Gradiente, Divergenza, Rotore

Plinio Gatto

06 maggio 2006

Indice generale

Licenza

Introduzione

Quest'opera è una raccolta di appunti sugli operatori vettoriali Gradiente, Divergenza e Rotore ed è nata con l'intenzione di fornire una panoramica su questi operatori cercando, attraverso alcuni esempi, di chiarire il loro significato fisico.
Questo documento è stato realizzato con il pacchetto open source OpenOffice.org 2.0.
Nel caso in cui siano persenti degli errori o se volete collaborare allo sviluppo di quest'opera ampliando alcune sezioni o aggiungendo alcuni esempi potete contattarmi all'indirizzo di posta elettronica pli@autistici.org.

Plinio Gatto

Gradiente

Il gradiente è un operatore vettoriale che trasforma un campo scalare in un campo vettoriale.
La funzione $f(x,y,z)$ che descrive il campo in ogni punto dello spazio deve essere scalare, continua e derivabile.

Il gradiente di $f(x,y,z)$ si calcola considerando le derivate:

$$\frac{(\delta f(x,y,z))}{(\delta x)}$$

$$\frac{(\delta f(x,y,z))}{(\delta y)}$$

$$\frac{(\delta f(x,y,z))}{(\delta z)}$$

moltiplicandole per il versore orientato verso la direzione di derivazione e considerando il vettore che ha come componenti le quantità ottenute:

$$grad(f)=\frac{(\delta f)}{(\delta x)}\bar{x}+\frac{(\delta f)}{(\delta y)}\bar{y}+\frac{(\delta f)}{(\delta z)}\bar{z}=\nabla f$$

dove per non appesantire la notazione si è posto $f(x,y,z)=f$ e l'operatore ∇ è definita come:

$$\nabla=\frac{\delta}{(\delta x)}\bar{x}+\frac{\delta}{(\delta y)}\bar{y}+\frac{\delta}{(\delta z)}\bar{z}$$

Il gradiente indica quanto rapidamente varia la funzione nelle direzioni x,y,z , ovvero la direzione di massima variazione, nello spazio, di una funzione scalare.

Le superfici dove il campo scalare è costante si dicono superfici di livello; su queste superfici il gradiente è ortogonale alle superfici stesse.

Gradiente di temperatura

Supponiamo di conoscere la temperatura istantanea, in ogni punto, all'interno di una stanza e supponiamo che la temperatura sia diversa in diversi punti della stanza. Il gradiente di temperatura è la variazione di temperatura che si misura spostandosi da un punto ad un altro della stanza.
Se un punto è molto caldo rispetto agli altri punti, la variazione di temperatura sarà elevata allontanandosi dal punto caldo e costante in tutte le zone fredde che si trovano alla stessa temperatura.

Se consideriamo un riferimento cartesiano, in ogni punto la temperatura sarà rappresentata dalla funzione:

$$T(x, y, z)$$

La variazione di temperatura lungo ogni asse è data dalle seguenti espressioni:

lungo x : $\frac{(\delta T(x, y, z))}{(\delta x)}$

lungo y : $\frac{(\delta T(x, y, z))}{(\delta y)}$

lungo z : $\frac{(\delta T(x, y, z))}{(\delta z)}$

Se costruiamo un vettore che ha come componenti le variazioni di temperatura lungo i rispettivi assi otteniamo il gradiente di temperatura all'interno della stanza:

$$\nabla f = \frac{(\delta T)}{(\delta x)}\bar{x} + \frac{(\delta T)}{(\delta y)}\bar{y} + \frac{(\delta T)}{(\delta z)}\bar{z}$$

questo vettore è diretto verso la direzione di massima variazione del campo di temperatura e il suo modulo rappresenta l'intensità della variazione.

Proprietà del campo Coulombiano

Consideriamo il campo scalare del potenziale elettrico $V(x, y, z)$, possiamo definire il campo elettrico Coulombiano come:

$$\bar{E}_c(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z)$$

Una proprietà del gradiente afferma che l'integrale di linea, del gradiente, dipende solamente dal punto iniziale e dal punto finale del percorso di integrazione:

$$\int_A^B \bar{E}_c dl = \int_A^B (-\nabla V) dl = V(A) - V(B)$$

Si osserva quindi che il campo elettrico Coulombiano è conservativo in quanto l'integrazione su un percorso non è dipendente dal percorso stesso ma solamente dal punto iniziale e finale.

Osservazioni sul gradiente

Data una funzione, anche vettoriale, l'integrale di linea tra due punti del suo gradiente è:

$$\int_A^B \nabla f \, dl = f(B) - f(A)$$

Divergenza

La divergenza è un operatore vettoriale che trasforma un campo vettoriale in un campo scalare. La divergenza di un campo rappresenta la densità delle linee di flusso del campo uscenti da un punto per unità di volume. Infatti integrando la divergenza in un volume si ottiene il flusso del campo che attraversa la superficie che delimita il volume.

Per capire meglio il legame tra divergenza e flusso, consideriamo il flusso di un fluido che attraversa una superfice nell'unità di tempo (portata); consideriamo le seguenti grandezze:

$\bar{v}(x, y, z)$	campo vettoriale velocità del fluido
ds	elemento infinitesimo della superficie
$\bar{n}$	versore normale uscente dalla superficie

Il volume d'acqua $d\tau$ che attraversa la superficie ds nel tempo dt :

$$\frac{(d\tau)}{(dt)}=\frac{(dp)}{(dt)}\cdot\bar{n}\,ds=\bar{v}\cdot\bar{n}\,ds$$

dove dp è lo spostamento infinitesimo dell'acqua.

Il flusso totale attraverso la superficie si può calcolare integrando il volume d'acqua che attraversa la superficie nel tempo dt :

$$\Phi=\int_S \bar{v}\cdot\bar{n}\,ds$$

Consideriamo ora un volume, e dividiamo la superficie che delimita il volume in due parti possiamo calcolare il flusso cha attraversa la superficie che delimita il volume calcolando il flusso attraverso ogni semi-superficie:

$$\Phi=\int_S \bar{v}\cdot\bar{n}\,ds=\int_{S_1} \bar{v}\cdot\bar{n}\,ds_1+\int_{S_2} \bar{v}\cdot\bar{n}\,ds_2$$

Se si divide la superficie in N parti si avrà:

$$\Phi=\int_S \bar{v}\cdot\bar{n}\,ds=\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} \bar{v}\cdot\bar{n}\,ds_i$$

Considerando superfici infinitesime e dividendo i flussi attraverso queste superfici per i rispettivi volumi V_i si ottiene una proprietà della funzione:

$$\frac{(\int_{S_i} \bar{v} \cdot \bar{n} \, ds_i)}{(V_i)}$$

considerndo ora questa quantità per $V_i \rightarrow 0$ si ottiene la divergenza del campo; per una generico campo vettoriale $\bar{f}(x, y, z)$ si ha:

$$\nabla \cdot \bar{f} = \lim_{V_i \rightarrow 0} [\frac{(\int_{S_i} \bar{f} \cdot \bar{n} \, ds_i)}{(V_i)}]$$

La divergenza è un flusso per unità di volume e oltre ad un'informazione qualitativa sul punto essa fornisce anche un'informazione sull'intensità della sorgente delle linee di flusso che passano in quel punto.

Teorema di Gauss

Considreriamo Ω un dominio chiuso e limitato di R^3, il cui bordo $\delta \Omega$ è una superficie regolare parametrizzata (o l'unione di più sperfici di questo tipo), orientato con la normale uscente $\bar{n}$. Sia $\bar{f}(x, y, z) = f_x \bar{x} + f_y \bar{y} + f_z \bar{z}$ un campo vettoriale regolare: $\bar{f}(x, y, z) \in C^1(\Omega)$. Allora il flusso del campo attraverso la superficie chiusa è uguale all'integrale in tutto il volume della divergenza del campo:

$$\int_{(\delta \Omega)} \bar{f} \cdot \bar{n} \, ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{f} \, dx \, dy \, dz$$

dove la divergenza di f è data dalla seguente espressione:

$$\nabla \cdot \bar{f}(x, y, z) = \frac{(\delta f_x)}{(\delta x)} + \frac{(\delta f_y)}{(\delta y)} + \frac{(\delta f_z)}{(\delta z)}$$

Interpretazione del teorema di Gauss

Il teorema di Gauss è un'equazione di bilancio: la divergenza di un campo vettroiale è una misura dell'intensità delle sorgenti del campo, se la divergenza è maggiore di zero, oppure dei pozzi se la divergenza è maggiore di zero.
Un campo che presenta divergenza nulla si dice solenoidale; un campo solenoidale non presenta ne sorgenti ne pozzi.

Sorgenti e pozzi del campo

Nei fluidi, l'integrale della divergenza del campo vettoriale velocità è il bilancio complessivo del fluidio netto che esce dalle sorgenti nella regione racchiusa dalla superficie, sulla quale si calcola il flusso, nell'unità di tempo.

Velocità di un fluido

Consideriamo il campo vettoriale di velocità di un fluido in movimento: in ogni punto abbiamo un vettore di velocità.
Supponiamo che il fluido sia un liquido incomprimibile, se un volumetto viene compresso lungo una direzione, per mantenere costante il volume, deve espandersi nelle altre direzioni.

Possiamo calcolare la velocità di espansione del volumetto calcolando la divergenza del campo:

$$\nabla\cdot\bar{v}(x,y,z)=\frac{(\delta v_x)}{(\delta x)}+\frac{(\delta v_y)}{(\delta y)}+\frac{(\delta v_z)}{(\delta z)}$$

Si può infatti interpretare come la somma delle variazioni di velocità lungo le coordinate del sistema di riferimento.

Legge di continuità in forma locale

Si osserva che dove c'è una variazione della densità di carica si ha un pozzo o una sorgente del campo densità di corrente. Se $\nabla\cdot\bar{J}=0$ il campo è solenoidale infatti:

$$\nabla\cdot\bar{J}=\frac{-(d\rho_c)}{(dt)}=0$$

non si hanno quindi ne sorgenti ne pozzi del campo.

Osservazioni sulla divergenza

La divergenza di un campo vettoriale definisce punto per punto l'intensità delle sorgenti (o pozzi) del campo stesso:

- La divergenza del campo gravitazionale indica la densità di materia in un punto.
- La divergena del campo “corrente” di calore indica la presenza di sorgenti o pozzi di calore nello spazio.
- La divergenza del campo velocità di un fluido indica se ci sono pozzi o sorgenti di fluido.
- La divergenza del campo elettrico indica la presenza di densità di carica.
- La divergenza del campo magnetico è sempre nulla in quanto non esiste una carica elementare magnetica

Relazioni con il gradiente e l'operatore Laplaciano scalare

Come abbiamo visto se si considera un campo scalare $f(x,y,z)$ e si calcola il gradiente si ottiene un campo vettoriale:

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{(\delta f)}{(\delta x)}\overline{x}+\frac{(\delta f)}{(\delta y)}\overline{y}+\frac{(\delta f)}{(\delta z)}\overline{z}$$

se calcoliamo la divergenza di qesto campo vettoriale si ha:

$$\nabla\cdot\nabla f(x,y,z)=\frac{(\delta^2 f)}{(\delta x^2)}\overline{x}+\frac{(\delta^2 f)}{(\delta y^2)}\overline{y}+\frac{(\delta^2 f)}{(\delta z^2)}\overline{z}$$

introducendo l'operatore Laplaciano:

$$\nabla^2=\frac{\delta^2}{(\delta x)}+\frac{\delta^2}{(\delta y)}+\frac{\delta^2}{(\delta z)}$$

la divergenza del gradiente di un campo scalare è $\nabla^2 f(x,y,z)$

Laplaciano vettoriale
Per completezza si riporta l'espressione del Laplaciano vettoriale:

$$\nabla^2\overline{f}(x,y,z)=\nabla(\nabla\cdot\overline{f}(x,y,z)-\nabla\times\nabla\times\overline{f}(x,y,z))$$

Rotore

Il rotore è un operatore vettoriale che trasforma un campo vettoriale in un altro campo vettoriale. Consideriamo un campo vettoriale e ne calcoliamo la circuitazione (integrale di linea lungo una linea chiusa):

$$\Gamma=\int_{l} \bar{f}\cdot\bar{r}\,dl$$

dove $\bar{r}$ è il versore tangente alla linea lungo la quale si calcola l'integrale.

Dividendo il percorso in due percorsi più piccoli si ha:

$$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2=\int_{l_1} \bar{f}\cdot\bar{r}\,dl_1+\int_{l_2} \bar{f}\cdot\bar{r}\,dl_2$$

Se si continua a dividere il percorso la circuitazione è data dalla relazione:

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{N}\int_{l_i} \bar{f}\cdot\bar{r}\,dl_i$$

Consideriamo quindi la circuitazione su uno dei percorsi divisa per la superficie racchiusa dal percorso stesso. Se le superfici sono infinutesime queste possono essere approssimate a superfici piane e quindi il versore che identifica una singola superficie ha sempre la stassa direzione all'interno della superficie infinitesima. Si ha quindi:

$$\lim_{S_i\to 0}\left[\frac{(\int_{l_i} \bar{f}\cdot\bar{r}\,dl_i)}{S_i}\right]$$

Questo limite rappreenta una proprietà del campo vettoriale $\bar{f}(x,y,z)$ e prende il nome di rotore:

$$\nabla\times\bar{f}(x,y,z)$$

Teorema di Stokes

Consideriamo una superficie S regolare, dotata di bordo e orientata da una normale $\bar{n}$. Il bordo δS è orientato dal versore tangente $\bar{r}$. Sia $\bar{f}(x,y,z)$ un campo vettoriale regolare definito almeno in una regione aperta dello spazio contenente S allora si ha:

$$\int_S \nabla\times\bar{f}(x,y,z)\cdot\bar{n}\,ds=\int_{(\delta S)} \bar{f}(x,y,z)\cdot\bar{r}\,dl$$

dove dl è un elemento infinitesimo del bordo δS .

Il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa eguaglia il lavoro del campo lungo il bordo della superficie stessa. Tale lavoro viene detto circuitazione per ricordare che il bordo è una linea chiusa.
Il Teorema di Stokes afferma quindi che il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa è uguale alla circuitazione del vettore lungo il bordo della superficie.

Se il rotore di un campo è nullo il campo si dice irrotazionale. Se il rotore è diverso da zero significa che il campo presenta una vorticosità. Ad esempio l'acqua che va verso uno scolo assume un moto vorticoso.

Inoltre è immediato verificare che il rotore del gradiente di un campo è sempre nullo:

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{(\delta f)}{(\delta x)}\bar{x}+\frac{(\delta f)}{(\delta y)}\bar{y}+\frac{(\delta f)}{(\delta z)}\bar{z}$$

$$\nabla\times\nabla f(x,y,z)=det\begin{vmatrix}\bar{x} & \bar{y} & \bar{z}\\ \frac{\delta}{(\delta x)} & \frac{\delta}{(\delta y)} & \frac{\delta}{(\delta z)}\\ \frac{(\delta f)}{(\delta x)} & \frac{(\delta f)}{(\delta y)} & \frac{(\delta f)}{(\delta z)}\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\nabla f(x,y,z)=[\frac{((\delta)^2 f)}{(\delta x\delta y)}-\frac{((\delta)^2 f)}{(\delta y\delta x)}]\bar{x}-[\frac{((\delta)^2 f)}{(\delta x\delta z)}-\frac{((\delta)^2 f)}{(\delta z\delta x)}]\bar{y}+[\frac{((\delta)^2 f)}{(\delta x\delta y)}-\frac{((\delta)^2 f)}{(\delta y\delta x)}]\bar{z}=0$$

Condizione necessaria perchè un campo sia conservativo è che il campo sia irrotazionale. Ad esempio il campo elettrico è conservativo se il rotore del campo è nullo. Infatti il campo elettrico si può definire come $\bar{E}_c=-\nabla V$, applicando il rotore si ottiene $\nabla\times(\bar{E}_c)=\nabla\times(-\nabla V)=0$.
Il campo elettrico è irrotazionale quindi conservativo.

Velocità di un fluido

Consideriamo il campo vettoriale velocità di un fluido in movimento. In ogni punto, ad un determinato istante, è associato un vettore di velocità. Il fluido può scorrere in maniera uniforme traslando come se fosse solido oppure uno strato può scorrere rispetto ad un altro, imprimendo in questo modo, alla porzione elementare un moto rotatorio. Inoltre la rotazione sarà tanto più forte quanto più alta sarà la velocità di scorrimento e quanto più vicini saranno i due strati.

Supponiamo di avere un piano x, y orrizontale e uno strato di fluido che scorre su di esso nella direzione x con velocità nulla al contatto con il piano e linearmente crescente con l'asse z :

$$\bar{v}(x, y, z)=v_x(z)\bar{x}+v_y\bar{y}+v_z\bar{z}$$

con:

$$v_x(z)=k\,z \qquad v_y=0 \qquad v_z=0$$

La rotazione che si ha sulla singola particella sarà la velocità di variazione della velocità lungo x nella direzione z e il vettore rotazione sarà diretto verso y :

$$\nabla\times\bar{v}(x,y,z)=det\begin{vmatrix}\bar{x} & \bar{y} & \bar{z}\\ \frac{\delta}{(\delta x)} & \frac{\delta}{(\delta y)} & \frac{\delta}{(\delta z)}\\ v_x(z) & v_y & v_z\end{vmatrix}=det\begin{vmatrix}\bar{x} & \bar{y} & \bar{z}\\ \frac{\delta}{(\delta x)} & \frac{\delta}{(\delta y)} & \frac{\delta}{(\delta z)}\\ k\,z & 0 & 0\end{vmatrix}=k\,\bar{y}$$

Osservazioni sul rotore

Il rotore denota e quantifica la presenza di vortici nel campo, la presenza cioè di linee di forze chiuse che circondano le linee di forza del campo considerato.

Nel caso del moto di un fluido definisce un moto vorticoso, cioè un movimento in cui la velocità delle singole particelle ha una componente perpendicolare al moto principale di traslazione che determina la portata. Se questa componente è nulla allora non esiste il moto vorticoso e il fluido di dice laminare io lamellare, in quanto il moto avviene in un modo tale da poter individuare superfici di particelle con la stessa velocità che scorrono l'una sull'altra senza infuenzarsi reciprocamente.

Il movimento delle cariche elettriche costituente una corrente produce, nello spazio circostante, un campo magnetico che è un campo vettoriale le cui linee sono chiuse:

$$\nabla\,\bar{B}=\mu_0\bar{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{(d\,\bar{E})}{(d\,t)}$$

Bibliografia

- Bramanti, M. & Pagani, C. D. & Salsa, S. (2000)
  Matematica, calcolo infinetesimale e algebra lineare, Firenze

- Guarnieri, M. & Stella, A. (2002)
  Principi ed applicazioni di elettrotecnica, volume primo, Padova

- Midrio, M. (2003)
  Campi elettromagnetici, Padova