

[4.1] Comportamento a Regime [risposta permanente].

Il comportamento a regime è analizzabile se e solo se il sistema è asintoticamente stabile, cioè se per ogni diversa condizione iniziale x_0 risulta che il sistema si riporterà in uno stato di equilibrio x_e . L'asintotica stabilità si ha solo se coesistono due condizioni: **attrattività e convergenza**.

Un sistema non lineare è asintoticamente stabile se rispetta le relative condizioni dettate dalle regole di Lyapunov.

Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se la parte reale degli autovalori della matrice di stato A è negativa, per ogni autovalore della spettro della matrice A .

$$S : AS \Leftrightarrow RE[\lambda_i(A)] < 0, \forall \lambda_i(A) \in Spec(A)$$

Quindi un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile se e solo se ogni radice del denominatore di $G(s)$ ha parte reale negativa.

Risposta libera e risposta forzata.

L'uscita di un blocco per un determinato ingresso nel dominio del tempo può essere scomposta in risposta libera e risposta forzata, la prima dovuta al moto che ha il sistema quando l'ingresso è nullo e le condizioni iniziali sono diverse da zero (**la risposta libera dipende solo dallo stato**), la seconda che si ha quando l'ingresso è non nullo e le condizioni iniziali sono nulle (**la risposta forzata dipende solo dall'ingresso**). Per linearità la risposta generale è la somma, moltiplicata per determinate costanti, della risposta libera e della risposta forzata: $y(t) = y_l(t) + y_f(t)$.

Risposta transitoria e risposta permanente.

Altresì è possibile distinguere l'uscita di un blocco in risposta transitoria e risposta permanente. **La risposta transitoria è quella porzione della risposta che si annulla dopo un tempo finito** essa dipende in parte dal modo naturale del sistema e in parte dai modi del segnale di ingresso; **la risposta permanente è quella porzione della risposta che non si annulla mai** essa dipende esclusivamente dal segnale di ingresso. La risposta è sempre somma di risposta transitoria e risposta permanente: $y(t) = y_p(t) + y_T(t)$

Il comportamento a regime è analizzabile se e solo se per tempi lunghi ($t \rightarrow \infty$) il riferimento $R(t)$ è non nullo. Se fosse nullo il riferimento, la risposta del sistema coinciderebbe con la risposta libera che per la condizione di cui sopra riguardo l'asintotica stabilità deve convergere a 0.

Teorema: un sistema lineare stazionario avente f.d.t. razionale fratta avente in ingresso un segnale sinusoidale produce in uscita una sinusoide diversa dall'ingresso a meno di un fattore di scala e di una traslazione nel tempo.

Se $R(t) = X \sin(\omega t)$ allora $Y(t) = Y(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$

Definisco funzione di risposta armonica $F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = G(s) \Big|_{s=j\omega}$

La risposta armonica è la risposta del sistema ad un impulso in ingresso.

Se $R(t)$ è di tipo polinomiale, cioè $R(t) = \frac{t^k}{k!}$ la sua trasformata è $R(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$. Ricordando che

$$\text{per } t \rightarrow \infty \quad y(t) = y_p(t) + y_T(t) = y_p(t) = \sum R_i e^{p_i t} + \sum_{i=0}^K K_i \frac{t^i}{i!} = \sum_{i=0}^K K_i \frac{t^i}{i!}$$

$y_T(t) = 0$ per definizione in quanto il sistema è asintoticamente stabile.

$\sum R_i e^{p_i t} = 0$ per definizione poiché tutti i poli del sistema sono a parte reale negativa (qualora fossero state a parte reale positiva si sarebbe verificato che per $t \rightarrow \infty \quad \sum R_i e^{p_i t} = \infty$).

$$\text{Quindi } y_p(t) = C_0 \frac{t^k}{k!} + C_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + C_n \text{ con } C_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i [G(s)]}{ds^i} \right).$$

Diagrammi di Bode.

I diagrammi di Bode sono la rappresentazione della funzione di trasferimento in funzione della frequenza. Questi diagrammi danno una descrizione del comportamento di un blocco (che può essere un motore, un filtro, un amplificatore...) in funzione della frequenza. In genere, poiché l'andamento non è lineare, ma è un prodotto di funzioni, non è conveniente tracciare il grafico del rapporto tra polinomi nella sua forma esplicita, bensì conviene portarlo nella forma di una produttoria di binomi con radici reali e trinomi con radici complesse e coniugate e graficare il logaritmo di questo rapporto. Ciò è conveniente in quanto graficare il prodotto di funzioni è difficile mentre graficare il logaritmo di un prodotto, che per le regole dei logaritmi si traduce in una somma di logaritmi, è più semplice.

Nel caso più generale una funzione di trasferimento con poli e zeri semplici e complessi e poli nell'origine è del tipo:

$$G(s) = K \frac{\prod (s - z_j) \prod (s^2 + 2\delta_n \omega_n + \omega_n^2)}{s^\nu \prod (s - p_i) \prod (s^2 + 2\delta_k \omega_k + \omega_k^2)}$$

Manipolando questa equazione, ovvero portando $(-z_j), (-p_i), \left(\frac{1}{\omega_n^2}\right), \left(\frac{1}{\omega_k^2}\right)$ in evidenza si ottiene:

$$G(s) = K_1 \frac{\prod (1 + T_j s) \prod \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta_n \omega_n}{\omega_n^2} + 1 \right)}{s^\nu \prod (1 + T_i s) \prod \left(\frac{s^2}{\omega_k^2} + \frac{2\delta_k \omega_k}{\omega_k^2} + 1 \right)} \text{ con } K_1 = K \frac{z_j \omega_n^2}{p_i \omega_k^2}.$$

Il diagramma di Bode ha come variabile indipendente il logaritmo della pulsazione ω (si ricordi che pulsazione e frequenza sono legati dalla relazione $\omega = 2\pi f$) e come variabile dipendente il modulo

della funzione di trasferimento espressa in deciBel. Il valore della funzione $F(s)$ in dB è data dalla relazione $|F(s)|_{dB} = 20 \log[F(s)]$.

Casi particolari:

Radici complesse e coniugate (Hp: $\xi < 1$)

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_m^2} + \frac{2\xi s}{\omega_m} + 1 \right)}$$

dove ξ è il coefficiente di smorzamento e ω_m è la pulsazione naturale del sistema. Posto $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_m^2} + \frac{2j\xi\omega}{\omega_m} + 1 \right)} = \frac{1}{\left(\frac{2j\xi\omega}{\omega_m} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right) \right)}$$

Si passa al logaritmo della funzione di trasferimento che per quello che abbiamo detto prima è un'operazione volta a semplificare il tracciamento del diagramma.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \text{Log}_{10} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right)^2 \right)}} \right] = -10 \text{Log}_{10} \left[\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right)^2 \right]$$

dove si evince in modo semplice che **$G(j\omega)$ dipende sia da ξ che da ω_n** . Supponendo che ω_n sia nota, andiamo a vedere come si comporta la $G(j\omega)$ al variare di ξ nell'intervallo $[0,1]$.

Diagramma asintotico e reale del modulo.

Andiamo a vedere quando la pulsazione a cui si vuole misurare l'uscita del sistema sia molto più piccola della pulsazione naturale del sistema, ovvero $\omega \ll \omega_n$, il modulo della funzione di trasferimento è nullo perché per pulsazioni molto piccole la f.d.t. vale 1 e il logaritmo di 1 è 0, quindi: $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ che sul diagramma di Bode rappresenta un segmento di retta costante, ovvero con pendenza nulla sovrapposta alla ascissa.

Ora vediamo cosa succede quando la pulsazione a cui si vuole misurare l'uscita del sistema sia molto più grande della pulsazione naturale del sistema, ovvero $\omega \gg \omega_n$, il modulo della funzione di trasferimento è non nulla e vale $|G(j\omega)|_{dB} = -10 \text{Log}_{10} \left[\frac{\omega}{\omega_m} \right]^4 = -40 \text{Log}_{10} \left[\frac{\omega}{\omega_m} \right]$ che rappresenta

un segmento di retta con pendenza -40dB/dec, quindi con pendenza negativa.

Ragionando in modo asintotico queste condizioni appena citate si traducono in un grafico con l'andamento descritto in rosso qui sotto. Ovviamente un diagramma asintotico è buono solo per

sapere qualitativamente come vanno le cose, ma il diagramma reale, ovviamente si discosta significativamente da questo andamento. In funzione del coefficiente di smorzamento possiamo vedere l'andamento reale del modulo in funzione della pulsazione in blu. Infatti nel caso reale possiamo vedere che in $\omega = \omega_n$ il modulo $|G(j\omega)|_{dB} = -10 \text{Log}_{10} [2\xi]^2$. Si noti che per $\xi \rightarrow 0$ il diagramma dei moduli tende ad assumere un asintoto verticale in ω_n , infatti si può matematicamente verificare che $-10 \text{Log}_{10} 0 = -10 * -\infty = +\infty$. Un altro caso particolare da analizzare è $\xi \rightarrow 1$: in questo caso si trasforma in un sistema del secondo ordine con due poli semplici in $S = -\omega_n$. Difatti:

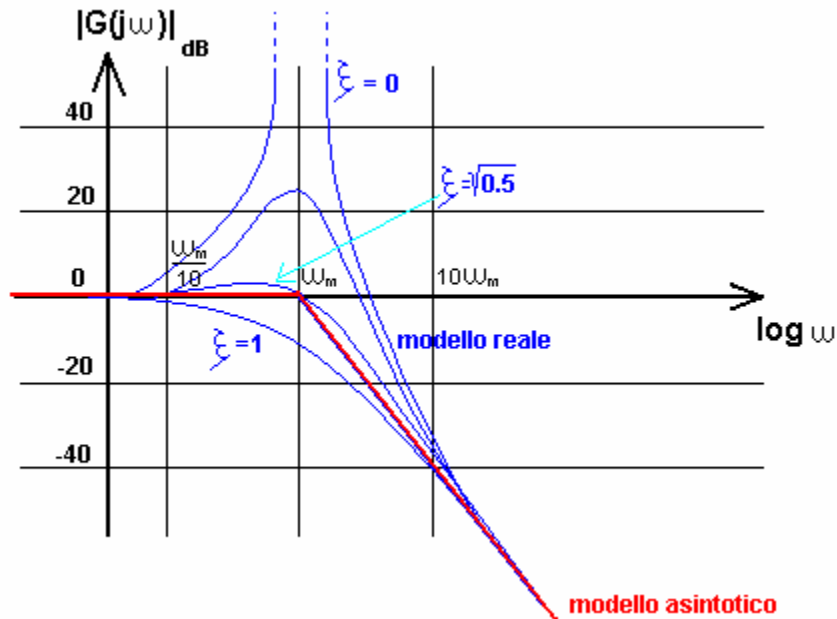
$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_m^2} + \frac{2\xi s}{\omega_m} + 1 \right)} \Bigg|_{\xi=1} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_m} + 1 \right)^2}.$$

La funzione inoltre ha un massimo (se esiste) in corrispondenza della frequenza massima descritta dalla relazione $\omega_{\max} = \omega_m \sqrt{1 - 2\xi^2}$: se $\sqrt{1 - 2\xi^2} \notin \mathcal{R} \Rightarrow |G(j\omega)|$ non ha un massimo. Questa condizione si ricava ricordando che laddove una funzione ammetta un massimo o un minimo, la derivata prima si annulla. Perciò calcoliamo la derivata prima della funzione modulo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right)^2 \right)}} \right] &= - \frac{\frac{d}{d\omega} \left[1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^4 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \right]}{2 \sqrt{\left(\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right)^2 \right)^3}} = \\ &= - \frac{\left[-4 \left(\frac{\omega}{\omega_m^2} \right) + 4 \left(\frac{\omega}{\omega_m^4} \right)^3 + 8\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_m^2} \right) \right]}{2 \sqrt{\left(\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right)^2 \right)^3}} = - \frac{\frac{4\omega}{\omega_m^4} \left[-\omega_m^2 + \omega^2 + 2\xi^2 \omega_m^2 \right]}{2 \sqrt{\left(\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right)^2 \right)^3}} \end{aligned}$$

Infine la condizione si ottiene dalla seguente uguaglianza:

$$\left[-\omega_m^2 + \omega^2 + 2\xi^2 \omega_m^2 \right] = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\omega_m^2 - 2\xi^2 \omega_m^2} = \omega_m \sqrt{1 - 2\xi^2}$$



Cerchiamo per quale range di valori esiste un massimo alla f.d.t.: abbiamo detto che la radice quadrata deve essere reale, quindi il radicando deve essere maggiore positivo $1 - 2\xi^2 > 0$ e quindi è sufficiente che $\xi < \sqrt{0.5} = 0.707$ affinché esista un massimo, questo è il valore che separa le funzioni in due classi: quando il coefficiente di smorzamento è in valore minore di 0.707 allora la funzione modulo presenta un massimo, quando il coefficiente di smorzamento è in valore maggiore di 0.707 allora la funzione modulo è simile alla funzione di un qualsiasi blocco con due poli semplici coincidenti.

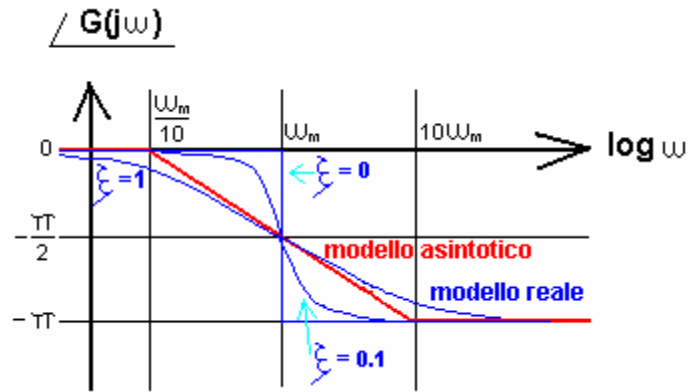
Diagramma asintotico e reale della fase:

Per quanto concerne invece il diagramma della fase dobbiamo calcolare la corrispettiva funzione fase(jω).

$$\angle G(j\omega) = \angle \left[\frac{1}{\left(\frac{2j\xi\omega}{\omega_m} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right) \right)} \right] = -\angle \left[\frac{2j\xi\omega}{\omega_m} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right) \right] = -\arctg \frac{\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_m} \right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right)}$$

andiamo a vedere cosa succede nei diversi casi.

Per $\omega \ll \omega_n$ si ha che la fase della funzione di trasferimento tende a 0, infatti la pulsazione di taglio è più grande quindi con una operazione al limite, si ottiene che il numeratore tende a 0 e il denominatore ad 1: l'arcotangente di 0 è 0° .



Per $\omega \gg \omega_n$ si ha che la fase della funzione di trasferimento tende a 0 , infatti la pulsazione di taglio è più grande quindi con una operazione al limite, si ottiene che il numeratore tende a ∞ e il denominatore ad $-\infty$, si noti però che l'ordine di grandezza del denominatore è maggiore di quello del numeratore, quindi l'arcotangente è -180° .

Quindi analizziamo cosa succede per un valore preciso di ω : $\omega = \omega_n$. Per questo valore di frequenza espressa in rad/sec la fase della f.d.t. è $-\arctg(+\infty) = -90^\circ$.

Ragionando in modo asintotico queste condizioni appena citate si traducono in un grafico con l'andamento descritto in rosso qui sotto. Ovviamente un diagramma asintotico è buono solo per sapere qualitativamente come vanno le cose, ma il diagramma reale, ovviamente si discosta significativamente da questo andamento. In funzione del coefficiente di smorzamento possiamo vedere il reale andamento in blu. Si noti che per $\xi \rightarrow 0$ il diagramma delle fasi tende a diventare un spezzata in ω_n . Si noti che a cavallo di $\xi = 0,707$ il diagramma delle fasi "scavalca" il diagramma asintotico.

Segno del coefficiente ξ .

Se $\xi < 0$ il modulo della funzione di trasferimento in dB è la stessa che si otterrebbe per $\xi > 0$; altresì cambia l'argomento della funzione di trasferimento il quale è l'esatto speculare rispetto l'ascissa di quello che si ha per $\xi > 0$.

Regola mnemonica.

Moduli:

- Se si ha una costante K_1 in modulo < 1 allora è rappresentabile come una retta costante nel semipiano negativo ($20 \log K_1 < 20 \log 1 = 0$); se si ha una costante K_1 in modulo > 1 allora è rappresentabile come una retta costante nel semipiano positivo ($20 \log K_1 > 20 \log 1 = 0$).
- Se si hanno n poli nell'origine allora la retta passa per il punto $20 \log K_1$ (dove K_1 può essere anche 1) con pendenza $-20 \cdot n$ dB/dec.
- Se si hanno n zeri nell'origine allora la retta passa per il punto $20 \log K_1$ (dove K_1 può essere anche 1) con pendenza $+20 \cdot n$ dB/dec.
- Se si hanno n poli semplici in ω_t (pulsazione di taglio) allora da $-\infty$ fino a ω_t questa funzione può essere rappresentata da una retta costante di pendenza 0 sovrapposta all'ascissa; da ω_t fino a $+\infty$ questa funzione può essere rappresentata da una retta con pendenza $-20 \cdot n$ dB/dec.
- Se si hanno n zeri semplici in ω_t (pulsazione di taglio) allora da $-\infty$ fino a ω_t questa funzione può essere rappresentata da una retta costante di pendenza 0 sovrapposta all'ascissa; da ω_t fino a $+\infty$ questa funzione può essere rappresentata da una retta con pendenza $+20 \cdot n$ dB/dec.
- Se si hanno n poli complessi in ω_t (pulsazione di taglio) allora da $-\infty$ fino a ω_t questa funzione può essere rappresentata da una retta costante di pendenza 0 sovrapposta

all'ascissa; da ω_t fino a $+\infty$ questa funzione può essere rappresentata da una retta con pendenza $-40 \cdot n$ dB/dec.

- g. Se si hanno n zeri semplici in ω_t (pulsazione di taglio) allora da $-\infty$ fino a ω_t questa funzione può essere rappresentata da una retta costante di pendenza 0 sovrapposta all'ascissa; da ω_t fino a $+\infty$ questa funzione può essere rappresentata da una retta con pendenza $+40 \cdot n$ dB/dec.

Fasi:

- h. Se si ha una costante K_1 positiva allora la fase è costante e pari a 0° , se è negativa la fase è costante e pari a 180° .
- i. Se si hanno n poli nell'origine allora la retta è costante e passa per $-90^\circ \cdot n$.
- j. Se si hanno n zeri nell'origine allora la retta è costante e passa per $+90^\circ \cdot n$.
- k. Se si hanno n poli semplici in ω_t (pulsazione di taglio) allora da $-\infty$ fino a $\omega_t/10$ questa funzione può essere rappresentata da una retta costante di pendenza 0 sovrapposta all'ascissa; da $\omega_t/10$ a $10\omega_t$ è rappresentato da una retta con pendenza $-45^\circ \cdot n$ /dec; da $10\omega_t$ fino a $+\infty$ questa funzione può essere rappresentata da una retta costante passante $-90^\circ \cdot n$.
- l. Se si hanno n zeri semplici in ω_t (pulsazione di taglio) allora da $-\infty$ fino a $\omega_t/10$ questa funzione può essere rappresentata da una retta costante di pendenza 0 sovrapposta all'ascissa; da $\omega_t/10$ a $10\omega_t$ è rappresentato da una retta con pendenza $+45^\circ \cdot n$ /dec; da $10\omega_t$ fino a $+\infty$ questa funzione può essere rappresentata da una retta costante passante $+90^\circ \cdot n$.
- m. Se si hanno n poli complessi in ω_t (pulsazione di taglio) allora da $-\infty$ fino a $\omega_t/10$ questa funzione può essere rappresentata da una retta costante di pendenza 0 sovrapposta all'ascissa; da $\omega_t/10$ a $10\omega_t$ è rappresentato da una retta con pendenza $-90^\circ \cdot n$ /dec; da $10\omega_t$ fino a $+\infty$ questa funzione può essere rappresentata da una retta costante passante $-180^\circ \cdot n$.
- n. Se si hanno n zeri complessi in ω_t (pulsazione di taglio) allora da $-\infty$ fino a $\omega_t/10$ questa funzione può essere rappresentata da una retta costante di pendenza 0 sovrapposta all'ascissa; da $\omega_t/10$ a $10\omega_t$ è rappresentato da una retta con pendenza $+90^\circ \cdot n$ /dec; da $10\omega_t$ fino a $+\infty$ questa funzione può essere rappresentata da una retta costante passante $+180^\circ \cdot n$.

Algoritmo per il tracciamento del diagramma di Bode.

Per la generica $G(s) = K \frac{\prod (s - z_j) \prod (s^2 + 2\delta_h \omega_{nh} + \omega_{nh}^2)}{s^v \prod (s - p_i) \prod (s^2 + 2\delta_k \omega_{mk} + \omega_{mk}^2)}$ esiste un algoritmo

molto semplice per il tracciamento del diagramma di Bode del modulo e della fase.

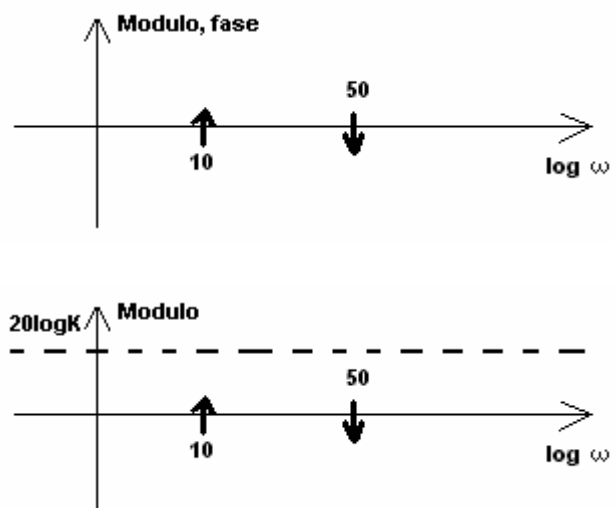
Modulo.

- 1. Cerco tutti i poli e gli zeri (es.

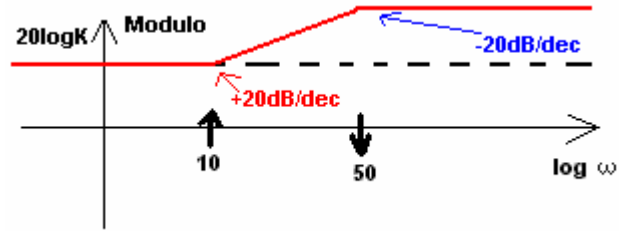
$G(s) = K \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.02s}$ ha uno zero in

$s=10$ e un polo in $s=50$) e segno con una freccia verso l'alto i zeri semplici (2 per quelli complessi) e una verso il basso per i poli semplici (2 per quelli complessi) sul diagramma di Bode.

- 2. Calcolo il valore in dB di K . $M = 20\log|K|$

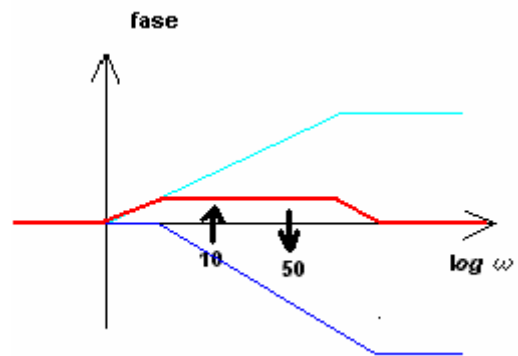
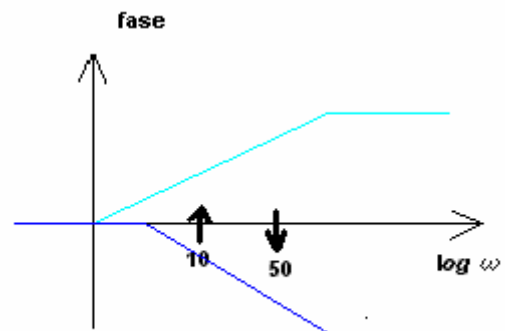


3. Cerco tutti i polo e zeri nell'origine $v = p - z$.
4. Traccio una retta con pendenza $-20 \cdot v$ dB/dec (se $v = 0$ la retta in questione ha una pendenza nulla) passante per M.
5. Dalla retta appena disegnata, continuo a tracciare il grafico con la stessa pendenza fintanto che non incontro una freccia, allorché incontri una freccia verso l'alto il grafico asintotico assumerà la forma di una spezzata con pendenza incrementata di 20db/dec, altresì se la freccia è verso il basso allora incrementerò la pendenza del grafico di -20dB/dec.



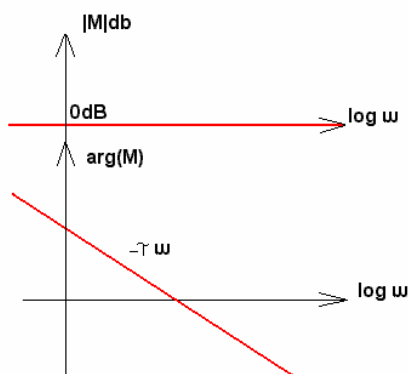
Fase.

1. Se $K > 0$ pongo $\varphi = 0^\circ - 90^\circ v$, se $K < 0$ pongo $\varphi = -180^\circ - 90^\circ v$ e traccio una retta orizzontale passante per φ fino a che incontro la prima freccia.
2. Traccio le frecce in corrispondenza di poli e zeri, verso l'alto per zeri a parte reale negativa e poli a parte reale positiva, verso il basso per il poli a parte reale negativa e per gli zeri a parte reale positiva.
3. Se esistono frecce le analizzo altrimenti traccio il diagramma completo. Se la freccia è verso l'alto, parto da una decade prima e termino una decade dopo e traccio un segmento con pendenza $+45^\circ/\text{dec}$. Se la freccia è verso il basso, parto da una decade prima e termino una decade dopo e traccio un segmento con pendenza $-45^\circ/\text{dec}$.
4. Una volta analizzato tutte le frecce sommo i grafici ottenuti badando al fatto che deve valere la seguente espressione per la fase a frequenze infinite: $\varphi = [\#zeri\ p.r.n - \#zeri\ p.r.p - \#poli\ p.r.n + \#poli\ p.r.p] \cdot 90^\circ$



Ritardo finito.

Alcuni sistemi possono essere rappresentati semplicemente come dei ritardi, ad esempio una



condotta nella quale scorre un fluido lunga L si nota che i parametri che caratterizzano il fluido all'inizio della condotta sono gli stessi alla fine della condotta dopo un ritardo $\tau = V/L$. Poiché la L-trasformata di $f(t)$ è $F(s)$ e la L-trasformata di $f(t - \tau)$ è $F(s)e^{-s\tau}$ dove $e^{-s\tau}$ è la funzione di trasferimento del ritardo finito ed è una funzione trascendente.

Sul diagramma di Bode $e^{-s\tau} = e^{-j\omega\tau}$ in modulo $|e^{-j\omega\tau}| = 1$ che espresso in dB invece è uguale a 0, in fase

invece poiché $e^{j\varphi(\omega)}$ e $\varphi(\omega) = -\omega\tau$. Ciò si traduce nel fatto che non posso essere più veloce del ritardo allora il controllore di un sistema avente ritardo è un “ritardatore”.

L’analisi del ritardo finito si può effettuare anche attraverso gli approssimanti di Padè. Questi approssimanti prendono le mosse dalla scomposizione in serie di Taylor. La serie di Taylor è un polinomio che approssima una funzione generica intorno ad un punto x_0 , questa approssimazione è tanto più accurata quanto più si proceda con le derivate. Fermandoci al primo ordine per il numeratore e per il denominatore si ottiene:

$$e^{-s\tau} = \frac{e^{-\frac{s\tau}{2}}}{e^{\frac{s\tau}{2}}} \xrightarrow{\text{Taylor}} \frac{1 - \frac{s\tau}{2}}{1 + \frac{s\tau}{2}}$$

Diagramma di Nyquist (o polari).

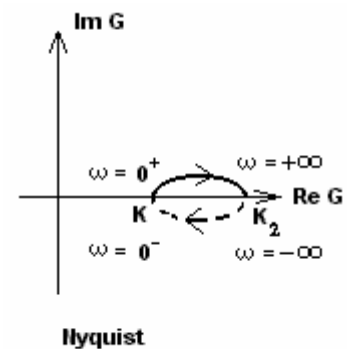
I diagrammi polari sono rappresentazioni della funzione di trasferimento nelle sue componenti reale e immaginaria, al variare della pulsazione sul piano di Gauss*. I diagrammi polari sono di grande utilità soprattutto per l’analisi della stabilità utilizzando il **criterio di Nyquist**.

Tracciamento dei diagrammi di Nyquist.

I diagrammi di Nyquist si tracciano partendo dallo studio dei diagrammi di Bode.

Algoritmo generale per il tracciamento del diagramma di Nyquist.

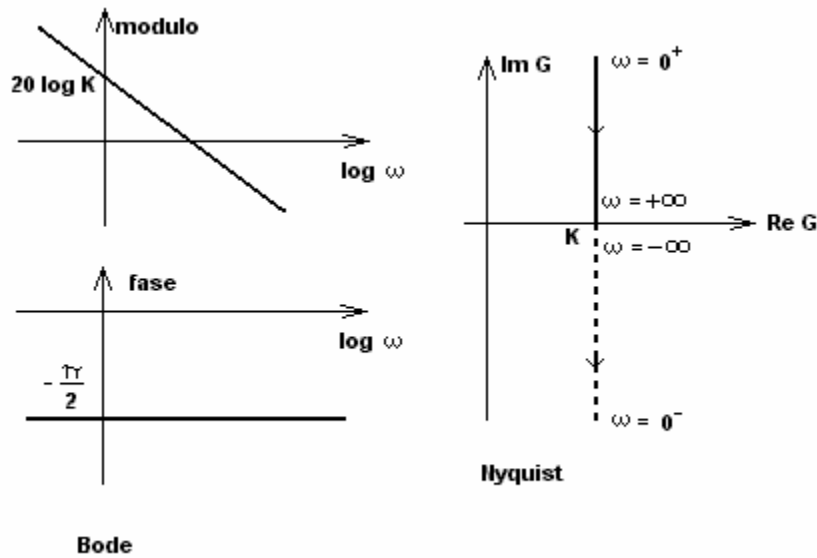
1. Individuo sul diagramma di Bode il valore della fase e del modulo per $\log(\omega) \rightarrow -\infty$ e per $\log(\omega) \rightarrow +\infty$. Ad esempio se $G(s) = K \frac{1+0.1s}{1+0.02s}$, da diagramma di Bode si ha che per $\log(\omega) \rightarrow -\infty$ il modulo vale K e la fase 0° , e per $\log(\omega) \rightarrow +\infty$ il modulo vale K_2 e la fase ancora 0° .
2. Analizzo l’andamento della fase e del modulo e a meno che non abbia intersezioni cogli assi che mi forniscono dati precisi, traccio qualitativamente il diagramma di Nyquist per ogni frequenza. Se il diagramma del modulo si trova sul semipiano positivo e passa al semipiano negativo, sul diagramma di Nyquist si traduce nel fatto che per quella pulsazione il modulo diventa inferiore ad 1. Nell’esempio si nota che la fase si alza di pochi gradi e rimane costante per poi tornare a 0° , mentre il modulo cresce di pochi dB e poi torna costante.



Esempio.

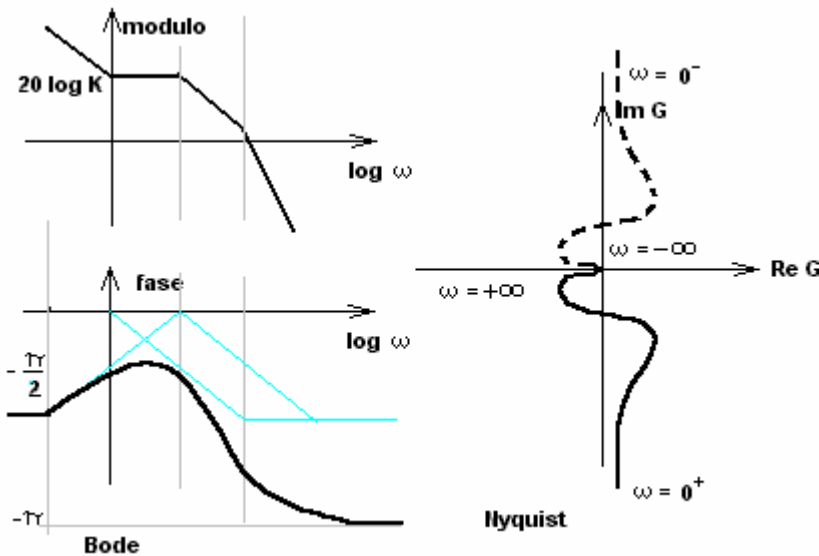
Se il sistema è di “**tipo 1**” $G(j\omega) = K/j\omega$ allora traccio il diagramma di Bode della fase e del modulo. La fase rimane costante a -90° il che si traduce in un’orientazione della curva per ogni frequenza sempre verso il basso, e il modulo che come si vede per frequenze prossime allo 0 presenta un valore grandissimo, mentre per frequenze alte presenta un valore molto basso. Questo si traduce, sul piano di Gauss, in una retta verticale passante per K che per $\omega \rightarrow 0$ si trova a $+\infty$ e che per $\omega \rightarrow +\infty$ si trova a 0 con senso di percorrenza dall’alto verso il basso. Per completezza nei

diagrammi di Nyquist si usa disegnare anche lo speculare della curva ottenuta per frequenze positive, affinché si abbia una nuova curva che comprenda anche le frequenze negative.

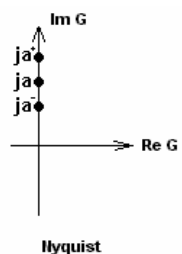


Esempio.

Sia $G(s) = \frac{K(s+1)}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$ tracciamo qualitativamente il diagramma di Bode e il relativo diagramma di Nyquist, sfruttando i relativi algoritmi.



Caso particolare di due poli complessi coniugati: asintoto obliquo.

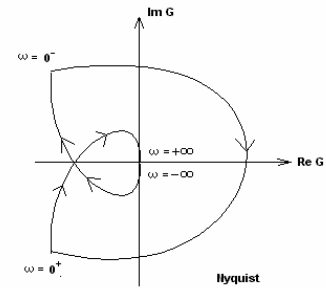


Se la f.d.t. ha 2 poli complessi coniugati puramente immaginari $G(s) = G_1(s) \frac{1}{(s^2 + a^2)}$ nella rappresentazione di Nyquist si ha un salto di 180° in corrispondenza di ja^+ e ja^- in quanto $\arg G(ja^+) = \arg G_1(ja^+) - \pi$ mentre \arg

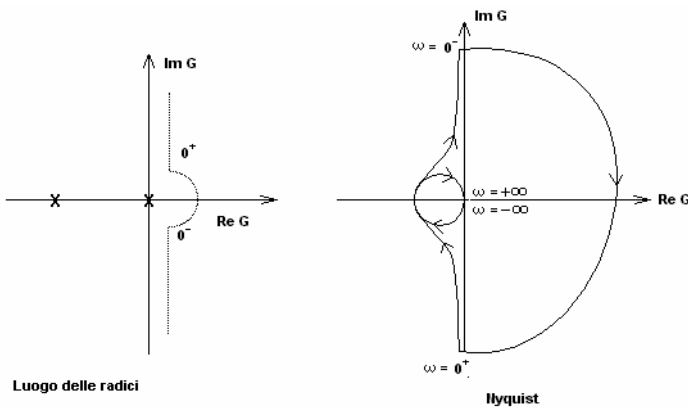
$G(j\omega^-) = \arg G_1(j\omega^-)$ e poiché $\arg G_1(j\omega^-) = \arg G_1(j\omega^+)$ perché $j\omega$ non è radice di alcun polo o zero di G_1 allora si è dimostrato che esiste tale salto che rappresenta un asintoto obliquo.

Chiusura all'infinito

Se capita che tra $\omega = 0^-$ e $\omega = 0^+$ c'è una discontinuità occorre fare una chiusura all'infinito. Tale chiusura ha sempre senso di percorrenza orario e può essere facilmente dedotta seguendo una regola fondamentale: **partendo dal punto del diagramma polare che corrisponde a 0^- si devono compiere tanti mezzi giri (cioè tante rotazioni di π) in senso orario quanti sono i poli nell'origine, con termine in 0^+ .**



Esempio



Di fianco è rappresentato

$$G(s) = K \frac{1}{s(1 + \tau s)}$$

Nyquist che sul Luogo delle radici (vedi dopo). Poiché tutti i poli della $G(s)$ debbono essere a parte reale negativa, va assunto che anche il polo nell'origine sia nel semipiano negativo. Allora se questo appartiene al semipiano negativo la retta che divide i due semipiani percorre da 0^- a 0^+ ho una rotazione di π

lascio lo 0 a sinistra (considerando il polo appartenente al semipiano "buono"). Passando al piano di Nyquist devo lasciare a $\pm j\infty$ a sinistra.

* Il piano di Gauss è un piano cartesiano in cui in ascissa ci sono i valori reali e in ordinata i valori immaginari: ovviamente il senso con cui crescono i valori reali o immaginari è indicato dal verso della freccia. Sul piano di Gauss un numero complesso è rappresentato da un punto, mentre una funzione complessa è rappresentata da una curva. Si noti che però per descrivere una funzione abbiamo bisogno di una variabile aggiuntiva che associ alla coppia di valori che identificano il punto sul piano un valore di questa variabile indipendente " ω ".