[3.1] Criteri di stabilità

Un sistema di controllo esiste e funziona solo se è stabile.

[3.1.1] Stabilità BIBO

Un sistema è stabile BIBO $\Leftrightarrow \begin{cases} |u(t)| < M < +\infty \\ |y(t)| < L < +\infty \end{cases}$

BIBO significa bounded input bounded output, ovvero ad ingresso limitato corrisponde una risposta limitata.

[3.1.2] Stabilità asintotica

Solo per sistemi lineari* è definita la stabilità asintotica. Un sistema è stabile asintoticamente se, per sistemi continui, la parte reale degli autovalori del polinomio caratteristico** è negativa:

$$\mathrm{Re}[\lambda_i(A)] < 0$$
$$\lambda_i(A) \in Spec(A)$$

inoltre si ricordi che P(λ) coincide con il denominatore della F(s).
La stabilità asintotica implica la stabilità BIBO, ma la stabilità BIBO non implica la stabilità asintotica.

[3.2] Il criterio di Routh

Il criterio di Routh permette di conoscere se un polinomio ha radici con parte reale negativa: esso è quindi importante per analizzare il denominatore della F(s) (il polinomio caratteristico) affinché sia verificata la asintotica stabilità.

$$F(s) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_0$$

[3.2.1] Le condizioni affinché si possa applicare il criterio di Routh

Condizione necessaria:
affinché non esistano radici con $\mathrm{Re}[\lambda] > 0$ ogni coefficiente del polinomio deve avere lo stesso segno: qualora capiti che almeno un coefficiente abbia segno diverso allora di sicuro esiste almeno una radice del polinomio con parte reale positiva. Se questa prima condizione è verificata si può procedere con l'analisi mediante la tabella di Routh.

Tabella di Routh

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-2} & \dots & a_0\,(a_1) \\ a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_1\,(a_0) \\ b_{n-2} & b_{n-4} & & \\ c_{n-3} & & & \end{array}$$

Adesso l'algoritmo di risoluzione impone una serie di operazioni di pivot*** su tutti gli elementi.

Condizione sufficiente:
affinché non esistano radici con $\mathrm{Re}[\lambda] > 0$ ogni elemento della prima colonna della tabella di Routh deve avere lo stesso segno. Inoltre questa prima colonna ci da altre informazioni, per esempio contando, qualora ci fossero, le inversioni di segno, si può conoscere quante sono le radici positive del polinomio caratteristico.

[3.2.2] Casi particolari

Caso 1: si azzerano 1 o più elementi (non tutti) alla riga i-esima.
Alla riga i-esima risulta per esempio:
0 0 1 -1

Allora o procedo con il seguente **algoritmo**:

1. moltiplico $(-1)^h$ per la contenente gli 0. h è il numero di componenti nulle (nell'esempio h=2)
2. shifto di h posti a sinistra
3. sommo la riga ottenuta con quella di partenza.

Oppure anziché utilizzare l'algoritmo, sostituisco ε con gli 0 e calcolo la soluzione nel solito modo, con l'unica accortezza di sostituire 0 all'ultimo passaggio.

Caso 2: si azzerano tutti gli elementi di una riga.

Se compare una riga di 0 significa che il polinomio è divisibile da una biquadratica i cui coefficienti si possono leggere sulla riga appena precedente. Quando incontro una riga nulla mi fermo.
Una biquadratica ha radici sia positive che negative (stesso modulo).
$es. y = t^2 + 2t + 1$ con $t = x^2$ ha come soluzione $x = \pm 1$ con molteplicità 2
Ad esempio:

$$\begin{array}{ccc} C_{n-3} & C_{n-5} & C_{n-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

significa che $C_{n-3}x^4 + C_{n-5}x^2 + C_{n-7}$ è divisore del polinomio di partenza e quindi implica l'instabilità del sistema.

[E.3.1] Esercizio sul criterio di Routh con riga nulla

Per il denominatore della F(s), $D(s) = s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$ determinare se ha radici positive.
In primis guardo il segno di ogni coefficiente, poiché sono tutti uguali costruisco la tabella di Routh ponendo il primo, il terzo e il quinto elemento del polinomio in riga "1" e il secondo, il quarto e il sesto nella riga "2".
La terza riga si calcola per entrambi i valori nel seguente modo :
1*1-1*1=0
sicché si ottiene:

$$\begin{array}{lll} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \rightarrow x^4 + x^2 + 1 \\ 0 & 0 & \end{array}$$

è divisore di D(s).

Quindi per quanto già citato prima implica che D(s) ha radici positive.

[E.3.2] Esercizio sul criterio di Routh

Per il denominatore della F(s), $D(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$ determinare se ha radici positive. In primis guardo il segno di ogni coefficiente, poiché sono tutti uguali costruisco la tabella di Routh ponendo il primo, il terzo e il quinto elemento del polinomio in riga "1" e il secondo, il quarto nella riga "2", lo spazio che rimane è occupato da uno 0.

La terza riga si ricava: $\dfrac{35*10-50}{10} = 30;\qquad \dfrac{24*50-0}{50} = 24$

La quarta riga si ricava: $\dfrac{50*30-10*24}{30} = 42$

La quinta riga si ricava: $\dfrac{24*42-0}{42} = 24$

$$\begin{array}{lll} 1 & 35 & 24 \\ 10 & 50 & 0 \\ 30 & 24 & \\ 42 & & \\ 24 & & \end{array}$$

Poiché sono verificate entrambe le condizioni si può dire che il sistema con $D(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$ è stabile.

* La asintotica stabilità è assicurata solo per sistemi lineari in quanto in sistemi non lineari possono esistere più punti di stabilità. Per esempio si pensi al pendolo come sistema non lineare, il quale ha due punti di equilibrio, il primo si trova in alto ed è un punto di "instabilità" il secondo che si trova in basso è raggiungibile da ogni punto dello spazio fuorché l'altro punto di equilibrio: questo è un punto di "stabilità semplice"

** Il polinomio caratteristico P(λ) = det[A-λI] dove A è la matrice di stato. Per chiarezza si ricordi la rappresentazione mediante le matrici di stato: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

*** L'operazione di pivot è quell'operazione che restituisce il rapporto tra il determinante di una sottomatrice 2X2 e del pivot stesso invertito di segno. Con riferimento alla tabella di Routh del paragrafo 3.2.1 l'operazione di pivot sul terzo elemento della prima colonna è:

$$b_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} = \frac{(a_{n-1}a_{n-2}) - (a_n a_{n-3})}{a_{n-1}}$$