

# Achilles, die Schildkröte und die Zeitlupe

## Costabile Matarazzo - Ein Gregor Mendel der Logik

1869 veröffentlichte der botanisierende Mönch Gregor Mendel einen Aufsatz über Experimente, bei welchen er die Gesetze der Vererbung entdeckt hatte. Der Aufsatz des wissenschaftlichen Außenseiters Mendel blieb 25 lange Jahre lang unbeachtet.

1959 veröffentlichte der philosophierende Journalist Costabile Matarazzo einen Aufsatz über seine verblüffenden Überlegungen zum Zenon'schen Paradox von Achilles und der Schildkröte. Der Aufsatz des wissenschaftlichen Außenseiters Matarazzo blieb bis heute unbeachtet.

Um der Wahrheit auf die Spur zu kommen, hat uns der griechische Philosoph Epimenides eine erlogene Geschichte überliefert.

Ein Kreter habe einmal zu ihm gesagt: "*Alle Kreter sind Lügner.*" Epimenides weist nach, daß diese Aussage eines Kreters über die Kreter in ein logisches Dilemma führt. Wenn es nämlich stimme, daß alle Kreter Lügner seien, dann müsse sein kretischer Gewährsmann selber einer sein, sei dessen Aussage folglich erlogen. Dann aber seien **nicht** alle Kreter Lügner, der kretische Gewährsmann könne also selbst einer dieser wahrheitsliebenden Kreter sein, was wiederum hieße, daß seine Aussage stimme, er selber also **doch** ein Lügner sei.

Diese kleine Geschichte mit der sich im Kreise drehenden Schlußfolgerung verfolgt die abendländische Philosophie seit zweieinhalb Jahrtausenden. So richtig zufrieden ist man mit den vorgeschlagenen Lösungen bis heute nicht.

## Achilles und die Schildkröte

Die lügnerischen Kreter sind ein Klacks im Vergleich zu dem Ärger, den ein Kollege des Epimenides, Zenon von Elea, mit seiner Geschichte von Achilles und der Schildkröte der Philosophie beschert hat. Sie kennen die Geschichte natürlich, werden sie aber wahrscheinlich nicht mehr in allen Einzelheiten parat haben.

Achilles, der große Krieger, läuft mit einer Schildkröte über - sagen wir mal - 200 m um die Wette. Da Achilles zehnmal schneller läuft als die Schildkröte, bekommt diese der Fairness halber einen Vorsprung von 100 m. Der Gesunde Menschenverstand beharrt darauf, und ist

durch nichts von dieser Überzeugung abzubringen, daß Achilles die Schildkröte sehr bald eingeholt haben wird und damit den Wettlauf gewinnt. Und wenn der Gesunde Menschenverstand soweit reicht, lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen, dann wird er bei unseren Ausgangszahlen errechnen können, daß Achilles die Schildkröte nach 111,111... m eingeholt haben wird.

In diese Selbstverständlichkeit bricht Zenon ein und beweist mit logikscharfem Besteck, daß Achilles die Schildkröte **niemals** einholen wird, niemals einholen **kann**. In dem Moment nämlich, argumentiert Zenon, da Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, ist diese ihrerseits 10 m weiter, also bei 110 m. Hat Achilles die 110 m erreicht, so ist er immer noch nicht bei der Schildkröte, denn die ist inzwischen wiederum 1 m weiter gekrochen, auf 111 m. Ist Achilles bei 111 m, so ist die Schildkröte bei 111,10 m, und so weiter, und so fort.

Immer dann, wenn Achilles jenen Punkt erreicht hat, an dem die Schildkröte zuletzt war, ist die Schildkröte jeweils wieder ein Stück weiter, so daß Achilles im Laufe des Wettkampfes der Schildkröte zwar sehr, **sehr** nahekommen wird, sie aber niemals **vollständig** erreichen und - logischerweise - also auch niemals **überholen** kann. Denn die Schildkröte bleibt **immer** um ein winziges - wenn auch mit jedem Schritte winziger werdendes - Stück vor Achilles.

Der Vorsprung der Schildkröte wird, so schlußfolgert Zenon, im Laufe der Zeit zwar unendlich klein, völlig verschwinden aber wird er nie. Der schnelle Achilles bleibt also bei allem Strampeln stets hinter dem gemächlichen Tier.

## Dampfplaudereien

Nicht nur Wissenschaftler, Mathematiker und Philosophen, haben sich im Laufe der Zeit mit dieser Geschichte befaßt. Anspruchsvollere Zeitschriften für das allgemeine Publikum greifen im Rahmen von philosophischen Plaudereien Zenons Rätsel gerne auf, wobei die konservativeren Blätter es häufig als Beispiel für die Begrenztheit menschlicher Vernunft benutzen. Aber auch in den seriöseren Blättern ziehen sich die Autoren gerne mit einigen allgemeinen Bemerkungen über "Paradoxien" und "Gesunden Menschenverstand" aus der Affäre. Zenons Paradox sei "nun mal nicht" (eine beliebte Floskel, wenn das Denken aussetzt) befriedigend aufzulösen, das habe noch keiner gekonnt, da könne man nichts machen. Aber immerhin sei es Zenons Verdienst, durch den Stachel seines Paradoxes die Entwicklung der Infinitesimalrechnung angeregt zu haben.

Die Wissenschaft geht gründlicher an die Sache heran. Ein behördlich anerkannter Philosoph rückt der Sache mathematisch zu Leibe und verkündet zuversichtlich, Zenons Paradoxie von Achill und der Schildkröte sei schon lange gelöst. "*Achill holt die Schildkröte nach*

$$111,111\dots m = 100+10+ m$$

*ein. Der Anschein einer Paradoxie entsteht dadurch, daß Achill sich auch nach Zurücklegung beliebig vieler der positiven Strecken 100, 10, 1, 1/10, 1/100,... immer noch hinter der Schildkröte befindet. Aber die Länge dieser Strecken wird eben immer kleiner und konvergiert gegen 0."*

Da hat er recht, der Philosoph. Die obige Formel ist so richtig, wie sie allbekannt ist. Kein Lehrbuch der Infinitesimalrechnung kann es sich verkneifen, einen Hinweis auf Achilles und seine Schildkröte einzuschieben. Stolz, den Trick mit der Unendlichkeit endlich kapiert zu haben, rechnet der Schüler die Gleichung nach, kommt zum richtigen Ergebnis und findet auf der nächsten Seite seines Lehrbuchs eine verschämte Anmerkung des Autors, ihm sei das Ganze trotz der mathematisch sauberen Rechnung immer noch irgendwie unheimlich.

Das Unheimliche an Zenons Schilderung des Wettlaufs ist nämlich der - jeder Lebenserfahrung Hohn sprechende - Eindruck von unglaublicher Mühseligkeit und Anstrengung, mit der Achilles einen Wegabschnitt nach dem anderen läuft und läuft und dabei der Schildkröte immer nur näher und näher kommt, sie aber lange und lange nicht erreicht. Ein Eindruck, der auch mit der Infinitesimalformel im Kopf nicht verschwindet.

### **Vom Sein und der Verlegenheit**

In meinem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung war zu lesen, daß die "*Paradoxie des Zenon vom mathematischen Standpunkt aus nur so verstanden werden...(kann)..., daß Achilles die Schildkröte zwar zu keinem Mal (niemals) innerhalb der unendlichen Folge einzelner Weg- und Zeitintervalle einholt, aber sie dennoch nach einer endlichen Zeitspanne, also nicht 'nie', tatsächlich erreicht.*"

Diese Erklärung ist nun alles andere als zufriedenstellend. Sie läuft, in Alltagsdeutsch übersetzt, auf die Feststellung hinaus, daß Achilles die Schildkröte bestimmt irgendwann, vor dem Ende der Unendlichkeit, erreicht - aber: das kann dauern. Und: Auch dieser Schluß stimmt ganz offensichtlich nicht mit der Beobachtung überein, denn in der Realität wäre das ganze Rennen eine Sache von Sekunden.

Auch den Lehrbuchautoren ist klar, daß dies nicht das Gelbe vom Ei ist, denn sie sprechen anschließend, sichtlich verlegen, von der "*kontinuierlichen, bzw. diskontinuierlichen Struktur von Raum und Zeit*", und von der "*Unendlichkeit als potentieller Denkmöglichkeit, bzw. aktueller Wirklichkeit*", flüchten sich also in das Seins-Gebrabbel des Irgendwie. Und weil ihnen diese Flucht in die Unverbindlichkeit der Ontologie durchaus bewußt ist, fahren sie fort, die "*verschiedenen Deutungsversuche im Laufe der Geistesgeschichte*" hätten "*letztlich nur er-*

*kenntnistheoretische Bedeutung, während die reine Mathematik auch ohne sie" auskomme.  
"Denn die Mathematik schafft sich die Welt ihrer Wirklichkeit selbst."*

Entnervt erklären sich also die philosophierende Mathematiker - sicherheitshalber - für unzuständig und reichen den Schwarzen Peter an die Philosophie weiter, die es sich aber anscheinend mit der mathematischen Formel ganz kommod eingerichtet hat.

Alle Welt scheint sich um das Zenon'sche Paradox von Achilles und der Schildkröte herumzudrücken. Letztlich versucht man uns einzureden, als denkender Mensch müsse man sich damit abfinden, daß logisches Denken zwar wunderbare Gebäude zu erzeugen vermag, diese Gebäude aber gelegentlich unter einem sanften Fußtritt einfach zerbröseln.

### **Paradoxien sind logischer Sprengstoff**

Paradoxien oder Antinomien sind die Hofnarren der Philosophie. Sie nehmen Prämissen, (inhaltlich) unstreitige Grund-Sätze, von denen jeder vernünftige Mensch ausgehen kann, ausgehen muß. Dann greifen sie sich - ebenso unstreitige - (formal-)logische Verknüpfungsregeln. Der Baukasten ist komplett: Aus wahren Prämissen und richtigen Verknüpfungsregeln kann - nein muß! - jeder vernünftig denkende Mensch zu wahren, d. h. mit der Realität übereinstimmenden Aussagen kommen. Fein.

Und dann kommt die Realität aus ihrem Loch gekrochen und hat die Stirn, mit den aus wahren Prämissen korrekt abgeleiteten Sätzen nicht übereinzustimmen.

Und das war's dann? Darüber kann man mit einem schief-verlegenen Lächeln hinweggehen?

Man kann es nicht! Solange eine logische Paradoxie unerklärt im Raum stehen bleibt, kann das nur dreierlei heißen:

- \* Entweder ich bin nicht in der Lage, richtig zu beobachten, d. h. die scheinbar so evidente Realität ist gar nicht so, wie sie meinen menschlichen Augen erscheint.
- \* Oder die Prämissen sind Makulatur.
- \* Oder - wer wagt es, zu denken? - meine schöne Logik ist an einer Stelle undicht. So undicht, daß sie das Wasser der Wahrheit nicht halten kann.

Wie auch immer: Wer denkt, weil er - abgesehen vom Genuß des Denkens an sich - irgendwann auch ein Ergebnis mit nachhause nehmen will, der kann über Zenons Paradox nicht locker hinweghüpfen, den werden solche Paradoxien beunruhigen bis ins Mark. Denn - machen wir uns das mal in aller Schärfe klar:

- \* **Daß** Zenons Beweisführung falsch sein muß, wissen wir.

- \* Wir wissen es aber **nur** deswegen, weil das Ergebnis der Beweisführung **an diesem einen Beispiel** absolut absurd ist.

**So** falsch - das ist allen klar - kann unsere Beobachtung gar nicht sein, Achilles wird zweifellos die Schildkröte überholen.

Solange wir jedoch nicht wissen, **warum** Zenons Argumentation falsch ist, bleibt ein folgeschwerer Stachel im Gehirn. Was, so bleibt zu fragen, ist in jenen Fällen, in denen die logisch so eindeutig scheinende Beweisführung ebenfalls falsch ist, das falsche Ergebnis dieser fehlerhaften Beweisführung aber plausibel bleibt, der Fehler im Ansatz also nicht eindeutig und evident ins Auge springt? Können wir uns unter diesen Umständen noch auf unser wichtigstes Denkinstrument, die Logik, verlassen?

Das Problem, das sich stellt, ist mit einem Computer vergleichbar, der eigentlich immer zuverlässig arbeitet, bei einer bestimmten einfachen, leicht nachzuprüfenden Berechnung aber **immer** das falsche Ergebnis errechnet und **keiner** der Hard- und Softwarespezialisten kommt darauf, warum diese eine Sache immer falsch errechnet wird. Wirklich wichtige Berechnungen wird man diesem Computer nicht anvertrauen können, sondern einen anderen nehmen.

Wir haben aber nur diese eine und einzige Logik.

## Costabile Matarazzo

Elea, in dem Zenon als Philosoph wirkte, war 500 v. Chr. eine griechische Stadt. Es liegt in Süditalien, knapp 150 km südlich von Neapel.

Knapp 30 km nördlich von Elea und zweieinhalb Jahrtausende nach Zenon wurde 1911 in Castellabate Costabile Matarazzo geboren. Er studierte in Neapel, später in Rom, Jura, Literaturgeschichte und Philosophie. In seiner Studentenzeit geriet er mehrmals wegen kritischer Äußerungen und Zeitungsbeiträge mit den Behörden des faschistischen Italien in Konflikt, so daß er schließlich Italien verließ, um sich in Brasilien niederzulassen.

1946 kehrte er nach Italien zurück, wo er als Freier Mitarbeiter für die Feuilletons verschiedener italienischer Zeitungen und Zeitschriften schrieb. Er schrieb vor allem Theater- und Buchkritiken, versuchte sich hin und wieder auch als scharfsinniger und einfühlsamer Gerichtsreporter bei Strafprozessen.

1959 hielt er in Vallo della Lucania - in Sichtweite des antiken Elea, was wörtlich zu verstehen ist - einen Vortrag, in welchem er behauptete, das Zenon'sche Paradox von Achilles und der Schildkröte aufgelöst zu haben. Der Vortrag wurde unter dem Titel "**Achilles, die Schildkröte**

**und die Zeitlupe - Das Paradox von ZENON im Lichte der modernen Kinematographie**  
in der "Rivista Scientifica Lucana" veröffentlicht.

Wiewohl Matarazzo als Journalist italienweit einen gewissen Ruf genoß, wurde er als philosophierender Journalist offensichtlich nicht recht ernst genommen. Dazu mag beigetragen haben, daß Matarazzo das schwierige Thema auf eine leicht verständliche, angenehm lesbare Art und Weise dargestellt hat, ein Umstand, der auch einen ausgewiesenen Wissenschaftler schnell in den Verdacht bringt, nichts Substantielles gesagt zu haben.

Tatsache ist, daß weder Matarazzos Vortrag noch sein Aufsatz in der Folgezeit irgendeine Beachtung fanden..

1996 ist Costabile Matarazzo in seinem Heimatort Castellabate gestorben.

### **Die meisten Dinge sind einfach**

Nachdem Matarazzo das Problem dargestellt, seine Bedeutung herausgestrichen und die Grenzen der bisherigen Lösungsversuche aufgezeigt hat, kommt er zum Kern.

*Unser Mathematiklehrer, hatte uns, die wir kurz vor dem Abitur standen, eine Hausaufgabe gegeben:*

*Ein Spaziergänger will von Punkt A zum 5 km weit entfernten Punkt B gehen. Auf seinem Wanderhut sitzt eine Amsel, bereit, ebenfalls nach B zu fliegen. Der Spaziergänger geht mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit von 5 km/h, während die Amsel mit der zehnfachen Geschwindigkeit fliegt. In dem Moment, da der Fußgänger zu seiner Wanderung nach B aufbricht, erhebt sich auch die Amsel von seinem Hut. Wenn die Amsel bei B angekommen ist, dreht sie sofort um und fliegt zum Wanderer zurück.*

*Ist die Amsel beim Wanderer, der inzwischen seinerseits ein Stück Weg zurückgelegt hat, angekommen, dreht sie sofort wieder um, fliegt nach B, dreht dort um, fliegt bis zum - inzwischen noch näher gekommenen - Spaziergänger usw. usf. - bis schließlich auch der Wanderer bei B angekommen ist.*

*Die Frage lautete nun: Wieviel Kilometer hat die zwischen dem festen Punkt B und dem ständig sich verändernden Punkt F (gleich Fußgänger) hin- und herpendelnde Amsel zurückgelegt?*

*Vor Eifer glühend schloß ich mich an diesem Nachmittag in meinem Zimmer ein, konzentrierte mich darauf, Bewegungsgleichungen für Fußgänger und Amsel aufzustellen. Mehrere Stunden lang hatte ich einen winzigen, aber entscheidenden Fehler im Ansatz, machte dann noch*

ein, zwei Rechenfehler und war schließlich - es war bereits weit nach Mitternacht - zum, wie sich herausstellte, richtigen Ergebnis gekommen.

Unser Mathematiklehrer lobte mich am nächsten Tag für meinen Fleiß und meine Ausdauer, immerhin war ich der einzige in der Klasse gewesen, der das richtige Ergebnis gefunden hatte. Dann lächelte er uns an und meinte, es gebe noch einen anderen Ansatz. Der Fußgänger sei doch eine Stunde unterwegs? Wir nickten - ganz leicht auszurechnen. Also fliege logischerweise auch die Amsel eine Stunde. Wir mußten wieder nicken. Die Amsel erreiche 50 km/h, also müsse sie in der einen Stunde 50 km zurücklegen.

Damals ging ich weinend von der Schule nachhause.

Meine bleibende Erkenntnis aus dieser ebenso bitteren wie prägenden Erfahrung läßt sich so formulieren:

**Die meisten Dinge sind einfach. Sie werden erst durch schlaue Leute zum Problem.**

## Zenon und die Zeitlupe

Und dann fährt er fort:

Es wird nun Zeit, sich endlich auf das Problem selbst zu konzentrieren. Lassen wir das Rennen mehrmals - unter verschiedenen Blickwinkeln - vor unserem geistigen Auge ablaufen.

Wie würde ein unbefangener, philosophisch oder physikalisch nicht vorgebildeter Beobachter die Szene beschreiben?

- Beide Sportler laufen los, die Schildkröte langsam, Achilles erheblich schneller. Bald hat Achilles die Schildkröte eingeholt, überholt und wird schließlich überlegener Sieger.

Nun stellen wir uns einen physikalisch geschulten Beobachter vor und bitten ihn, den Ablauf des Rennens möglichst präzise festzuhalten:

- Achilles ist anfangs bei Punkt 0, die Schildkröte bei Punkt 100 und beider Ziel ist Punkt 200. Nach einer gewissen Zeitspanne  $t$  ist Achilles bei 50, die Schildkröte dagegen (sie hat nur ein Zehntel des Weges von Achilles zurückgelegt) bei 105. Nach der doppelten Zeit  $2 \cdot t$  ist Achilles bei 100, die Schildkröte bei 110. Nach der dreifachen Zeit  $3 \cdot t$  ist Achilles bei 150 und die Schildkröte bei 115.

Achilles hat also die Schildkröte bereits überholt. Den Rest des Beobachtungsprotokolls können wir uns sparen.

Zu guter Letzt lassen wir Zenon das Rennen beschreiben.

- Achilles ist anfangs bei Punkt 0, die Schildkröte bei Punkt 100 und beider Ziel ist Punkt 200. Nach einer gewissen Zeitspanne  $t$  ist Achilles bei 100, die Schildkröte dagegen bei 110. Nach einer weiteren Zeitspanne  $1/10 \cdot t$  ist Achilles bei 110, die Schildkröte dagegen bei 111. Nach wiederum einer Zeitspanne  $1/100 \cdot t$  ist Achilles bei 111, die Schildkröte dagegen bei 111,10, zum Zeitpunkt  $1/1000 \cdot t$ , schließlich ist Achilles bei 111,10, die Schildkröte dagegen bei 111,11 usw. usf.

Achilles wird die Schildkröte niemals einholen.

Merken Sie was? Merken Sie den Unterschied? Der normale, physikalisch geschulte Beobachter benutzt für seine Beschreibung gleiche Zeitabstände, Zenon dagegen wählt ein Beobachtungsintervall, das von Meßpunkt zu Meßpunkt kleiner wird.

Lassen Sie es mich Ihnen noch etwas anschaulicher darstellen: Stellen Sie sich vor, das Rennen zwischen Achilles und der Schildkröte wäre mit einer Filmkamera aufgenommen worden und unsere Beobachter sehen sich jetzt den Film an.

- Der naive Beobachter läßt den Film einfach ablaufen und freut sich dran.
- Der physikalische Beobachter läßt den Film an vier - zeitlich gleich weit entfernten - Stellen anhalten, notiert sich die Zwischenstände und läßt dann jeweils weiter laufen.
- Zenon hingegen sieht sich den Film bis zur Hälfte ganz normal an, schaltet dann den Projektor auf Zehnfach-Zeitlupe, stellt fest, daß Achilles (bei der Projektion) für den wesentlich kürzeren Weg nun genauso lange braucht wie zuvor für den langen, schaltet nun auf hundertfache Über-Zeitlupe, macht wiederum die gleiche Beobachtung von Achilles' Langsamwerden und schaltet dann auf Super-, schließlich auf Giga-Zeitlupe usw. usf.

Das heißt: Zenon "beobachtet" in diesem Gedankenexperiment gar nicht, daß Achilles die Schildkröte niemals einholen wird.

Sondern?

Sondern er **weigert sich** einfach, **hinzuschauen**, solange hinzuschauen, bis Achilles das Tier eingeholt hat. Indem er die Beobachtung, **nur** die Beobachtung, **nicht** den tatsächlichen Ablauf ad infinitum zerdehnt, kommt er zu seinem sensationellen, beunruhigenden Paradox

"Achilles ist ganz knapp hinter der Schildkröte. So, in der Bewegung eingefroren, wie die beiden jetzt sind, lassen wir sie stehen und diskutieren die nächsten zweieinhalb Jahrtausende darüber, warum Achilles die Schildkröte nicht einholen kann."

Hätte Zenon die Geschichte auf diese Weise erzählt, hätte er niemals Generationen von Philosophen und Mathematikern zum Narren halten können. So aber zwingt er sie mit einem Ta-



*schenspielertrick zu komplexen Infinitesimalgleichungen, wo Kopfrechnen - ach was!: - Nachdenken genügt hätte.*

Soweit Costabile Matarazzo.

Das Bemerkenswerte an Matarazzos Aufsatz ist die Tatsache, daß er das philosophische Problem nicht mathematisch angeht, sondern eben philosophisch. Matarazzo lenkt die Aufmerksamkeit auf den Umstand, daß Zenon vorgibt, ein **Bewegungs**problem konstruiert zu haben, während der ganze Ärger lediglich eine Sache der auf den Sankt Nimmerleinstag verzögerten **Beobachtung** ist. Zenon macht die Beobachtungsintervalle so klein und immer kleiner, daß er faktisch nie dazu kommt, einen Strich zu ziehen und sein "Jetzt ist's passiert!" unter das Beobachtungsprotokoll zu schreiben.

Oder, anders ausgedrückt: Matarazzo löst das Problem nicht, das seit Newton und Leibniz jeder Gymnasiast lösen kann, sondern er zerfetzt die Fragestellung. Zenons Problem braucht keine Lösung, weil das Problem nicht existiert.

Und wenn ich die Geschichte der nachmittelalterlichen Mathematik noch richtig im Kopf habe, dann war es in der Tat nicht der Stachel Zenons, der die Infinitesimalrechnung aus den Hirnen hervorgekitzelt hat, sondern Newtons und Leibniz' Notwendigkeit, die Bewegung der Planeten mathematisch in den Griff zu bekommen.

Muß ich noch extra erwähnen, daß Costabile Matarazzo auch das logische Paradox vom lügenden Kreter mit einem eleganten Schlenker in wenigen Sätzen erledigt?

"*Ein logischer Teufelskreis*", stimmt Matarazzo hinterfotzig zu, "*aus dem es kein Entrinnen gibt - wenn...*

*Wenn denn das Wort "Lügner" bedeuten würde, daß **jeder** Aussagesatz eines Lügners erlögen wäre. Nun ist Ihnen klar, daß dem nicht so ist, weil dem nicht so sein **kann**. Niemand ist in der Lage, bei allem, was er sagt, die Unwahrheit zu sprechen (sowenig wie im übrigen der umgekehrte Fall möglich ist - wir lügen alle ab und zu, und sei es aus Höflichkeit und Erbarmen). Ein "Lügner" ist vielmehr ein Mensch, der bedeutend **häufiger** als der Normalmensch die Unwahrheit sagt. So gesehen dürfen wir auch dem dreistesten Lügner glauben, wenn er von sich behauptet, er sei ein Lügner."*

