Grundkomplex*, *Tonkomplex*, *Grundgestalt* (Simbriger); *Echellonement* (Costère).[22] La mancanza di una terminologia uniforme, anzi spesso imprecisa, ambigua e con sfumature diverse di significato, dovuta alla elaborazione indipendente di numerose teorie, rischia di creare qualche equivoco.
Il termine italiano più appropriato è senz'altro quello di 'insieme delle combinazioni equivalenti per trasposizione' termine che, per praticità, può essere abbreviato semplicemente in *insieme* (in inglese *set*): ogni insieme rappresenta in sostanza una classe di equivalenza data da una combinazione e da tutte le sue trasposizioni.

Poiché la trasposizione è una operazione di equivalenza, numerose combinazioni, apparentemente diverse, sono in realtà forme equivalenti di uno stesso insieme. Date queste premesse, è necessario individuare un procedimento che permetta di ridurre tutte le combinazioni equivalenti per trasposizione ad una sola forma, per giungere infine a selezionare le sole forme fondamentali. Operando in questa maniera, le varie trasposizioni e i possibili modi di una combinazione possono essere raggruppati in un unico insieme; ogni insieme comprenderà i differenti aspetti di una medesima combinazione, senza considerare se i suoi elementi siano presentati come 'melodia', 'accordo' o 'scala'.
L'elenco di tutti gli insiemi possibili può essere dedotto in maniera sistematica: se si vuole trovare il numero degli insiemi fondamentali, cioè delle combinazioni realmente diverse tra loro, occorre escludere tutte le trasposizioni di ogni forma, dividendo per 12 i numeri ottenuti nella tavola di tutte le scale possibili contenuta nel paragrafo 'Combinazioni all'interno di una ottava' (I.11, pag. 36); senonché, a questo punto, le cose si complicano notevolmente: il numero delle combinazioni di 4 suoni (495) diviso per 12, è uguale a 41 e 1/4, mentre il numero di combinazioni di 4 note, escluse le trasposizioni, dovrebbe essere necessariamente un numero intero. L'apparente contraddizione si scioglie se si considera che esistono 3 combinazioni di 4 suoni che dividono l'ottava in parti uguali in modo tale che la somma delle loro trasposizioni sia 1,25x12 invece di 3x12. Queste combinazioni, ovviamente a trasposizione limitata, sono:

do-do#-fa#-sol (6 trasposizioni possibili, ottava divisa in due parti, cioè 1/2)
do-do#-fa#-sol# (6 trasposizioni possibili, ottava divisa in due parti, cioè 1/2)
do-mib-fa#-la (3 trasposizioni possibili, ottava divisa in quattro parti, cioè 1/4).

Queste tre combinazioni, invece di dare origine a 12 trasposizioni come tutte le altre, danno origine rispettivamente a 6, 6, e 3 trasposizioni; il totale di 6+6+3/12 sarà appunto uguale a 1 e 1/4. Si arriverà al totale degli insiemi fondamentali di 4 note, cioè 43, sottraendo 1 e 1/4 da 495/12 (41 e 1/4) e sommando 3 al risultato.
Ciò determinerà che anche il numero dei possibili insiemi a 8 note, escludendo le trasposizioni, dovrà essere uguale a 43, in virtù della simmetria numerica fra gruppi complementari (la somma delle cui cardinalità sia uguale a 12). Arriviamo precisamente alla stessa soluzione se adottiamo un altro metodo più propriamente 'musicale', che non comporta formule algebriche o calcoli matematici, e nel quale l'individuazione del numero delle possibili combinazioni, all'interno di un gruppo a cardinalità n, possa essere effettuato solo con mezzi empirici.

Ad una base di 3 note (do-do#-re) aggiungiamo, una alla volta, tutte le altre altezze della scala cromatica eccetto il 'si', che è omesso poiché non formerebbe nessuna combinazione nuova, ma semplicemente una trasposizione (si-do-do#-re) della prima (do-do#-re-mib). Avremo così 8 diverse combinazioni che saranno basate sullo stesso gruppo di 3 note. Manteniamo il (do-do#) come base, alziamo il terzo elemento di un semitono e procediamo come prima. Dopo questa operazione otterremo le seguenti combinazioni:

base	IV nota	n. di combinazioni
do-do#-re#	mib → sib	7
do-do#-mi	fa → sib	6
do-do#-fa	fa# → sib	5
do-do#-fa#	sol → sib	4
do-do#-sol	lab → sib	2
do-do#-sol#	la → sib	1

Le combinazioni (do-do#-sol-sol#) e (do-do#-sol#-la) sono da escludere perché trasposizioni di due formazioni precedenti (do-do#-fa-fa#) e (do-do#-mi-fa). Non è possibile formulare altre combinazioni che comprendano un semitono: dobbiamo fare attenzione ad escludere questo intervallo nel corso delle operazioni successive.
Il passo successivo sarà di innalzare il secondo elemento e operare come sopra, su di una nuova base:

base	IV nota	n. di combinazioni
do-re-mi	fa# →la	4
do-re-fa	sol →la	3
do-re-fa#	lab →la	2

A questo punto le combinazioni poste su una base di tono intero si esauriscono, e di nuovo è necessario alzare il secondo elemento:

base	IV nota	n. di combinazioni
do-mib-solb	la	1

Si vedrà come ulteriori operazioni possano generare solo trasposizioni di combinazioni già date, e che il numero di combinazioni di 4 note, così ottenuto, sarà uguale a 43, come confermato dal procedimento algebrico.
Nel suo classico libro *Serial Composition and Atonality* (1962), Perle si sofferma a lungo su questo metodo e osserva che Pohlmann Mallalieu, studente dell'Università di Louisville, era personalmente arrivato alle stesse cifre definite tramite il metodo algebrico. Qualsiasi altro metodo adottato dimostrerà che la seguente tavola di combinazioni non equivalenti è esatta:

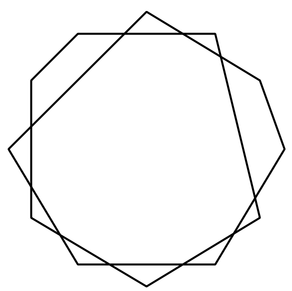
1 combinazione di	0 elementi	→	1 combinazione di	12 elementi	
1 ”	1 elemento	→	1 ”	11 ”	
6 combinazioni di	2 elementi	→	6 combinazioni di	10 ”	
19 ”	3 ”	→	19 ”	9 ”	
43 ”	4 ”	→	43 ”	8 ”	
66 ”	5 ”	→	66 ”	7 ”	
80 ”	6 ”				

Totale 352

Il numero dei possibili insiemi equivalenti per trasposizione (**eT**) per ogni gruppo cardinale (**c**) è riassunto in questa tabella:

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
eT	0	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	0

Le relazioni numeriche fra il numero degli insiemi sono evidenti. Fra di loro domina una stretta simmetria: tutto è ordinato specularmente attorno all'asse del VI grado di cardinalità. Il numero delle combinazioni cresce con il crescere del numero degli elementi, fino a cardinalità 6, per poi decrescere simmetricamente fino a ritornare sullo 0. Ci sono 80 insiemi di 6 note, 66 insiemi di 5 e di 7 note, 43 di 4 e 8 note, 19 di 9 e 3 note, 6 di 2 e 10 note, 1 di 1 e 11 note. Risulta evidente la simmetria tra i gruppi 5-7, 4-8, 3-9, 2-10, 1-11, 0-12, mentre il gruppo 6 non ha un corrispettivo simmetrico.
Gli insiemi a cardinalità 0 e 12 si corrispondono reciprocamente. Nell'insieme a cardinalità 0 (*Nulltonklang*) non è contenuto nulla, mentre nell'insieme a cardinalità 12 (*Zwölftonklang*) sono contenute tutte le possibilità, in modo che tutte le singole combinazioni si annullano reciprocamente. Il gruppo 12 rappresenta la totalità dello spazio temperato assoluto; nella sua costituzione interna, esso non può essere che immobile e sempre uguale a se stesso.
Gli insiemi a cardinalità 1-11 vengono menzionati solamente per coerenza metodologica, in quanto hanno limitate possibilità d'impiego: d'altronde, gli insiemi costruiti su gruppi a cardinalità maggiore sono spesso costituiti dalla somma di due combinazioni a cardinalità minore, in base a criteri di 'complementarità'.
Ogni insieme di combinazioni equivalenti può essere rappresentato graficamente mediante una figura geometrica inscritta in un dodecagono regolare (cerchio sonoro), figura che permette una analisi delle singoli forme, mostrando immediatamente le relazioni che intercorrono fra loro e svelandone con chiarezza la eventuale 'complementarità' o 'specularità' (nell'esempio seguente, i numeri tra parentesi appartengono all'insieme complementare).
Es. 1.29



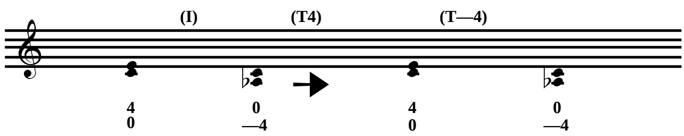
Il numero delle combinazioni corrisponde al numero delle figure geometriche inscrivibili all'interno di un dodecagono regolare; l'insieme di tutte le combinazioni ottenibili con

le 12 classi di altezze (o delle figure geometriche iscrivibili in un dodecagono) si suddivide in 12 sottoinsiemi, in base alla cardinalità (cioè in base al numero dei lati che formano le figure); a loro volta, questi sottoinsiemi sono costituiti da tutte le possibilità di combinazione di n classi di altezze.
L'inverso di ogni combinazione a cardinalità 2 è uguale alla sua trasposizione sul livello corrispondente alla seconda classe di altezze, secondo la formula:

I (x,y) = T—y (x,y)

Esempio:
I (0,1) = T—1(0,1); I(0,2) = T—2(0,2); I(0,3) = T—3(0,3)
I (0,4) = T—4(0,4); I(0,5) = T—5(0,5); I(0,6) = T—6(0,6)

Es. 1.30



L'inverso della combinazione (0,6), corrisponde alla combinazione stessa, in virtù della riduzione mod.12. Questo fatto è determinante per una più corretta comprensione di quanto verremo ad enunciare nei capitoli successivi.

I.15. Calcolo dei modi

Partendo dalle 352 forme fondamentali appena enumerate è possibile arrivare al numero totale dei *modi*, escludendo tutti quelli equivalenti per trasposizione. Il calcolo dei modi consiste nel moltiplicare i totali degli insiemi, precedentemente individuati, (cfr. pag. 48) per il loro numero cardinale:

eT insiemi equivalenti per trasposizione
c numero cardinale
m modi

eT	**c**	**m**
1	x1	= 1
6	x2	= 12
19	x3	= 57
43	x4	= 172
66	x5	= 330
80	x6	= 480
66	x7	= 462
43	x8	= 344
19	x9	= 171
6	x10	= 60
1	x11	= 11
1	x12	= 12

Totale 2.112

Ad essere precisi, la tabella precedente richiederebbe una ulteriore distinzione: le 16 combinazioni a trasposizione limitata non sono trasportabili su tutti i loro gradi costitutivi; occorrerà perciò ridurre il totale ottenuto in precedenza (2.112), sottraendovi il numero delle combinazioni 'degenerate'. La tabella seguente riporta il numero delle combinazioni degenerate per ogni gruppo cardinale e il totale dei modi reali che derivano da ognuna di esse:

c numero cardinale
tl combinazioni a trasposizione limitata o degenerate
ct coefficiente di trasponibilità
mtl modi reali derivati dalle combinazioni a trasposizione limitata

c	**tl**	**ct**	**mtl**	
2	(0,6)	6	1	
3	(0,4,8)	4	1	
4	(0,3,6,9)	3	1	
	(0,1,6,7)	6	2	Totale 5
	(0,2,6,8)	6	2	
6	(0,2,4,6,8,10)	2	1	
	(0,1,4,5,8,9)	4	2	
	(0,1,2,3,4,5)	6	3	Totale 12
	(0,1,3,6,7,9)	6	3	
	(0,1,3,6,7,9)	6	3	
8	(0,1,3,4,6,7,9,10)	3	2	
	(0,1,2,3,6,7,8,9)	6	4	Totale 10
	(0,1,2,4,6,7,9,10)	6	4	

c	**tl**	**ct**	**mtl**
9	(0,1,2,4,5,6,8,9,10)	4	3
10	(0,1,2,3,4,6,7,8,9,10)	6	5
12	(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)	1	1
Totale modi reali			38

Per ogni gruppo cardinale occorre ora sottrarre, dai totali degli insiemi equivalenti per trasposizione precedentemente individuati, il numero delle combinazioni a trasposizione limitata, moltiplicando poi il risultato per il rispettivo numero cardinale e sommando il prodotto al numero dei modi reali individuato nella tabella precedente:

eT tl	**c**		**mtl**	**m**					
1	x 1			=1					
(6—1)	x 2	=10	+1	=11	cioè	19x3	=57	—2	=55
(19—3)	x3	=54	+1	=55					
(43—3)	x 4	=160	+5	=165		43x4	=172	—7	=165
66	x 5			=330					
(80—5)	x 6	=450	+12	=462		80x6	=480	—18	=462
66	x 7			=462					
(43—3)	x 8	=320	+10	=330		43x8	=344	—14	=330
(19—1)	x 9	=162	+3	=165		19x9	=171	—6	=165
(6—1)	x10	=50	+5	=55		6x10	=60	—5	=55
11	x11			=11					
(1—1)	x12	=0	+1	=1		1x12	=12	—11	=1

Totale 2.048 o 2^{11} (in totale vengono sottratte, da 102 virtualmente possibili, 64 combinazioni ‘degenerate’)

Per ricavare dal totale delle combinazioni equivalenti per trasposizione il numero delle possibili combinazioni comprese tutte le trasposizioni, numero già ottenuto in precedenza con il metodo algebrico (cfr. pag. 34), si dovranno effettuare questi calcoli:

1	x12			=12	→	1	x12			=12
(6—1)	x12	=60	+6	=66	→	6	x12	=72	—6	=66
(19—1	x12	=216	+4	=220	→	19	x12	=228	—8	=220
(43—3)	x12	=480	+(3+6+6)	=495	→	43	x12	=516	—(9+6+6)	=495
66	x12			=792	→	66	x12			=792
(80—5)	x12	=900	+(2+4+6+6+6)	=924	→	80	x12	=960	—(10+8+6+6+6)	=924

Totale 4.096 o 2^{12}

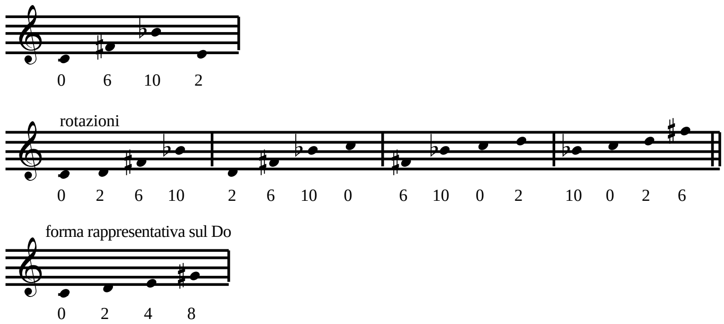
I modi, in tutte le loro possibili trasposizioni, sono 2.048x12 = 24.576. Questa cifra è identica a quella ottenuta in precedenza, moltiplicando il numero totale degli insiemi

per le loro rispettive cardinalità (cfr. pag. 34); in questo caso, invece, è stato moltiplicato il numero dei modi per il numero delle possibili trasposizioni.
Concludendo, il numero delle combinazioni non equivalenti corrisponde al numero degli insiemi fondamentali e al numero dei segmenti di serie non ordinati, poiché un segmento di serie non è altro che una successione lineare all'interno del totale cromatico.

I.16. Forma primaria

Per convenzione ogni insieme può essere rappresentato da una delle sue possibili combinazioni, posta in successione ascendente, nella sua *forma primaria* trasposta sullo 0 (*forma rappresentativa*). Per ottenere la *forma primaria* si può procedere in vari modi, ma sempre ponendo le altezze in ordine consecutivo scalare, poiché così una combinazione si presenta nel suo aspetto essenziale. La riduzione alla forma primaria è una semplice generalizzazione del metodo di dedurre la forma triadica da un accordo variamente disposto (metodo di Zarlino).
Vi sono molti sistemi simbolici per configurare le forme primarie di una combinazione. Fra i numerosi teorici che hanno affrontato questo problema non sempre è esistita una concordanza di opinioni, tanto che in alcuni casi, una stessa combinazione è stata designata attraverso forme primarie diverse.
I procedimenti più usati per individuare la forma primaria sono due: uno è quello che consiste nell'individuare l''intervallo esterno più piccolo', in inglese 'smallest outside interval' (Teitelbaum, Forte, Rahn, Martino), l'altro quello che consiste nell'individuare la successione 'più serrata verso sinistra' (in inglese 'most closely packed to the left' (Perle, Simbriger, Starr, Mazzola).[23]
Il primo procedimento consiste nelle seguenti operazioni:
— Considerare una insieme qualsiasi, ad esempio (0,6,10,2) e porlo in ordine ascendente (0,2,6,10).
— Calcolare la differenza fra l'ultimo e il primo elemento: 10—0 = 10
— Sommare 12 al valore del primo elemento e 'permutare circolarmente' l'insieme (rotazione) così che il primo elemento divenga l'ultimo: (2,6,10,12); questa procedura è uguale a quella dell'individuazione dei modi.
— Calcolare la differenza fra i nuovi valori dell'ultimo e del primo elemento:
12—2 = 10.
— Ripetere la procedura per quanti sono gli elementi dell'insieme:
(6,10,12,14) 14—6 = 8
(10,12,14,18) 18—10 = 8
— L'ordine che contiene la differenza più piccola fra l'ultimo e il primo elemento (smallest outside interval) è la forma primaria mod.12; in pratica la combinazione sarà ridotta al più stretto spazio possibile (in inglese *minimum span*) all'interno di una ottava.
— Se, come nel caso precedente, tale differenza è uguale per più forme, occorre fare la differenza fra il penultimo e il primo elemento, e così via:

(6,10,12,14) 12—6 = 6
(10,12,14,18) 14—10 = 4.
— L’ordine che contiene la differenza più piccola fra il il penultimo e il primo elemento (next-most outside interval) è la forma primaria; nel caso precedente 4: (10,12,14,18) mod.12 → (10,0,2,6).
— La forma primaria dovrà essere trasposta in modo da iniziare sullo 0. Diverrà così la *forma rappresentativa*: (0,2,4,8). Il numero intero finale di questa forma sarà il più piccolo possibile fra tutte le forme di un insieme di combinazioni equivalenti per trasposizione.
Es.1.31



Il secondo procedimento per individuare la forma primaria di un insieme consiste nell’ordinare gli interi delle classi di altezza in modo che gli intervalli più piccoli siano posti verso sinistra e quelli più grandi verso destra; a questo proposito è necessario sottolineare che ogni combinazione può essere designata da una successione numerica, specificante la sua *costituzione intervallare interna*, cioè l’ampiezza degli intervalli fra classi di altezze adiacenti, compreso l’intervallo fra l’ultima classe e l’ottava della prima. Il totale di questi intervalli sarà uguale al numero cardinale della combinazione e la loro somma dovrà essere uguale a 12.
La *costituzione intervallare primaria* raggruppa gli intervalli più piccoli verso sinistra. Poiché la triade minore (0,3,7) è costituita dagli intervalli 3(0,3), 4(3,7), 5(7,0), la forma rappresentativa che indicherà questa combinazione, secondo il sistema dell’intervallo più piccolo verso sinistra, sarà (0,3,7), in quanto l’intervallo (0,3) = 3 è più piccolo di (3,7) = 4 e di (7,0) = 5. Se una combinazione contiene più intervalli ugualmente piccoli, occorrerà porre in successione i suoi elementi in modo che gli intervalli più piccoli siano sempre comunque verso sinistra; la costituzione intervallare primaria della scala diatonica, ad esempio, sarà la seguente: 1-2-2-1-2-2-2.

Esempio:
Combinazione (0,2,3,11) con costituzione intervallare 2-1-8-1; poiché 2<8, nella costituzione intervallare primaria il 2 dovrà precedere l’8, in questo modo: 1-2-1-8; così otterremo la forma primaria (11,0,2,3) e la forma rappresentativa (0,1,3,4).

Es. 1.32

Benché nella maggioranza dei casi la forma rappresentativa sia uguale per entrambi i procedimenti di riduzione (quello che individua l'intervallo esterno più piccolo e quello che individua la successione più serrata verso sinistra), in alcuni casi, come i seguenti, non è così:

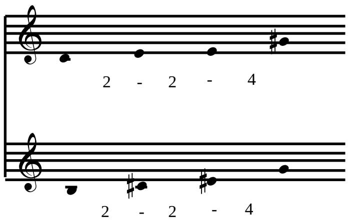
I procedimento	II procedimento
0,2,3,5	0,1,3,10
0,3,4,7	0,1,4,9
0,2,3,6	0,1,4,10
0,2,3,7	0,1,5,10
0,3,5,8	0,2,5,9
0,2,3,4,6	0,1,2,4,10
0,3,4,5,8	0,1,2,5,9
0,2,3,4,7	0,1,2,5,10

Nelle Tavole di Classificazione degli insiemi, inserite in questo libro (paragrafo V.4), sono riportate, ove necessario, tutte e due le forme.
Si può ora determinare se una combinazione sia la trasposizione di un'altra, facendo la differenza (mod.12) fra le classi di altezza, nella posizione corrispondente, delle "forme primarie" di entrambe. Se ogni differenza sarà uguale sempre allo stesso numero, questo numero corrisponderà al valore di t (indice numerico di trasposizione), attraverso il quale le due combinazioni sono poste in relazione. Da ciò consegue che due combinazioni sono correlate per trasposizione se le loro forme primarie hanno le stesse serie di intervalli adiacenti, la cui differenza deve essere costante.

Esempio:

0,	2,	4,	8 —
11,	1,	3,	7 =
1,	1,	1,	1

Es. 1.33



I.17. Forma primaria inversa

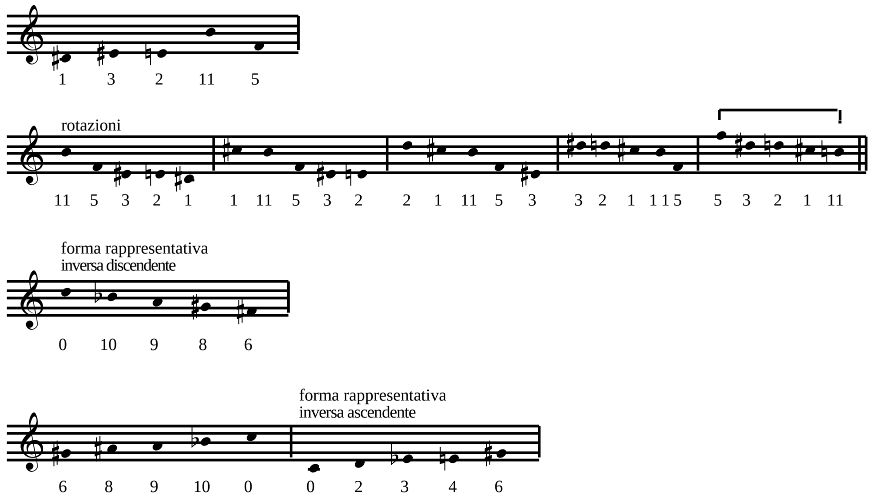
La forma primaria inversa di una combinazione si ottiene con una procedura analoga alle precedenti, ma ponendo gli elementi in ordine discendente anziché ascendente, seguendo questi passaggi:

— Considerare un insieme qualsiasi, ad esempio (1,3,2,11,5), e porlo in ordine discendente (11,5,3,2,1).
— Calcolare la differenza fra il primo e l'ultimo elemento: 11—1 = 10.
— Sommare 12 all'ultimo elemento e permutare circolarmente l'insieme, così che l'ultimo elemento divenga il primo: (13,11,5,3,2).
— Calcolare la differenza fra i nuovi valori del primo e dell'ultimo elemento: 13—2 = 11.
— Ripetere la procedura per quanti sono gli elementi dell'insieme:

(14,13,11,5,3) 14—3 = 11
(15,14,13,11,5) 15—5 = 10
(17,15,14,13,11) 17—11 = 6

— L'ordine che contiene la differenza più piccola fra il primo e l'ultimo elemento è la *forma primaria inversa discendente*: (17,15,14,13,11) mod.12 (5,3,2,1,11).
— La forma primaria inversa dovrà essere trasposta in modo da iniziare sullo 0, divenendo la *forma rappresentativa inversa discendente*: (0,10,9,8,6).
— Tale forma dovrà essere posta in ordine ascendente (6,8,9,10,0) e infine essere trasposta sullo 0, dando luogo alla *forma rappresentativa inversa* (0,2,3,4,6).

Es. 1.34



Con un procedimento analogo a quello adottato per la trasposizione, possiamo determinare se una combinazione sia l'inverso di un'altra facendo la somma (mod.12) fra le classi di altezza, nelle posizioni corrispondenti, delle forme primarie di entrambe (su un qualsiasi livello di trasposizione). Se ogni somma sarà uguale a uno stesso numero, questo numero corrisponderà al valore dell' *indice numerico di inversione trasposta* (TI) attraverso il quale le due combinazioni sono poste in relazione.

Esempio:

0,	2,	3,	4,	6 +
5,	3,	2,	1,	11 =
5,	5,	5,	5,	5

Es. 1.35

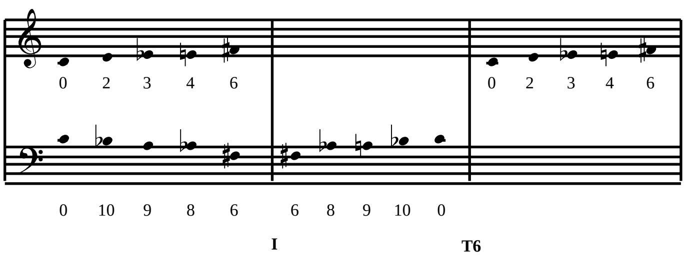
Se entrambe le combinazioni sono poste nella loro forma rappresentativa, cioè sul livello di trasposizione 0, la somma dei loro rispettivi numeri interi sarà uguale a 0.

0,	2,	3,	4,	6 +
0,	10,	9,	8,	6 =
0,	0,	0,	0,	0

La somma sarà ancora uguale a 0 se le combinazioni saranno trasportate su indici di trasposizione inversi.

7,	9,	10,	11,	1 +
5,	3,	2,	1,	11 =
0,	0,	0,	0,	0

La forma rappresentativa inversa di una combinazione si può ottenere, più semplicemente, individuando la forma rappresentativa, nel caso precedente (0,2,3,4,6) e invertendola (0,10,9,8,6) in modo che la somma dei numeri interi dell'originale e del suo inverso, posti in posizioni corrispondenti, siano uguali a 0. A trasposizione 0, ogni altezza sommata alla sua inversione sarà uguale a 0 mod.12. Nel caso dell'insieme (0,2,3,4,6), la forma primaria e la forma primaria inversa sono uguali: ciò sta ad indicare che l'insieme è *simmetrico per inversione.*
Es. 1.36



Concludendo, le operazioni di *trasposizione* e di *inversione* sono strettamente collegate. La trasposizione di una combinazione può essere definita come l'addizione (mod. 12) di una costante a tutte le classi di altezza di cui è costituita:

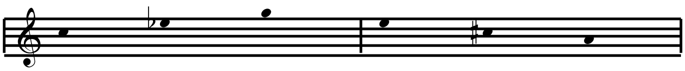
(0,	3,	7) +
4,	4,	4 =
(4,	7,	11)

L'inversione trasposta di una combinazione può essere invece definita come la sottrazione (mod. 12) di tutte le classi di altezza da una costante data:

4, 4, 4 —
(0, 3, 7) =

(4, 1, 9)

La costante uguale alla somma di una classe di altezze e della sua corrispondente inversione (4) è l'*indice numerico di inversione trasposta* (TI).[24]
Es. 1.37.



0 3 7 4 1 9

(I4)

I.18. Costituzione intervallare interna

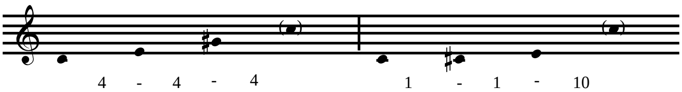
La *costituzione intervallare interna* di un insieme è rappresentabile in vari modi. Il più semplice consiste in una successione numerica *(successione intervallare)* specificante l'ampiezza degli intervalli fra classi di altezze adiacenti, compreso l'intervallo fra l'ultima classe e l'ottava della prima. Il numero totale di questi intervalli sarà uguale al numero cardinale dell'insieme e la loro somma dovrà essere uguale a 12.

Esempio:

insieme	(0,	2,	4,	5,	8,	9,	[0])
successione intervallare	2 -	2 -	1 -	3 -	1 -	3.	

La *successione intervallare* non stabilisce nessuna gerarchia fra le classi di altezza di un insieme. Questa distinzione è molto importante in quanto pone fra parentesi i concetti stessi di 'scala', di 'tonica' o di 'fondamentale', sostituendoli con il concetto seriale di campo (applicabile a tutte le scale prive di tonica come, ad esempio, certe scale extraeuropee: Slendro, ecc.).
Nella scala di do maggiore (do-re-mi-fa-sol-la-si), la nota di partenza "do" è fondamentale per una corretta qualifica della successione; utilizzando le stesse altezze, a partire dal re si avrà la cosiddetta scala "dorica", a partire dal mi la scala "frigia" e così via. Considerando, al contrario, le sette note della scala come una generica successione di intervalli 1-2-2-1-2-2-2 (costituzione intervallare primaria di (0,1,3,5,6,8,10) le varie rotazioni (modi) della successione assumeranno la connotazione di differenti aspetti di un'unica forma fondamentale: 2-1-2-2-2-1-2 sarà considerato equivalente di 1-2-2-2-1-2-2, e così via. La scala di do maggiore sarà semplicemente il modo 2 di quella successione intervallare.

La costituzione intervallare interna di una combinazione è tanto più *equilibrata* quanto più i suoi elementi sono disposti uniformemente all'interno del totale cromatico. Nel caso del III grado di cardinalità, la combinazione (0,4,8 / do,mi,sol#), con costituzione intervallare 4-4-4 è la più 'equilibrata', mentre la combinazione (0,1,2 / do,do#,re), con costituzione intervallare 1-1-10, è la più 'disequilibrata'.
Es. 1.38



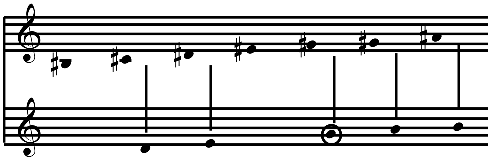
Esistono altri tipi di successione numerica per designare la costituzione intervallare interna di un insieme.
L'insieme (0,1,3,5,6,8,10) corrispondente alla scala diatonica, oltre ad essere rappresentabile attraverso la *successione intervallare* 1-2-2-1-2-2-2, può essere ugualmente individuato attraverso la successione 2111211111, denominata successione per *gradi costitutivi*; ogni cifra di questa successione indica alternativamente il numero di altezze consecutive e l'ampiezza degli intervalli che le dividono; essa è sempre composta da un numero pari di cifre, da 2 a 12, e può essere rappresentata graficamente con una successione di pieni e di vuoti:

(0,	1,		3,		5,	6,		8,		10)	
●	●	-	●	-	●	●	-	●	-	●	-
2		1	1	1	2		1	1	1	1	1

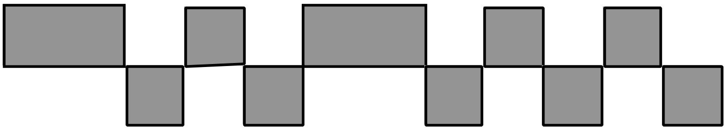
L'interesse di tale successione sta nel fatto che l'ordine delle cifre è retrogradato rispetto alla successione propria dell'insieme complementare; infatti la successione intervallare 2-2-3-2-3, corrispondente alla scala pentatonica complementare di quella diatonica, può essere notata, per gradi costitutivi, in questa maniera: 1111121112. In un certo senso la successione per gradi costitutivi evidenzia l'equivalenza fra insiemi complementari, postulata da numerosi studiosi: Detlef Gojowy ad esempio, nel suo classico studio *Neue sowjetische Musik der 20er Jahre*,[25] rappresenta la scala diatonica di Do maggiore indicandone le classi di altezze mancanti, in questa maniera: (1,3,6,8,10) → do#,re#,fa#,sol#,la#.

Il complementare di un insieme posto nella sua forma primaria, per esaurire lo spazio dodecafonico, deve essere collocato su un'altezza individuabile all'interno della successione per gradi costitutivi, sempre dopo una cifra corrispondente a una entrata dispari, da 1 a 9.
Nel caso precedente la scala diatonica 2111211111 può essere completata da una scala pentatonica complementare posta su un'altezza individuabile dopo 5 cifre, in questo caso 2+1+1+1+2 = 7; reciprocamente la scala pentatonica 1111121112 può essere completata da una scala diatonica complementare posta su un'altezza individuabile dopo 5 cifre, in questo caso 1+1+1+1+1 = 5. I due insiemi completano lo spazio dodecafonico unendosi in questa maniera 21112 | 11111. La somma degli intervalli sui quali si realizza l'unione deve essere sempre uguale a 12 (nel caso specifico (7+5).

Es. 1.39



Es. 1.40



La costituzione intervallare di una combinazione può essere rappresentata in *codice binario* (in inglese *binary pattern*), trasformando gli interi delle classi di intervalli in questo modo: 1=1, 2=10, 3=100, 4=1000, ecc. La costituzione intervallare 1-2-3-4-2, ad esempio, potrà essere trascritta nel codice binario 1-10-100-1000-10 o più semplicemente 110100100010. Dato un insieme è possibile individuare il suo complementare rappresentando i suoi elementi attraverso un codice binario. Il complementare della combinazione precedente 110100100010, si otterrà sostituendo ogni 1 con uno 0; ne risulterà 001011011101, che per rotazione darà 10-1-10-1-1-10-100, cioè 2-1-2-1-1-2-3, complementare di 1-2-3-4-2.

La costituzione intervallare può essere disposta raggruppando gli stessi intervalli in ordine ascendente, in questo modo: 1122222; tale successione assume il nome di *modello intervallare di base* (in inglese *basic interval pattern*, abbreviato in *bip*) e può essere notata in forma abbreviata;[26] il *bip* della combinazione precedente ad esempio, può essere abbreviato in $2_1 5_2$. È chiaro che uno stesso bip può essere caratteristico di numerose combinazioni; tutte le combinazioni con lo stesso bip, spesso molto diverse fra loro, sono raggruppabili in *classi*. Attraverso le classi si può giungere a calcolare il numero totale degli insiemi per ogni grado di cardinalità, secondo la formula: d!/i! per ogni bip (Metodo di Barbour, cfr. paragrafo IV.2).[27]
La scala diatonica, ad esempio, è composta dal seguente bip: $2_1 5_2$. Tutte le possibili scale di 7 suoni con questo bip sono: 7!/2!5! =21:7 =3. L'insieme delle combinazioni di 7 suoni si divide in 7 classi: $6_1 1_6$, $5_1 1_2 1_5$, $5_1 1_3 1_4$, $4_1 2_2 1_4$, $4_1 1_2 2_3$, $3_1 3_2 1_3$, $2_1 5_2$. L'elenco completo degli insiemi raggruppati per classi, secondo il loro modello intervallare di base, è riportato nel paragrafo V.3, 'Classi'.

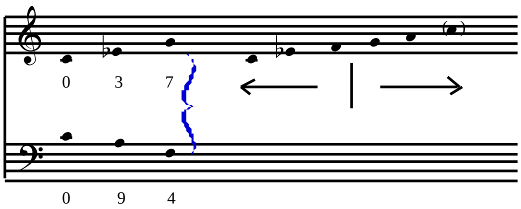
I.19. Retrogradazione e inversione degli intervalli

Disponendo gli elementi di una combinazione in modo da retrogradare l’ordine degli intervalli, si origina una seconda combinazione, in stretta affinità con la prima: fra le due combinazioni si stabilisce una relazione di specularità, in quanto le due serie di intervalli sono reciprocamente inverse o *correlate per inversione* (cI). In termini geometrici, la retrogradazione degli intervalli corrisponde alla riproduzione speculare di un poligono.

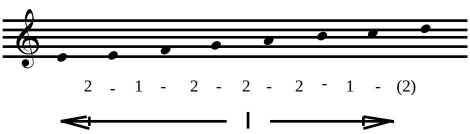
Inversione e *retrogradazione* degli intervalli sono due operazioni equivalenti; ad esempio gli intervalli della triade minore 3-4-5 (do,mib,sol) sono retrogradi e inversi di quelli della triade maggiore 5-4-3 (do,fa,la):

I(3-4-5) = (9-8-7), I(7-8-9) = (5-4-3)

La retrogradazione non è altro che una inversione contratta all’interno di una ottava: infatti l’inverso (o moto contrario) degli intervalli all’interno di due ottave, corrisponde al loro retrogrado all’interno di una ottava. Nel caso si ponesse l’inversione degli intervalli 3-4-5 all’interno di due ottave, si avrà la successione non-retrogradabile 5-4-3-3-4-5 cioè Do,Fa,La,Do,Mib,Sol,Do, mentre all’interno di una ottava si avrà una contrazione in 3-2-2-2-3.
Es. 1.41



Alcune successioni intervallari, se retrogradate, rimangono identiche; sono le successioni *non-retrogradabili* e gli insiemi che ne derivano, in tutto 86, sono definiti *simmetrici per inversione* (sI). La successione 4-4-4, corrispondente all’insieme (0,4,8 - do,mi,sol#) è un esempio di non-retrogradabilità; l’inverso di (0,4,8) infatti è uguale a (0,4,8). La scala diatonica (2-1-2-2-2-1-2) è un altro esempio di non-retrogradabilità:
Es. 1.42



L’individuazione delle successioni non-retrogradabili permette di indagare sulla legge aritmetica che regola il numero degli *insiemi equivalenti per inversione* (eI). Riprendiamo la tabella in cui sono riportati i numeri dei possibili insiemi equivalenti per trasposizione (cfr. pag. 49):

c												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
eT												
0	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	0

Il numero degli insiemi equivalenti per inversione (eI) è in rapporto con il numero degli insiemi equivalenti per trasposizione. Esso si ottiene sottraendo al numero degli insiemi equivalenti per trasposizione (eT) il numero degli insiemi simmetrici per inversione (sI): il risultato dà il numero di coppie di insiemi correlati per inversione (cI). Questo numero deve essere diviso per due e infine sommato al numero degli insiemi simmetrici per inversione.

c	**eT**	**sI**	**cI**				**eI**
6	80	—20	=60	:2	=30	+20	=50
5-7	66	—10	=56	:2	=28	+10	=38
4-8	43	—15	=28	:2	=14	+15	=29
3-9	19	—5	=14	:2	=7	+5	=12
2-10	6	—1	=5	:1	=5	+1	=6
1-11	1	—1	=0	:1	=1	+1	=1
0-12	1	—1	=0	:1	=0	+1	=1

La successione dei numeri dei possibili insiemi simmetrici per inversione, in base al grado di cardinalità, è strutturata in modo speculare sui multipli di 5.

c												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sI												
1	1	1	5	15	10	20	10	15	5	1	1	1

Il totale di questi insiemi è 86.

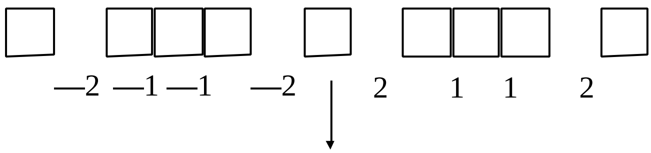
La successione dei numeri dei possibili insiemi correlati per inversione, nei gruppi cardinali 3-9, 4-8 e 5-7, è strutturata in modo speculare sui multipli di 7.

c												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
cI												
0	1	5	7	14	28	30	28	14	7	5	1	0

I.20. Simmetria per inversione

In ogni insieme simmetrico per inversione, la forma primaria e la forma primaria inversa sono uguali. Le proprietà di un insieme simmetrico per inversione appaiono ancor più evidenti dall'analisi della sua costituzione intervallare interna. Tradotta in immagine geometrica, la non-retrogradabilità degli intervalli corrisponde ad un poligono regolare, simmetrico attorno al proprio asse centrale che, riprodotto specularmente, rimane identico a se stesso. Ponendo su di una linea retta le serie di intervalli di due successioni correlate per inversione, come 2-1-1-2 e (—2)-(—1)-(—1)-(—2), otterremo una successione non-retrogradabile. Può essere utile riprodurre graficamente l'esempio precedente:

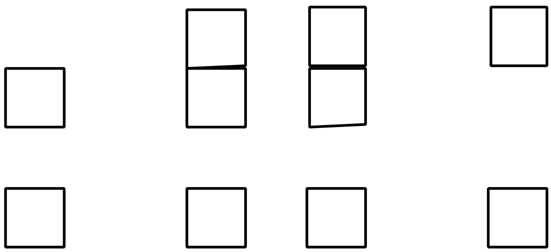
Es. 1.43



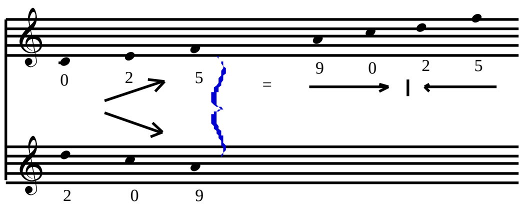
È evidente che l'unione di due insiemi correlati per inversione dà origine a un soprainsieme simmetrico per inversione. Questo insieme, a sua volta, può essere disgiunto in due sottoinsiemi correlati per inversione.

(0,2,5) + T2I(0,2,5) = (0,2,5)+(2,0,9) = (0,2,5,9), in forma rappresentativa (0,3,5,8), insieme simmetrico per inversione.

Es. 1.44

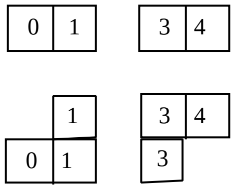


Es. 1.45

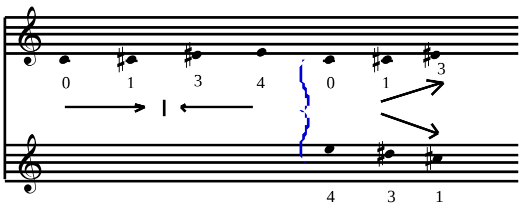


(0,1,3,4), insieme simmetrico per inversione, può essere disgiunto in due insiemi correlati per inversione (0,1,3) e (4,3,1).

Es. 1.46



Es. 1.47



Esistono due tipi di simmetria orizzontale, secondo la disposizione dell'asse che serve da specchio immaginario fra i suoni: la *simmetria intercalare o polare*, quando l'asse si intercala fra due suoni e la *simmetria mediana* o *nucleare,* quando l'asse si sovrappone a un suono. Nelle successioni simmetriche per inversione (non-retrogradabili), l'asse di simmetria è equidistante da coppie di suoni correlati per inversione, corrispondendo così al suono mediano oppure all' intervallo posto fra i due suoni mediani.
La simmetria intercalare o mediana di un paio di insiemi simmetrici o correlati per inversione non dipende dal loro numero cardinale bensì dall'estensione minima entro cui si attua la simmetria. Se l'estensione comprende un numero pari di semitoni la simmetria sarà mediana, altrimenti sarà intercalare.

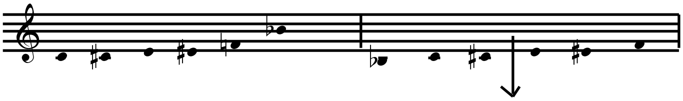
Esempi:
L'insieme (0,1,2,3,4,8) è simmetrico per inversione; l'estensione minima entro cui si realizza la sua simmetria comprende 12 semitoni (pari): l'insieme è quindi a nota mediana.
Es. 1.48

L'insieme (0,1,2,3,6,8) ha le stesse proprietà del precedente eppure è a simmetria intercalare, poiché l'estensione minima entro cui si configura la simmetria comprende 15 semitoni (dispari).

Es. 1.49

L'insieme (0,1,2,3,5,10) oltre a essere simmetrico per inversione è complementare di se stesso o *reversibile* (*all-combinatorial* per Babbit). La sua simmetria si configura nell'estensione minima che comprende 7 semitoni (dispari); esso è quindi a simmetria intercalare.

Es. 1.50



L'insieme (0,1,2,3,4,6) è correlato per inversione e complementare di un altro (tali insiemi si dicono anche 'mutualmente esclusivi' o 'relativi', cfr. pag. 83). La loro simmetria, a nota mediana, si configura in un estensione minima che comprende 8 semitoni (pari).

Es. 1.51

L'insieme (0,1,2,3,6,7) ha le stesse proprietà del precedente, eppure configura col suo relativo una simmetria intercalare entro l'estensione di 11 semitoni (dispari).

I.21. Equivalenza per inversione trasposta

Ogni insieme simmetrico per inversione può riprodurre se stesso per inversione (I) o per inversione trasposta (TI). Il numero dei valori di TI attraverso cui un insieme può riprodurre se stesso è equivalente alle sue permutazioni e quindi al suo numero cardinale. Il valore primario di TI è applicabile alla forma primaria dell'insieme e al suo inverso. I valori secondari di TI riguardano invece le forme secondarie e i loro inversi.

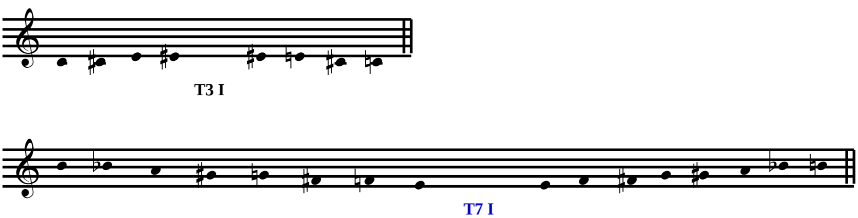
Esempio:

T3I (0,1,2,3)	→	T3(0,11,10,9)	→	(3,2,1,0)	(forma primaria)
T1I (1,2,3,0)	→	T1(1,0,11,2)	→	(2,1,0,3)	(forma secondaria)
T11I (2,3,0,1)	→	T11(2,1,4,3)	→	(1,0,3,2)	"
T9I (3,0,1,2)	→	T9(3,6,5,4)	→	(0,3,2,1)	"

Es. 1.52

I valori primari di TI, attraverso cui due insiemi complementari possono riprodurre loro stessi, devono dare come somma 10; ad esempio se il valore TI dell'insieme (0,1,2,3) è uguale a 3, il valore TI dell'insieme complementare (0,1,2,3,4,5,6,7) sarà uguale a 7, perché 7+3 = 10.

Es. 1.53



Tutti i valori di TI di un insieme sono posti lungo l'asse di una scala esatonale, disponendosi a coppie per valori inversi, secondo questo schema:

cardinalità	2	TxI T—xI
“	3	TxI T—xI I
“	4	TxI T—xI TyI T—yI
“	5	TxI T—xI TyI T—yI I
“	6	TxI T—xI TyI T—yI TzI T—zI
“	7	TxI T—xI TyI T—yI TzI T—zI TI
“	8	TxI T—xI TyI T—yI TzI T—zI TxI T—xI

Nel caso di un insieme di 8 note (0,1,2,3,4,5,6,7) complementare di (0,1,2,3) avremo i seguenti 8 valori, che sommati ai 4 valori relativi a (0,1,2,3), formeranno un totale di 12 valori, tutti posti lungo l'asse di due scale esatonali:

Esempio:

T7I (0,1,2,3,4,5,6,7)	→	T7 (0,11,10,9,8,7,6,5)	→	(7,6,5,4,3,2,1,0)
T5I (1,2,3,4,5,6,7,0)	→	T5 (1,0,11,10,9,8,7,2)	→	(6,5,4,3,2,1,0,7)
T3I (2,3,4,5,6,7,0,1)	→	T3 (2,1,0,11,10,9,4,3)	→	(5,4,3,2,1,0,7,6)
T1I (3,4,5,6,7,0,1,2)	→	T1 (3,2,1,0,11,6,5,4)	→	(4,3,2,1,0,7,6,5)
T11I (4,5,6,7,0,1,2,3)	→	T11(4,3,2,1,8,7,6,5)	→	(3,2,1,0,7,6,5,4)
T9I (5,6,7,0,1,2,3,4)	→	T9 (5,4,3,10,9,8,7,6)	→	(2,1,0,7,6,5,4,3)
T7I (6,7,0,1,2,3,4,5)	→	T7 (6,5,0,11,10,9,8,7)	→	(1,0,7,6,5,4,3,2)
T5I (7,0,1,2,3,4,5,6)	→	T5 (7,2,1,0,11,10,9,8)	→	(0,7,6,5,4,3,2,1)

↑
asse posto lungo una scala esatonale

A scopo esemplificativo riportiamo i valori di TI, attraverso cui tutti i 15 possibili insiemi di 4 note simmetrici per inversione riproducono loro stessi (qui indicati con la notazione proposta da Forte (cfr. paragrafo V.1):

4-1	(0,1,2,3)	T3I T1I T11I T9I
4-6	(0,1,2,7)	T2I I T10I I
4-3	(0,1,3,4)	T4I T2I T10I T8I
4-10	(0,2,3,5)	T5I T1I T11I T7I
4-7	(0,1,4,5)	T5I T3I T9I T7I
4-17	(0,3,4,7)	T1I T7I T5I T11I
4-8	(0,1,5,6)	T6I T4I T8I T6I
4-20	(0,1,5,8)	T1I T3I T9I T11I
4-9	(0,1,6,7)	T1I T7I T5I T11I
4-21	(0,2,4,6)	T6I T2I T10I T6I
4-24	(0,2,4,8)	T4I I T8I I
4-23	(0,2,5,7)	T7I T3I T9I T5I
4-26	(0,3,5,8)	T2I T4I T8I T10I
4-25	(0,2,6,8)	T2I I T10I I
4-28	(0,3,6,9)	I T3I T6I T9I

I.22. Tensione interna

Ogni combinazione presenta un maggiore o minore grado di tensione interna in funzione degli intervalli che la compongono. La tensione dipende dal rapporto fra totale cromatico e costituzione intervallare; essa indica la maggiore o minore regolarità nella distribuzione degli intervalli (*equilibrio*) e non ha nulla a che vedere con il concetto di 'dissonanza' o 'consonanza'.
Esistono 12 qualità di tensione, quanti sono i gruppi cardinali. All'interno di ogni gruppo, la tensione diminuisce quanto più le classi di altezze sono disposte in maniera equilibrata, ossia quanto più gli intervalli che le separano tendono a essere uguali. La combinazione (do,do#,re / 1-1-10), ad esempio, è più tesa di (do,mi,sol# / 4-4-4). Due combinazioni correlate per inversione (reciprocamente inverse) hanno la stessa tensione interna (do,mib,sol / 3-4-5 = a do,fa,la / 5-4-3) e, cosa particolarmente importante, i loro *indici numerici di note comuni* sono uguali.
Riprendiamo ancora una volta lo specchietto che pone in relazione gli insiemi equivalenti per trasposizione e quelli equivalenti per inversione (cfr. pag. 63):

c	**eT**	**sI**	**cI**				**eI**
6	80	—20	=60	:2	= 30	+20	=50
5-7	66	—10	=56	:2	= 28	+10	=38
4-8	43	—15	=28	:2	= 14	+15	=29
3-9	19	—5	=14	:2	= 7	+5	=12
2-10	6	—1	=5	:1	= 5	+1	=6
1-11	1	—1	=0	:1	= 1	+1	=1
0-12	1	—1	=0	:1	= 0	+1	=1

Poiché due insiemi correlati per inversione hanno la stessa tensione interna, allora esistono, per ogni gruppo cardinale, tanti gradi di tensione quanti sono gli insiemi simmetrici per inversione (successione intervallare non-retrogradabile), sommati alla metà di quelli correlati per inversione (successione intervallare retrogradabile). In definitiva per ogni gruppo cardinale esistono tanti gradi di tensione quanti sono gli insiemi equivalenti per inversione:

eI = sI+(cI:2)

Esistono in tutto 224 gradi di tensione interna, di cui 86 propri di insiemi simmetrici per inversione e 168 (84x2) propri di coppie di insiemi reciprocamente inversi (correlati per inversione); nel caso del gruppo cardinale 6, i gradi di tensione interna saranno 20 + (60:2) = 50. I gradi di tensione interna possono essere individuati all'interno di ogni gruppo in base alla disposizione degli elementi: più una combinazione è equilibrata, minore sarà la sua tensione interna.
La musica tonale è organizzata in modo che le combinazioni più frequenti siano quelle con maggiore equilibrio: le combinazioni di tre suoni più equilibrate corrispondono infatti alle triadi 'diminuita', 'minore', 'maggiore' a 'aumentata'. Le combinazioni di quattro suoni più equilibrate corrispondono alla settima di 3ª specie, alla settima di 2ª specie, alla 6ª aumentata, alla 7ª di dominante e, per finire, alla 7ª diminuita. La combi-

nazione più equilibrata di cinque suoni corrisponde alla scala pentatonica, quella di sei suoni corrisponde alla scala esatonale, quella di sette suoni corrisponde alla scala maggiore.
In pratica le scale e gli accordi più usati nell'armonia tonale sono 'grosso modo' quelli caratterizzati da una più equilibrata disposizione degli elementi all'interno dell'ottava. A questo proposito si potrebbero fare alcuni curiosi esperimenti: trascrivere, ad esempio, una sonatina di Muzio Clementi sulla scala do-do#-re-re#-mi-fa-fa#, cioè una su combinazione di suoni il più lontana possibile dalla scala maggiore.

I.23. Combinazioni correlate per inversione

Esistono insiemi che, se inversi, rimangono equivalenti a loro stessi, ed altri che formano con il proprio inverso una coppia reciprocamente inversa. Partendo dalla considerazione che gli *indici numerici di note comuni* di una coppia di insiemi correlati per inversione sono uguali, è possibile giungere a definire le coppie di *insiemi correlati per inversione* come diversi aspetti di un'unica forma. In questa prospettiva è possibile un'ulteriore riduzione nella lista degli insiemi fondamentali (cfr. paragrafo I.14 'Combinazioni equivalenti per trasposizione'), riduzione ottenibile attraverso l'individuazione delle classi di equivalenza date dall'insieme delle trasposizioni e delle inversioni di ogni combinazione.
I numerosi studiosi che si sono occupati di questo problema hanno espresso opinioni contrastanti circa l'opportunità di considerare equivalenti tutte le coppie di combinazioni correlate per inversione: infatti, sebbene in questo modo si introduca una semplificazione nel processo di classificazione, tuttavia possono verificarsi alcuni equivoci; secondo tale sistema di classificazione ad esempio, gli accordi maggiore e minore sono considerati come due aspetti di un'unica forma.
La seguente tavola, proposta da Allen Forte, omette, oltre le trasposizioni, anche un membro di ogni coppia di combinazioni correlate per inversione (insiemi), in quanto considerato equivalente all'altro membro.

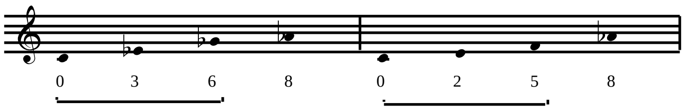
1 insieme di	0 elementi	→	1 insieme di	12 elementi
1 "	1 elemento	→	1 "	11 "
6 insiemi di	2 elementi	→	6 insiemi di	10 "
12 "	3 "	→	12 "	9 "
29 "	4 "	→	29 "	8 "
38 "	5 "	→	38 "	7 "
50 "	6 "			

Totale 224

In questo sistema di classificazione, ogni insieme di combinazioni equivalenti per trasposizione e/o inversione, deve essere indicato attraverso una sola forma rappresentativa.

Se l'insieme è simmetrico per inversione, la forma primaria è identica alla forma primaria inversa, e non si pone alcun problema; se invece l'insieme sta a rappresentare due combinazioni correlate per inversione, occorre trovare la forma 'più rappresentativa' fra le due possibili.

Esempio:
La combinazione (0,3,6,8), corrispondente alla settima di dominante del sistema tonale, e la combinazione (0,2,5,8), corrispondente alla settima di sensibile, sono equivalenti per inversione. Fra le due forme rappresentative, la seconda è la più rappresentativa poiché, se l'intervallo esterno è uguale per entrambe (8), l'intervallo fra il primo e il penultimo elemento è inferiore nella seconda forma (5). La forma rappresentativa di entrambe sarà perciò (0,2,5,8).
Es. 1.54



Analogamente, tutte le possibili triadi maggiori e minori possono essere rappresentate dalla forma (0,3,7) corrispondente alla triade minore, poiché la forma (0,4,7), corrispondente alla triade maggiore, è meno rappresentativa.

I.24. Consonanza e dissonanza

Il problema della dissonanza è stato sempre al centro di numerose dispute teoriche. Il concetto di tensione è stato introdotto da Hindemith nel suo *Harmonielehre*,[28] in base ad una classificazione empirica che divideva gli intervalli in consonanze, dissonanze dolci e dissonanze aspre. Solo considerando il fatto che nessuno, prima di Hindemith, si era occupato seriamente del problema della classificazione delle tensioni intervallari, si può comprendere come una classificazione così grossolana e priva di qualsiasi fondamento abbia potuto suscitare tanto interesse; in questa prospettiva, lo studio di Hindemith assume un certo valore per il suo carattere pionieristico.
Nei suoi *Studies in Counterpoint*,[29] Ernst Krenek ipotizza come presupposto per la valutazione degli intervalli una gerarchia di *gradi di tensione,* in base alla quale gli intervalli sono classificati come consonanze e dissonanze 'dolci' o 'aspre'. Krenek sostiene che il fenomeno acustico può dare ragione dei gradi relativi di tensione ma la "decisione di cosa sia da considerarsi una dissonanza e come essa debba essere trattata è un assunto arbitrario inerente un particolare stile, dipendendo esclusivamente da concetti estetici". Questi concetti estetici, sulla base dei quali gli intervalli vengono presumibilmente valutati, non sono fissati in nessun modo.

La dicotomia consonante-dissonante, come Sessions puntualizza nella sua *Harmonic Practice*, è un concetto inadeguato in relazione a procedimenti tonali avanzati e, in ogni caso, “la tensione dissonante riguarda non solo gli intervalli, ma il contesto”.[30] Milton Babbitt, in *Set Structure as a Compositional Determinant*,[31] si spinge ancora oltre, ponendo in discussione la presenza di vari gradi di tensione, in quanto “non esiste un criterio per valutare la stabilità di un intervallo”.
Babbit asserisce che la classificazione degli intervalli, proposta da Krenek, presuppone la triade come criterio di valutazione: “nella misura in cui la triade non ha una funzione autonoma nel sistema dodecafonico, non esiste nessuna ragione per dedurre principi generali da essa”. Se accettiamo la teoria di Babbitt, le tensioni armoniche presenti in un contesto dodecafonico vengono percepite come dissonanti unicamente se messe in relazione con strutture compositive di tipo tonale triadico. In ogni caso, non sembra che i gradi di tensione operino come principio necessario di una struttura armonica atonale; anche supponendo che l’organizzazione armonica di una composizione dodecafonica dipenda da qualche principio coerente, indipendente o semi-indipendente dall’ordine degli elementi nella serie, e che tale serie sia espressamente concepita e manipolata per sostenere particolari combinazioni verticali, ciò indicherebbe che tali principi non debbano necessariamente essere considerati come assunti assiomatici del sistema dodecafonico.
Secondo Babbitt l’intero concetto di consonanza e dissonanza nella musica atonale deriva dall’assunto della struttura triadica come criterio di stabilità intervallare; secondo Krenek, invece, la distinzione fra consonanza e dissonanza si basa su fenomeni di tipo acustico, analoghi per la musica dodecafonica come per altra musica. Contrariamente a Krenek, che valuta gli intervalli in termini di grado di tensione assoluta, Babbitt sostiene che è possibile individuare un criterio in funzione della struttura di ogni sistema compositivo utilizzato.

Riassumendo le varie argomentazioni si può giungere a queste considerazioni conclusive: dissonanza e consonanza sono semplicemente sensazioni soggettive derivabili dal paragone fra più combinazioni successive in un determinato contesto. È impossibile definire il loro confine preciso. Esse non dipendono che in minima parte dalla costituzione intervallare di una combinazione; all’interno dello spazio temperato, la percezione di una stessa combinazione cambia radicalmente con l’aumentare della estensione e delle possibilità di disposizione. Dissonanza e consonanza sono in rapporto con il numero dei possibili raddoppi, con il registro, con il timbro e numerose altre variabili, difficilmente quantificabili. La percezione di una maggiore o minore dissonanza deriva da un’abitudine culturale e, in particolare, dal contesto generale di una composizione musicale. Il tritono, ad esempio, elemento instabile e dissonante per eccellenza nella musica tonale, può diventare, se inserito in un contesto diverso, elemento di massima stabilità. Non esistono criteri per stabilire il confine fra consonanza e dissonanza e perciò ogni tentativo di voler raggruppare intervalli e combinazioni su queste basi è impossibile.

I.25. Funzione e contenuto intervallare

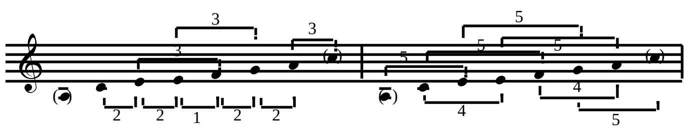
Si definisce *funzione intervallare* fra due combinazioni l'insieme degli intervalli che intercorrono fra ogni nota della prima combinazione e ogni nota della seconda. Questo insieme definisce il totale delle 'relazioni contrappuntali' fra due combinazioni, totale che si ottiene moltiplicando il loro numero cardinale: le relazioni fra due combinazioni di sei note, ad esempio, sono 6x6 = 36, mentre le relazioni fra una combinazione di cinque note e una di otto note sono 5x8 = 40, ecc.
Nel 1960, Lewin[32] definì il *contenuto intervallare* (in inglese *interval content* abbreviato in ic) come un caso particolare di funzione intervallare, dato dall'insieme degli intervalli che intercorrono fra una combinazione di note e se stessa. Il *contenuto intervallare* di una combinazione si ottiene perciò individuando tutte le *relazioni contrappuntali*, in modo da calcolare tutte le *molteplicità* degli intervalli.
La *molteplicità* di un intervallo in una combinazione è uguale al numero delle differenti paia di elementi che lo costituiscono. Poiché un intervallo può anche definirsi come un insieme a cardinalità 2 (un intervallo è un bicordo), il *contenuto intervallare* di un insieme non è altro che il numero dei suoi sottoinsiemi a cardinalità 2. Il numero totale delle possibili molteplicità m di una combinazione a cardinalità n è uguale al totale di tutte le paia di altezze, cioè m(x,y) = n!/m!(n-m)!
Il numero delle possibili molteplicità aumenta con l'aumentare del numero cardinale n, secondo la seguente tabella (cfr. pag. 40):

n		**m**
0	→	0
1	→	1
2	→	4
3	→	9
4	→	16
5	→	25
6	→	36
7	→	49
8	→	64
9	→	81
10	→	100
11	→	121
12	→	144

Il contenuto intervallare di un insieme si rappresenta attraverso una successione di 12 numeri interi, ognuno dei quali indica i valori delle molteplicità per gli intervalli da 0 a 11. Il primo numero della successione sta ad indicare il numero di unisoni, uguale al numero cardinale dell'insieme preso in esame.
Per l'insieme (0,2,4,5,7,9) la molteplicità dei vari intervalli sarà la seguente:

i	**m**	
0	6	(0)(2)(4)(5)(7)(9)
1	1	(4,5)
2	4	(0,2)(2,4)(5,7)(7,9)
3	3	(2,5)(4,7)(9,0)
4	2	(0,4)(5,9)
5	5	(0,5)(2,7)(4,9)(7,0)(9,2)
6	0	
7	5	(5,0)(7,2)(9,4)(O,7)(2,9)
8	2	(4,0)(9,5)
9	3	(5,2)(7,4)(0,9)
10	4	(2,0)(4,2)(7,5)(9,7)
11	1	(5,4)

Es. 1.55



La tabella precedente può essere abbreviata nel modo seguente:

0(6),1(1),2(4),3(3),4(2),5(5)6(0),7(5),8(2),9(3),10(4),11(1)

oppure, ancora più brevemente, con la successione di 12 numeri: 614325052341.

Così per il bicordo do-mi (0,4), il contenuto intervallare sarà uguale a 200010001000, per la triade maggiore (0,4,7) sarà uguale a 301110001110, ecc.

Una proprietà fondamentale del contenuto intervallare è definita dal *teorema delle note comuni*, che stabilisce che il numero di elementi in comune fra una combinazione e le sue trasposizioni è uguale alla *molteplicità* dei suoi intervalli. Ciò significa che il *contenuto intervallare* di un insieme è uguale al *vettore numerico di note comuni* cfr. paragrafo I.12); di conseguenza, come per il vettore di note comuni, una combinazione mantiene lo stesso contenuto intervallare se sottoposta a inversione e/o a trasposizione.[33]
Un'altra proprietà è la seguente: se sommiamo i valori delle entrate del contenuto intervallare di un esacordo simmetrico per inversione con i valori delle entrate delle sue differenti rotazioni (o permutazioni), otterremo una successione posta o su tutti numeri pari o su tutti numeri dispari (in pratica sui gradi di una scala esatonale). Tale successione, sommata al proprio retrogrado darà, come risultato, una nuova sequenza non retrogradabile posta su tutti numeri pari. Nel caso di r = 6, tutte le entrate del contenuto intervallare sommate a quelle della propria permutazione, saranno uguali a

6; la sequenza derivata, sommata al proprio inverso, sarà uguale a 0, poiché 6+6 = 0 mod.12. Questa proprietà non appare nelle coppie di insiemi correlati per inversione.
Nel caso dell'esacordo preso in esame in precedenza (0,2,4,5,7,9) si avrà:

r = 0	6	1	4	3	2	5	0	5	2	3	4	1	+	
r = 1	1	6	1	4	3	2	5	0	5	2	3	4	=	
	7	7	5	7	5	7	5	5	7	5	7	5	+	→tutti n. dispari
	5	7	5	7	5	5	7	5	7	5	7	7	=	
	0	2	10	2	10	0	0	10	2	10	2	0		→tutti n. pari

r = 0	6	1	4	3	2	5	0	5	2	3	4	1	+	
r = 2	4	1	6	1	4	3	2	5	0	5	2	3	=	
	10	2	10	4	6	8	2	10	2	8	6	4	+	→tutti n. pari
	4	6	8	2	10	2	8	6	4	10	2	10	=	
	2	8	6	6	4	10	10	4	6	6	8	2		→tutti n. pari

Continuando nella permutazione si arriverà a:

r = 0	6	1	4	3	2	5	0	5	2	3	4	1	+
r = 6	0	5	2	3	4	1	6	1	4	3	2	5	=
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	+
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	=
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

I.26. Vettore intervallare

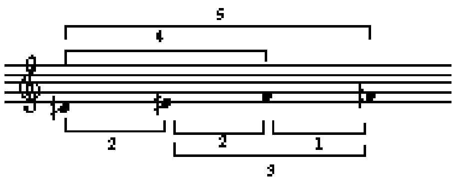
Il contenuto intervallare è costituito da una successione di 12 numeri (cfr. pag. 74); in realtà è possibile ridurre i 12 numeri a 6, ottenendo il cosiddetto *vettore intervallare* (in inglese *interval vector*, abbreviato in *iv*), termine già adottato da Hanson negli anni ’50 e poi ripreso da Lewin (1959), Martino (1961) e Forte (1964).[34] Il vettore intervallare è una forma abbreviata del contenuto intervallare; per ottenerlo occorre procedere a tre operazioni di semplificazione:
— Soppressione della prima cifra del contenuto intervallare, corrispondente al numero cardinale dell’insieme, in quanto non contenente nessuna informazione significativa.
— Omissione della seconda metà del contenuto intervallare in quanto equivalente al retrogrado della prima metà.
— Divisione per due del valore corrispondente alla entrata 6. Poiché il tritono è complementare di se stesso ed ha solo 6 possibili trasposizioni, il numero dei distinti sottoinsiemi 6 contenuti nel vettore intervallare deve essere sempre la metà del loro numero reale.
In base a queste considerazioni, un contenuto intervallare come 511411411411 può essere abbreviato nel vettore 114112, una ‘sestina’ (in inglese *6tuple*) che indica la molteplicità delle classi di intervalli da 1 a 6.
Ogni cifra (entrata) del vettore intervallare rappresenta una classe di intervalli: la prima cifra indica la frequenza della classe di intervalli 1, la seconda la frequenza della classe di intervalli 2, la terza della classe di intervalli 3, e così via. Il numero delle molteplicità di un vettore intervallare, rispetto a quello del contenuto intervallare, è uguale a (m—n)/2, ove n è il numero cardinale dell’insieme:

n		**m**
0	→	0
1	→	0
2	→	1
3	→	3
4	→	6
5	→	10
6	→	15
7	→	21
8	→	28
9	→	36
10	→	45
11	→	55
12	→	66

Per un insieme di 4 note (1,3,5,6) le sei possibili *molteplicità* (relazioni intervallari) sono le seguenti:

1-3		2				
1-5				4		
1-6					5	
3-5		2				
3-6			3			
5-6	1					
	1	2	1	1	1	0

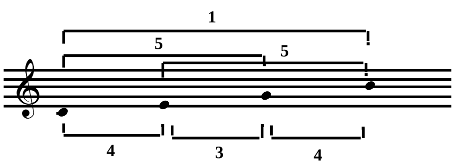
Es. 1.56



Per un insieme di 4 note (0,4,7,11) le sei molteplicità sono le seguenti:

0-4				4		
0-7					5	
0-11	1					
4-7			3			
4-11					5	
7-11				4		
	1	0	1	2	2	0

Es. 1.57



I.27. Proprietà dei vettori intervallari

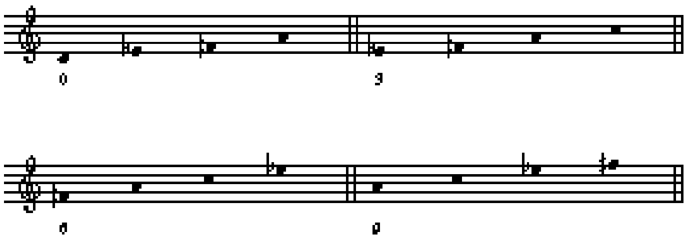
Il vettore intervallare è un mezzo estremamente pratico ed efficace per analizzare la costituzione interna di una combinazione, permettendo di individuarne alcune importanti proprietà.

— Se nel vettore intervallare di un insieme compare almeno una entrata il cui valore sia equivalente al numero cardinale (ricordiamo che la entrata 6 deve essere moltiplicata per 2), allora l'insieme è a trasposizione limitata: ciò significa che vi è almeno un livello di trasposizione sul quale si riproducono le stesse classi di altezze dell'insieme originale. La posizione dell'entrata il cui valore corrisponde al numero cardinale sta ad indicare il coefficiente di trasponibilità.

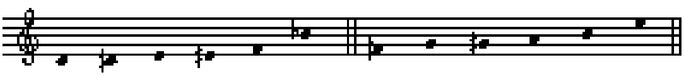
Esempio:

(0,4,8) ha come vettore 000300; il valore 3 sull'entrata 4 indica che al livello di trasposizione 4 si hanno 3 suoni in comune con l'originale; poiché l'originale contiene solo 3 note, l'insieme è a trasposizione limitata e si riproduce ai livelli 0-4-8, con coefficiente di trasponibilità 4.

(0,3,6,9) ha come vettore 004002. Esistono 2 valori equivalenti al numero cardinale, sulle entrate 3 e 6 (il valore della entrata 6 va moltiplicato per due): l'insieme è trasposizione limitata e si riproduce ai livelli 0-3-6-9, con coefficiente di trasponibilità 3.
Es. 1.58



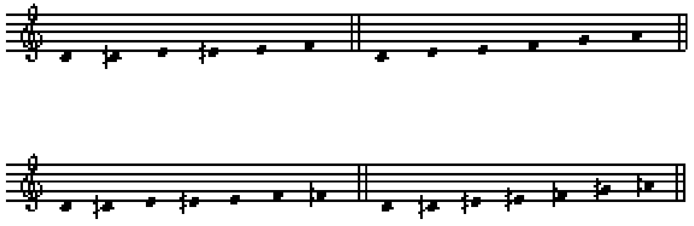
— Se alcune entrate del vettore intervallare di un insieme di sei note sono uguali a 0, vuol dire che l'insieme è *reversibile* (cioè complementare di se stesso a un certo livello di trasposizione). L'insieme (0,1,2,3,5,10) ha come vettore 343230. L'entrata 6 è uguale a 0, perciò l'insieme è complementare di se stesso a T6.
Es. 1.59



— I vettori a ‘entrata unica’ hanno la proprietà di avere valori diversi per ogni entrata: ogni intervallo appare almeno una volta e con un valore diverso da tutti gli altri. Esistono solo quattro vettori di questo tipo, per gli insiemi:

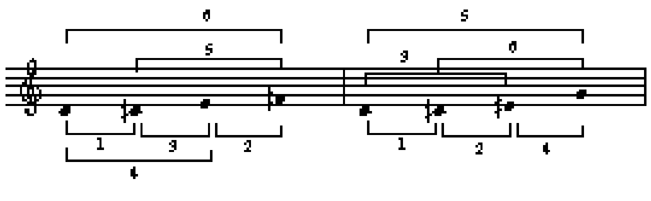
(0,1,2,3,4,5) vettore 543210
(0,2,4,5,7,9) vettore 143250
(0,1,2,3,4,5,6) vettore 654321
(0,1,3,5,6,8,10) vettore 254361

Es. 1.60



Questi insiemi hanno anche la proprietà di contenere, all’interno dei gruppi cardinali 6 e 7, il massimo valore possibile per certe classi di intervalli. Il primo e il terzo hanno il valore massimo per le classi di intervalli 1, mentre il secondo e il quarto hanno il valore massimo per le classi di intervalli 5. Ciò non sorprende, se si considera che gli uni sono costituiti da frammenti di scala cromatica, mentre gli altri sono costituiti da materiale diatonico. In virtù dell’equivalenza fra contenuto intervallare e indice di note comuni, un insieme il cui vettore abbia un valore diverso per ogni classe di intervalli (entrata unica) ha sempre un numero diverso di note in comune con le sue trasposizioni.

— Esiste un solo vettore con tutte le entrate uguali: si tratta del vettore 111111, corrispondente a due insiemi di 4 suoni denominati, proprio per questo motivo, ‘tetracordi di tutti gli intervalli’: (0,1,4,6) e (0,1,3,7).
Es. 1.61



Esistono quattro vettori con cinque entrate uguali, 222220 per l’insieme (0,2,3,4,7) e il suo inverso, e 225222, per l’insieme (0,1,3,4,6,9) e il suo inverso. Esistono poi numerosi casi di vettori con quattro entrate uguali, come ad esempio 122212 (0,1,3,7,9) oppure 222121 (0,1,3,5,6). Esistono coppie di vettori nei quali due entrate diverse possono essere scambiate fra loro, come in 221100 (0,1,2,4) e in 212100 (0,1,3,4). Esistono infine vettori fra i quali non vi è nessuna corrispondenza fra le entrate, come in 221100 (0,1,2,4) e in 112011 (0,1,3,6)

— Ogni paio di insiemi di uguale cardinalità, che non siano identici nel loro contenuto intervallare, possono essere confrontati per determinare il loro maggiore o minore grado di somiglianza. Il grado di somiglianza nella distribuzione intervallare di due vettori può essere calcolato attraverso l'*indice di similarità* (s), facendo la differenza fra le entrate corrispondenti dei due vettori e sommando queste differenze.

Esempio:
321000—
221100 =
———
100100 **s** = 1+0+0+1+0+0 = 2

L'indice s è particolarmente significativo, in quanto evidenzia con immediatezza la somiglianza strutturale fra due combinazioni a uguale cardinalità. Più grande è il grado di 'somiglianza distribuzionale', più piccolo sarà il valore di s. Per due vettori intervallari identici, s sarà uguale a 0. Per due insiemi simili di 4 note, l'indice s si aggira attorno a 2, mentre per due insiemi molto diversi, come 0,3,6,9 (settima diminuita) e 0,2,4,6 (toni interi), l'indice è uguale a 10:

(0,3,6,9) 004001
(0,2,4,6) 030202
———
034201 s =3+4+2+1 = 10

Per gli insiemi di 4 suoni i limiti dell'indice s sono 2 e 10; per tutti gli insiemi il massimo di similarità è s = 2, mentre il minimo va da s = 6, per insiemi a cardinalità 3 e 9, a s = 20, per insiemi a cardinalità 6. Non c'è relazione fra l'indice di similarità di due insiemi e le note di cui essi sono effettivamente costituiti. Ad esempio l'accordo di 7ª diminuita (0,3,6,9) e l'accordo di 7ª di sensibile (0,3,6,10) differiscono di una sola nota; tuttavia i loro vettori intervallari sono piuttosto diversi: 004002 e 012111, con indice di similarità uguale a 6. Stessa cosa per gli insiemi (0,1,3,5,7,8) e (0,1,3,5,7,9), la cui apparente somiglianza è contraddetta da vettori intervallari molto diversi: 232341 e 142422, con indice s uguale a 6.

— Il 'numero di intervalli comuni' fra due insiemi si calcola sommando i valori più bassi per ogni coppia di entrate. Nel caso precedente avremo:

232341
142422

per cui il numero di intervalli comuni sarà 1+3+2+3+2+1 = 12. Fra il totale degli intervalli di un insieme, l'indice di similarità e il numero di intervalli comuni esiste una

relazione particolare. Più gli accordi sono simili, più l'indice s si avvicina a 0 mentre il numero massimo di intervalli comuni si avvicina al totale degli intervalli. Il numero degli intervalli comuni e il numero degli intervalli comuni sommato all'indice di similarità sono speculari rispetto al totale degli intervalli.
Nel caso degli insiemi precedenti, dei vettori 232341 e 142422, il numero degli intervalli comuni è uguale a 12 e l'indice s è uguale a 6; 12 e 18 (12+6) sono numeri speculari rispetto a 15 (numero del totale degli intervalli dei vettori). Ognuno dei due numeri può essere perciò dedotto dall'altro:

$12 \leftarrow 15 \rightarrow 18.$

— È possibile raggruppare gli insiemi in base al valore delle singole entrate dei loro vettori intervallari. Fra gli insiemi a cardinalità 4, ad esempio, ve ne sono tre il cui vettore intervallare indica il valore massimo di 2, in corrispondenza dell'entrata 6: si tratta dei tetracordi a trasposizione limitata (0,1,6,7) con vettore 200022, (0,2,6,8) con vettore 020202, e (0,3,6,9) con vettore 004002. Fra gli insiemi a cardinalità 6 invece, tre indicano il valore massimo di 3, in corrispondenza dell'entrata 6: (0,1,2,6,7,8) con vettore 420243, (0,1,3,6,7,9) con vettore 224223, (0,2,4,6,8,10) con vettore 060603.

I.28. Contenuto intervallare di insiemi complementari

La relazione fra il contenuto intervallare di un insieme e quello del suo complementare fu già trattata da Hanson[35] negli anni '50. Nel 1960, Lewin[36] espresse così questa relazione: Se A è una combinazione composta di n elementi, con contenuto intervallare a(i) e B è il suo complementare, con contenuto intervallare b(i), allora a e b sono correlati dalla formula:

$b(i) = [12 - 2n] + a(i)$ per ogni i

Esempio:
Fra due insiemi A (0,1,2,3,4) e B (0,1,2,3,4,5,6), con vettore intervallare 432100 e 654321, se a(1) = 4 allora b(1) = [12—(2x5)]+4 = 6.

La differenza aritmetica fra le entrate corrispondenti di vettori intervallari di due insiemi complementari è uguale alla differenza dei numeri cardinali dei due insiemi, con l'eccezione dell'entrata della classe di intervalli 6, nel qual caso la differenza deve essere divisa per 2 (poiché la classe di intervalli 6 è inversa di se stessa). Se un intervallo ricorre m volte in un insieme a cardinalità n, esso apparirà m—2n nel suo complementare. In altre parole, la molteplicità di un intervallo mb di un insieme B di n elementi, complementare di A rispetto a S (A = S—B) è uguale alla molteplicità dell'intervallo ms di S meno 2n di A, più la molteplicità dell'intervallo ma.

Questa formula non è altro che una generalizzazione del cosiddetto *teorema esacordale*, il quale stabilisce che il contenuto intervallare di un esacordo deve essere uguale a quello del suo complementare:

Se mb = [12—(2n)] +ma,
allora, per n = 6 e 2n = 0 (mod.12):
mb = [12—(2x6)] +ma, cioè mb = ma.

La formulazione del teorema esacordale è un caso particolare del teorema più generale che stabilisce la relazione fra il contenuto intervallare di due insiemi complementari.

Esempi:
Se il vettore intervallare ma dell'insieme (0,1,4,6) è 111111, allora il valore mb(1) del vettore dell'insieme complementare sarà:

mb(1) = [12—(2x4)] +1 = 5

Se il vettore intervallare ma dell'insieme (0,1,2,3) è 321000, allora il valore mb(1) del vettore dell'insieme complementare sarà:

mb(1) = [12—(4x2)] +3 = (12—8) +3 = 4+3 = 7

Come esempio, si osservino i vettori intervallari di insiemi complementari tratti da tutti i gruppi cardinali:

Insiemi	Vettori intervallari					
(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)	12	12	12	12	12	6
	0	0	0	0	0	0
(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)	11	11	11	11	11	5
(0)	0	0	0	0	0	0
(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)	9	8	8	8	8	4
(0,1)	1	0	0	0	0	0
(0,1,2,3,4,5,6,7,8)	8	7	6	6	6	3
(0,1,2)	2	1	0	0	0	0
(0,1,2,3,4,5,6,7)	7	6	5	4	4	3
(0,1,2,3)	3	2	1	0	0	0
(0,1,2,3,4,5,6)	6	5	4	3	2	1
(0,1,2,3,4)	4	3	2	1	0	0
(0,1,2,3,4,5)	5	4	3	2	1	0
(0,1,2,3,4,5)	5	4	3	2	1	0

Due combinazioni *correlate per complementarità* o *relative* sono caratterizzate da una affinità che è molto più evidente se si tratta di combinazioni a cardinalità 6: in questo caso, infatti, esse avranno un uguale contenuto intervallare e un uguale vettore numerico di note comune, senza essere necessariamente correlate per inversione. Le combinazioni di sei suoni, complementari di loro stesse, sono dette *reversibili*; questa proprietà non è necessariamente in relazione con la simmetria per inversione (data da successioni intervallari non-retrogradabili) o con la trasponibilità limitata (data da successioni intervallari degenerate).
Considerando il fatto che due combinazioni complementari di 6 note hanno lo stesso contenuto intervallare, è possibile una ulteriore riduzione del numero totale degli insiemi, data dalla loro equivalenza per ‘trasposizione’, per ‘inversione’ e per ‘complementarità’. Ogni gruppo cardinale verrà così ad essere costituito da tanti insiemi quanto il numero totale già individuato in precedenza (cfr. paragrafo I.23, ‘Combinazioni correlate per inversione’), meno un membro di ogni coppia di insiemi di 6 note reciprocamente complementari (reversibili). Gli insiemi risulteranno così ridotti a 209.

1 insieme di	0 elementi	→	1 insieme di	12 elementi
1 ”	1 elemento	→	1 ”	11 ”
6 insiemi di	2 elementi	→	6 insiemi di	10 ”
12 ”	3 ”	→	12 ”	9 ”
29 ”	4 ”	→	29 ”	8 ”
38 ”	5 ”	→	38 ”	7 ”
35 ”	6 ”			

Da notare che Martino,[37] basandosi sulla relazione di complementarità, considera solo gli insiemi fino a 6 note, in quanto tutti gli altri possono esserne automaticamente dedotti. Egli ottiene così un totale ulteriormente ridotto a soli 122 insiemi.

NOTE AL I CAPITOLO

[1] I. VYŠNEGRADSKIJ, *Musique et Pansonorité*, in “La Revue Musicale” 12 (1927), pp. 143-52.

[2] C. SACHS, *The Rise of Music in the Ancient World,* New York (1943).

[3] J. ŠILLINGER, *Theory of Pitch Scales,* Libro II, in *The Schillinger System of Musical Composition*, New York (1941).

[4] F.J. FÉTIS, *Traité de l'harmonie, contenant la doctrine de la science et de l'art,* Paris (1844).

[5] R.A. RASCH, *Relations between Multiple Divisions of the Octave and the Traditional Tonal System*, in “Interface”, 14 (1985), pp. 75-108.

[6] A.G. MICHAJLENKO, *S. Taneev: un “Padre Martini” russo,* in “Diastema”, 4 (1993), p. 61.

[7] P. SCHAT, *The Tone Clock*, “Contemporary Music Studies”, vol. VII, Edinburgh (1993).

[8] M. BABBIT, *Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants,* in “The Musical Quarterly”, 46 (1960) p. 248; vedere anche G. WINHAM, *Composition with Arrays,* Princeton (1964).

[9] M. BABBIT, *Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants,* op. cit.; H. SIMBRIGER, *Einiges über Komplementare Harmonik*, in “Musik des Ostens”, 5 (1969), pp. 181-201.

[10] H. EIMERT, *Lehrbuch der Zwölftechnik*, Wiesbaden (1952), trad. it. di M. Donà, *Manuale di tecnica dodecafonica,* Milano (1954).

[11] G. REVESZ, *Einführung in die Musikpsychologie*, Bern (1954), trad. it. di B. Callieri, *Psicologia della musica,* Firenze (1976).

[12] R. WILLE, *Symmetrien in der Musik*, in “Neue Zeitschrift für Musik”, 143 (1982), pp. 12-19.

[13] H. SIMBRIGER, *Einiges über Komplementare Harmonik*, op. cit.

[14] J.M. HAUER, *Vom Wesen des Musikalischen*, Wien (1920).

[15] N. OBUCHOV, *Traité de l'harmonie tonale, atonale et totale*, Paris (1946).

[16] A. FORTE, *A Theory of Set-Complexes*, in “Journal of Music Theory”, 8 (1964), pp. 136-83.

[17] G. PERLE, *Serial Composition and Atonality,* Los Angeles (1962), cfr. W.L. HART, *College algebra*, New York (1938), cap. XX.

[18] R. GERHARD, *Reply to George Perle,* in “The Score”, 9 (1954), p. 59.

[19] B. ERNST, *Lo specchio magico di M.C. Escher,* Berlin (1990).

[20] M.C. ESCHER, *Regelmatige Vlakverdeling*, Utrecht (1958).

[21] O. MESSIAEN, *Technique de mon language musical,* Paris (1944).

[22] H. HANSON, *Harmonic Material of Modern Music*, New York (1960); D. LEWIN, *Intervallic Relations between two Collection of Notes,* in “Journal of Music Theory”, 3 (1959), pp. 298-301; D. MARTINO, *The Source Set and its Aggregate Formations,* in “Journal of Music Theory”, 5/2 (1961), pp. 225-73; G. PERLE, *Serial Composition and Atonality*, Los Angeles (1962); A. FORTE, *A Theory of Set-Complexes,* in “Music Theory”, 8 (1964), pp. 136-83; H. HOWE, *Some Combinational Properties of Pitch Structures,* in “Perspectives of New Music”, 4/1 (1965), pp. 45-61; J. RAHN,

Basic Atonal Theory, New York (1980); J. CHRISMAN, *Identification and Correlation of Pitch-sets*, in “Journal of Music Theory”, 15 (1971), pp. 58-83; H. STEGER, *Grundzüge der musikalischen Prinzipien Aleksander Skrjabins*, in “Neue Zeitschrift für Musik”, 1 (1972), Mainz, pp. 11-15; H. SIMBRIGER, *Einiges über Komplementare Harmonik*, in “Musik des Ostens”, 5 (1969), pp. 181-201; E. COSTÈRE, *Lois et styles des harmonies musicales*, Paris (1954).

[23] R. TEITELBAUM, *Intervallic Relations in Atonal Music*, in “Journal of Music Theory”, 9 (1965) pp. 73-127; A. FORTE, *A Theory of Set-Complexes*, op. cit.; J. RAHN, *Basic Atonal Theory*, New York (1980); D. MARTINO, *The Source Set and its Aggregate Formations*, Journal of Music Theory, 5/2 (1961), pp. 225-73; G. PERLE, *Serial Composition and Atonality*, Los Angeles (1962); H. SIMBRIGER, *Einiges über Komplementare Harmonik*, op. cit.; D. STARR, *Sets, Invariance and Partitions*, in “Journal of Music Theory”, 22 (1978), pp. 136-83; G. MAZZOLA, *Gruppen und Kategorien in der Musik, Entwurf einer mathematischen Musiktheorie*, Berlin (1985).

[24] M. BABBIT, *Twelve-Tone Rythmic Structure and the Electronic medium*, in “Perspectives of New Music”, 1/1 (1962), p. 57.

[25] D. GOJOWY, *Neue sowjetische Musik der XXer Jahre*, Regensburg (1980).

[26] D. STARR, *Sets, Invariance and Partitions*, in “Journal of Music Theory”, 22 (1978), op. cit.

[27] J.M. BARBOUR, *Synthetic Musical Scales*, in “The American Mathematical Monthly”, 36 (1929), pp. 155-60.

[28] C. HINDEMITH, *Unterweisung im Tonsatz*, Mainz (1937), trad. it., Milano (1955).

[29] E. KRENEK, *Studies in Counterpoint*, New York (1940).

[30] R. SESSION, *Harmonic practice*, New York (1951).

[31] M. BABBIT, *The Function of Set Structure in the Twelve-Tone System* (1946), inedito.

[32] D. LEWIN, *The intervallic Content of a Collection of Note*s, in “Journal of Music Theory”, 4 (1960), pp. 98-101.

[33] H. HANSON, *Harmonic Material of Modern Music*, op. cit.

[34] H. HANSON, *Harmonic Material of Modern Music*, op. cit.; D. LEWIN, *Intervallic Relations between two collection of Notes*, in “Journal of Music Theory”, 3 (1959), pp. 298 segg.; A. FORTE, *A Theory of Set-Complexes*, in “Music Theory”, 8 (1964), pp. 136-83; D. MARTINO, *The Source Set and its Aggregate Formations*, Journal of Music Theory, 5/2 (1961), pp. 225-73.

[35] D. LEWIN, *Forte’s Interval Vector, my Interval Function and Regener’s Common-Note Function*, in “Journal of Music Theory” (1977), pp. 194-237.

[36] D. LEWIN, *The Intervallic Content of a Collection of Notes*, op. cit.

[37] D. MARTINO, *The Source Set and its Aggregate Formations*, op. cit.