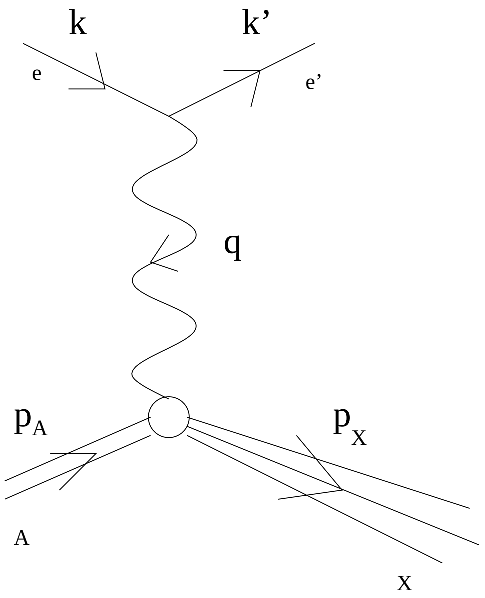
Indice

Capitolo 1

Introduzione

L'uso di sonde elettromagnetiche è un valido strumento per investigare la struttura di bersagli adronici; si è passati dai primi esperimenti di scattering elastico fino a quelli attuali di scattering profondamente anelastico che permettono la produzione di una varietà di stati finali.
L'interazione elettromagnetica viene ben descritta dalla teoria QED al secondo ordine perturbativo per interazioni fra particelle puntiformi; nel caso di bersaglio adronico, quindi composito, tale trattazione viene estesa utilizzando delle funzioni di struttura caratteristiche del bersaglio steeso e del suo stato interno. Il tipo di studio che si può fare sul bersaglio dipende dalla risoluzione spaziale ottenuta; si può decidere di fare uno scattering elastico sul bersaglio totale, situazione di per sé non molto interessante per lo studio della sua struttura, dato che non si rivela che la sua distribuzione di carica totale. Oppure, se il sistema in esame è ad esempio un nucleo atomico, si può aumentare il momento trasferito fino a raggiungere una risoluzione dell'ordine di grandezza di del raggio nucleonico ed avere scattering quasi-elastico sui nucleoni costituenti. A distanze ancora inferiori, minori cioè di circa 0.8 *fm*, si indaga la loro stessa struttura.
Esperimenti di questo tipo hanno portato, ad esempio, alla formulazione del modello a *partoni* per particelle composite, oppure all'ipotesi dello *scaling* di Bjorken
Con riferimento alla Fig. 1.1, si noti che in una diffusione elastica in cui si fa variare il momento trasferito $Vecq$, la risoluzione spaziale è dell'ordine di $1/|\boldsymbol{q}|$; andare a distanze dell'ordine delle dimensioni sub-adroniche consente lo studio della loro struttura grazie all'interazione diretta con i costituenti stessi di questi aggregati e di evidenziare eventualmente gli effetti della QCD nel sistema in esame.
Uno studio sistematico della struttura di un adrone richiederebbe infatti una descrizione fondata su tale teoria; questo è tuttavia un problema irrisolto, fatto che impone l'utilizzo di un approccio non relativistico per la soluzione del probelma di molti corpi considerati puntiformi all'inizio, senza quindi nessun grado di libertà interno, per poi introdurre ulteriori dettagli utilizzando varie tecniche in modo da riprodurre la caratteristiche che osserviamo. Le osservazioni, quindi, sono volte per lo più ad indagare lo proprietà dei costituenti un aggregato adronico e delle loro interazioni *all'interno* dell'aggregato stesso, nonché a comprendere fino a che punto sono valide le informazioni disponibili sulle stesse particelle libere nel trattarle come costituenti di un sistema. La sezione d'urto di un processo di diffusione leptone-adrone in approssimazione di Born fattorizza in una parte dipendente dalla

Figura 1.1 *– : Approssimazione di Born per il processo inclusivo $A(l,l')X$ di scattering anelastico di un leptone di quadrimpulso $k = (\varepsilon, \boldsymbol{k})$ su un bersaglio adronico in quiete nel sistema del laboratorio con $p_A = (M_A, \boldsymbol{0})$; $q = k - k' = (\nu, \boldsymbol{q})$ è il quadrimpulso trasferito, con $\nu = \varepsilon - \varepsilon'$ e $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$. Dopo l'urto, viene rivelato $k' = (\varepsilon', \boldsymbol{k}')$ del leptone diffuso; $p_X = (M_X, E_x)$ è il quadrimpulso del sistema adronico finale.*



struttura dell'adrone ed una dipendente dall'interazione elettromagnetica; quando la diffusione è elastica queste sono rispettivamente il fattore di forma e la sezione d'urto di Mott valida per la diffusione di particelle puntiformi.
Un numero di esperimenti è possibile con questo tipo di approccio. Indichiamo con X l'insieme degli stati finali possibili per il bersaglio, che non vengono rivelati: in questo modo si realizza un esperimento di tipo *inclusivo* in cui solo il quadrimpulso del leptone prima e dopo l'urto sono quantità note; il bersaglio è fermo nel riferimento del laboratorio e consideriamo sia esso che il proiettile non polarizzati. Si noti che nel processo descritto:

$$Q^2 = -q^2 > 0 \ , \quad q^2 = \nu^2 - \boldsymbol{q}^2 \ ;$$

l'energia trasferita ν ed il momento trasferito $\boldsymbol{q}$ possono essere variati indipendentemente. La quantità

$$\nu = \frac{p \cdot q}{M_A}$$

è un invariante relativistico del processo insieme a q^2; M_A è la massa a riposo del bersaglio, mentre

$$W^2 = p_X^2 = M_A^2 - Q^2 = 2p \cdot q$$

è la massa invariante del bersaglio nello stato finale.
Il caso di scattering elastivco è quello in cui dopo l'urto vale per il bersaglio $p_X^2 = M_A^2$ $(Q^2 = 2p \cdot q)$; gli scalari relativistici del processo si riducono ad uno e segue che in questo caso

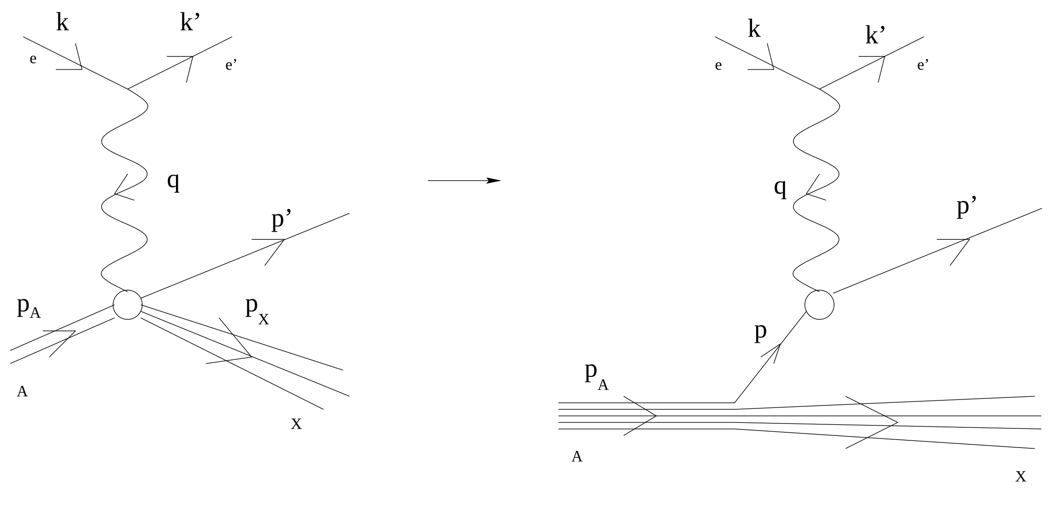
$$\nu = \frac{Q^2}{2M_A} \ .$$

In questa tesi ci occuperemo dei processi *semi-inclusivi* $A(e,e'p)X$, in cui viene rivelato un protone nello stato finale in coincidenza con l'elettrone diffuso dal nucleo A, mentre i restanti prodotti di diffusione vengono ignorati; di qui la dicitura semi-inclusivo. Il processo è rappresentato in Fig. 1.2; per passare dal processo semi-inclusivo a quello inclusivo $A(e,e')X$ non si deve che integrare la sezione d'urto della reazione di Fig. 1.2 sull'energia e la quantità di moto del protone.

In termini della variabile di Bjorken, $x = Q^2/2M_A/nu$, lo scattering elastico si ha per $x = A$; quando invece $x \simeq 1$ si ha scattering quasi-elastico da parte dei singoli costituenti il nucleo. Per $x << 1$ lo scattering è profondamente anelastico. Il modello a partoni è basato sull'osservazione di una sezione d'urto dominata dallo scattering quasi-elastico sul partone stesso, in corrispondenza cioè di $\nu/Q^2/2M_p$, in cui M_p è la massa del partone, ovvero per $x = M_p/M$.

Questi processi possono essere studiati nell'ambito dell'approssimazione impulsiva con onde piane (*PWIA, plane wave impulse approximation*) nella quale si considera che l'elettrone incidente interagisca con un singolo costituente del bersaglio (un quark in un nucleone, un nucleone in un nucleo e cosí via) senza che il processo di interazione ed il suo evolversi temporale venga influenzato dagli altri costituenti del sistema; la rappresentazione corrispondente è mostrata nel grafico a destra di Fig. 1.2.
Eseendo noto sperimentalmente $q = (\varepsilon - \varepsilon', \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$, in questa descrizione la misura

Figura 1.2 – *Il processo semi-inclusivo $A(e,e'p)X$ nell'approssimazione di Born, a destra, ed in quella PWIA, a destra. Il costituente del sistema di A particelle ha quadrimpulso $p = (p_o, \boldsymbol{p}) = \left(M_A - \sqrt{M_X^* + \boldsymbol{p}_X^2}, \boldsymbol{p}\right)$ prima dell'urto con l'elettrone e $p' = (p_0', \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = \left(\sqrt{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^2 + M^2}, \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\right)$; $p_X = \left(\sqrt{\boldsymbol{p}^2} + M_X^2, -\boldsymbol{p}\right)$.*

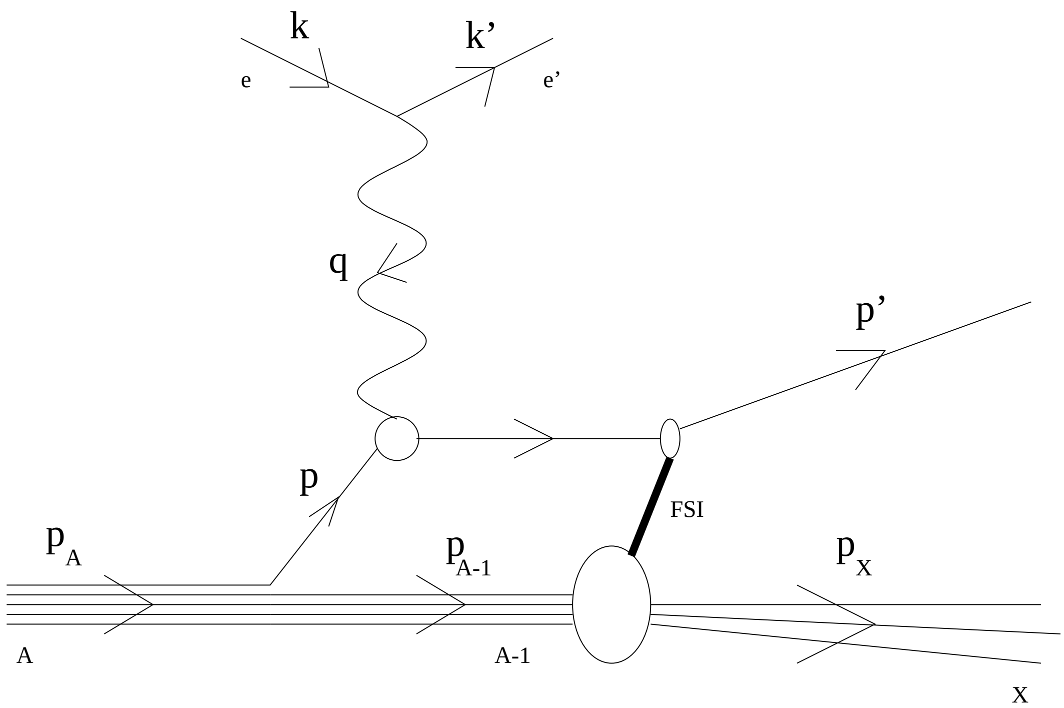


di $p' = (E_p, \boldsymbol{p}')$ ci permette di accedere all'impulso ed all'energia del costituente *off-shell* prima dell'urto, che sono ottenibili dalle

$$p = p' - q = \left(\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M_p^2} - \nu, \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q}\right) = (E + m, \boldsymbol{p}_m) \ ,$$

con gli indici m che stanno ad indicare i cosiddetti *energia* e *momento mancanti*, che in questa approssimazione coincidono con l'energia e la quantità di moto del cosituente prima dell'urto.
In conlcusione avremmo in $PWIA$ la distribuzione di queste due quantità per un costituente del bersaglio dall'esperimento di scattering, da confrontare con le varie teorie che possono predirle: modelli a particelle indipendenti, modelli che includono correlazioni fra i costituenti, modelli che, nel caso di bersaglio nucleare, prevedono l'esistenza di aggregati o *clusters* di più di 3 quarks, modelli a quasi-particelle, ecc. Tuttavia la $PWIA$ è invalidata dal ruolo importante giocato dalla cosiddetta *interazione nello stato finale* o FSI, il processo in cui il costituente colpito dal fotone virtuale interagisce con il sitema residuo; il grafico corrispondente è quello in Fig. 1.3.
La propagazione del nucleone nel mezzo nucleare può essere descritta per mezzo della teoria dello *scattering multiplo* (Glauber, [**?**]) da parte dei costituenti il sistema spettatore, già utilizzata nel caso di scattering di nucleoni su nuclei. Il contributo della FSI, dunque, è tenuto in conto assumendo che l'interazione $N-N$ dei nucleoni immersi nel mezzo nucleare, cioè del nucleone costituente che vi si propaga, sia della stessa natura di quella fra nucleoni fisici. Questa è una assunzione che può essere verificata indagando sull'entità della FSI. A tale scopo la *trasparenza nucleare* è introdotta, nel capitolo 2, e calcolata per alcuni casi di interesse, nal capitolo 4.

Figura 1.3 – *Un elettrone colpisce un nucleo di numeero atomico A, e causa l'emissione di un protone. L'interazione nello stato finale è indicata dalla linea spessa. Si definisce momento mancante la quantità $\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}'$ che, come si vede, non è più in relazione con l'impulso del protone prima dell'urto.*



La comprensione della interazione nello stato finale poi è indispensabile per risalire alla distribuzione di impulso dei nucleoni nel nucleo. Una trattazione del problema in maniera rigorosa in meccanica quantistica è quella in cui si risolve l'equazione di Schroedinger che descrive gli A corpi interagenti. L'interazione in questo modo sarebbe descritta nella sua totalità e si potrebbe calcolare l'elemento di matrice della transizione del bersaglio dallo stato fondamentale ad uno stato eccitato; in particolare ci interessa lo stato finale in cui un protone è nel continuo ed il resto, che finora abbiamo denotato con X, in uno qualsiasi degli stati permessi.
Questo approccio oltre a difficoltà dal punto di vista matematico ne presenta anche di carattere pratico, che conducono in maniera naturale a preferire una trattazione della interazione nello stato finale nell'ambito della teoria dello scattering multiplo. Infatti la soluzione dell'equazione di Schroedinger necessita di un modello per il potenziale di interazione nucleone-nucleone; dopodiché tecniche di soluzione per problemi a molti corpi sono disponibili. Tuttavia i potenziali di interazione di solito in uso sono costruiti sulla base delle informazioni dallo studio del sistema protone-nucleone del nucleo di deuterio e dagli esperimenti di diffusione elastica nucleone-nucleone. Ora, il problema consiste nel fatto che per avere informazioni sulle distribuzioni nucleari nelle regioni di alto impulso c'è bisogno di momenti trasferiti nella regione anelastica; la sezione d'urto protone-nucleone che utilizziamo nel nostro approccio è quella relativa a questa regione ed è quella che dà conto dell'assorbimento osservato nel flusso dei protoni uscenti.
Il protone colpito può essere allora trattato come un'onda piana, introducendo in più un operatore che descrive la FSI; l'elemento di matrice della reazione allora si mette nella forma:

$$\langle f|\hat{S}\rangle = \int \prod_j d\boldsymbol{r} e^{i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}_1} \psi_f^*(\boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A)\hat{S}(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A)\psi_i(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \tag{1.1}$$

in cui $\boldsymbol{r}_1$ identifica il protone colpito e $\boldsymbol{p}'$ è il suo impulso dopo l'urto. Lo scattering multiplo è discusso in dettaglio nel capitolo 2.
Nel capitolo 2 sono inoltre introdotte tutte le quantità fondamentali necessarie alla descrizione del processo; nel seguito, poi, si svilupperà una espansione in *cluster connessi* che permette di dare una descrizione del processo comprensiva della FSI. A tale scopo è necessaria una funzione d'onda da utilizzare per la ψ_i che compare nella 1.1; si è visto che la forma semplice costruita sulla base di un modello a particelle indipendenti non è soddisfacente, ragione per cui si introducono delle *correlazioni binarie nello stato iniziale (ISC)* fra coppie di nucleoni. È possibile implementare tale funzione d'onda per lo stato fondamentale nell'ambito di uno sviluppo in cluster di particelle correlate NC (*number conserving*); l'introduzione di questa espansione è fatta nel capitolo 3 insieme alla descrizione di come con essa è possibile il calcolo di valori medi di operatori quantistici; nell'appendice B è mostrato nei dettagli come avviene tale derivazione, come darne una rappresentazione diagrammatica, verificarne la normalizzazione iniziale della funzione d'onda. Nel capitolo 4 calcoliamo infatti il valore dell'energia di legame del nucleo di ^4He con questo approccio, e la distribuzione di momento derivante da un sistema di particelle correlate. Infine, è introdotto un modello della FSI nell'ambitoo della stessa espansione in cluster connessi, utilizzato per il calcolo della trasparenza nucleare e della distribuzione di impulso nello stesso nucleo; l'ultima appendice descrive i *fattori di assorbimento*, propri dell'approccio alla FSI secondo lo scattering multiplo e che si possono reintrodurre nella trattazione secondo l'espansione in cluster connessi.

Quello che ci proponiamo con tale trattazione è di indagare circa il comportamento della serie ottenuta per le varie quantià in esame e la verifica dell'approccio al problema dell'interazione nello stato finale secondo il modello proposto. A tale scopo vogliamo costruire un programma per il calcolo delle quantità su descritte utilizzando un particolare metodo di integrazione numerica multidimensionale (*quasi random number*), alla quale si deve ricorrere per ottenere le quantità di interesse.

Come on, step inside
and you'll realize
(Korn)

Capitolo 2

Quantità fondamentali

2.1 Definizioni: distribuzioni di momento e di densità

Nel corso dell'esposizione verrà fatto uso di quantità proprie della fisica dei sistemi nucleari e dei sistemi a molti corpi in genere; è conveniente farne una breve panoramica per riferimenti successivi.

Quando si studia un sistema adronico con una sonda elettromagnetica la quantità direttamente misurabile non è la sezione d'urto; se si prende in considerazione il processo semi-inclusivo del capitolo 1, in cui un protone viene rivelato in coincidenza con l'elettrone diffuso, allora una osservabile è anche l'impulso del protone.
In generale, nal caso di diffusione su di una distribuzione di carica estesa, la sezione d'urto all'ordine più basso in QED è quella di Mott moltiplicata per il modulo quadro del *fattore di forma* elettrico:

$$F(\boldsymbol{q}) = \int d\boldsymbol{r} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \rho(\boldsymbol{r}) \ ,$$

che permette di accedere alla densità di carica elettrica del sistema mediante una trasformata di Fourier. Sebbene un sistema nucleare contenga neutroni, che non portano carica elettrica, non è difficile passare dalla distribuzione di carica elettrrica a quella di materia nucleare; grazie all'invarianza di carica delle forze nucleari le due si possono assumere proporzionali. Si può definire la densità ρ a partire da una funzione d'onda modello del sistema:

$$\rho(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1') = A \int \prod_{i=2}^{A} d\boldsymbol{r}_i \psi^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \psi(\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A) \ . \tag{2.1}$$

Quella che abbiamo appena scritto è la densità *ad un corpo non diagonale* i cui valori per $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1'$ forniscono la densità di materia; si noti che se si normalizza ad 1 la ψ si ottiene una densità normalizzata al numero di particelle. In analogia a quanto fatto nella 2.1 si possono introdurre densità dipendenti da 2 o più particelle;

in particolare la ρ_2:

$$\rho(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2) = \frac{A(A-1)}{2} \int \prod_{i=3}^{A} d\boldsymbol{r}_i \psi^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \psi(\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A) \tag{2.2}$$

soddisfa la relazione

$$\int d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}'_2 \ \rho(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2; \boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2) = \rho(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) \ .$$

Le definizioni date per le densità hanno chiaramente il la caratteristica di essere quantità dipendenti da poche variabili, avendo integrato via tutte le altre, rendendo cosí il problema trattabile dal punto di vista formale. La dipendenza dalle variabili relative ad un solo nucleone permette comunque di trattare quantità di rilevanza fisica; introduciamo infatti la distribuzione di momento di particella singola all'interno del nucleo come la densità definita nello spazio degli impulsi:

$$n(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3(A-1)}} \int \prod_{i=2}^{A} d\boldsymbol{k}_i \left| \hat{\psi}(\boldsymbol{k}_1, ..., \boldsymbol{k}_A) \right|^2 \ ,$$

essendo

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{k}_1, ..., \boldsymbol{k}_A) = \int \prod_{i=1}^{A} d\boldsymbol{r}_i e^{-i \sum_{i=1}^{A} \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}_i} \ \psi(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A)$$

la trasformata di Fourier $A-$dimensionale della funzione d'onda del sistema; ipotizzando particelle indipendenti, come si fa nel *modello a shell* discusso nel prossimo successivo e peraltro usato estensivamente, si giustifica

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) = \psi_1(\boldsymbol{r}_1) \cdot ... \cdot \psi_A(\boldsymbol{r}_A) \ ,$$

tutte normalizzate ad 1, ed utilizzando ripetutamente

$$\delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{k} \ e^{i\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)}$$

si ottiene facilmente l'utile relazione fra densità non diagonale e distribuzione di impulso:

$$n(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1 \ e^{i\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1)} \rho(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1) \tag{2.3}$$

che fornisce un unlteriore strumento di indagine delle proprietà nucleari. In particolare vedremo come la 2.3 sarà utile nello stabilire, con un approccio semi-fenomenologico, che tipo di interazione interviene fra i nucleoni nel mezzo nucleare e a quali artifici bisogna ricorrere per poter risalire all'impulso posseduto dal nucleone prima dell'interazione con la sonda. Si è infatti stabilto **??** che non è lecito utilizzare la cosiddetta *approssimazione impulsiva*, in cui il nucleone colpito viene viene assunto come libero per energie sufficientemente alte ovvero per tempi di interazione sufficientemente brevi, e secondo la quale il sistema residuo di $A-1$ particelle non fa che da spettatore: occorre invece tenere conto di una successiva interazione nello *stato finale* (FSI) che modifica gli impulsi misurati in un processo di tipo semi-inclusivo come quello mostrato in Fig.[??] in cui solo il nucleone espulso viene rivelato.

A questo punto dunque ha senso introdurre un'altra quantità che può dare una misura dell'entità della FSI in cui è incorso il nucleone in esame. Si chiama *trasparenza nucleare* la quantità adimensionale

$$T = \frac{A}{\int d\boldsymbol{k}\ n(\boldsymbol{k})} = \frac{A}{\int d\boldsymbol{r}\ \rho(\boldsymbol{r})} \tag{2.4}$$

Sarà tramite successive riformulazioni per la ρ che si potrà valutare la T e quindi le caratteristiche del modello utilizzato. Se riassumiamo nell'operatore $\hat{S}$ il contributo fornito al processo dalla FSI, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} n(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1 \prod_{k=2}^{A} d\boldsymbol{r}_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)} \psi_i^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \quad \cdot \\ \cdot\ S_i^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) S_i(\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A) \psi_i(\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A)\ ; \end{aligned}$$

che fornisce $T = 1$ nel caso in cui $\hat{S} = 1$ cioè se togliamo la distorsione indotta dalla FSI.

È utile, infine, introdurre degli operatori che permettano di calcolare le ρ ed n a partire dalla funzione d'onda; chiamando $\boldsymbol{r}_i$ *(*$\boldsymbol{r}'_i$*)* la coordinata del nucleone $i-$esimo prima *(dopo)* l'interazione iniziale, la densità è fornita dal valore di aspettazione dell'operatore

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{i=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) \prod_{j=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}'_j)$$

infatti

$$\begin{aligned} \langle \hat{\rho}_1 \rangle &= \int \prod_{k=1}^{A} d\boldsymbol{r}_k d\boldsymbol{r}'_k \psi^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \sum_{i=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) \prod_{j=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}'_j) \psi(\boldsymbol{r}'_1, ..., \boldsymbol{r}'_A) = \\ &= \int \prod_{k=1}^{A} d\boldsymbol{r}_k \psi^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \sum_{i=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) \psi(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) = \\ &= A \int \prod_{k=1}^{A} d\boldsymbol{r}_k \psi^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) \psi(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) = \\ &= A \int \prod_{k=2}^{A} d\boldsymbol{r}_k \psi^\star(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A) \psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A) \ = \ \rho(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

dove occorre ricordare che ψ è antisimmetrica per lo scambio di una coppia dei suoi argomenti, quale funzione d'onda di un sistema fermionico. Pertanto

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{i=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_1) \prod_{j=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}'_j - \boldsymbol{r}'_j)$$

è tale che

$$\langle \hat{\rho}_1 \rangle = \rho(\boldsymbol{r}_1)$$

Analogamente si deriva la densità non diagonale a due corpi, che è la parte diagonale della 2.2, come valore di aspettazione di

$$\hat{\rho}_2 = \sum_{i=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r}'_i - \boldsymbol{r}') \prod_{j>1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}'_j)$$

e la distribuzione di impulso da

$$\hat{\rho}_k = \sum_{i=1}^{A} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}'_i)} \prod_{j=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}'_j) \ .$$

Si noti che la distribuzione di impulso definita in 2.3 è leggibile come probabiltà di avere un nucleone con impulso nell'intervallo $[k, k+dk]$; analoga osservazione per $\rho(\boldsymbol{r})$ come probabiltà di posizione. Quindi ci si può riferire alle quantità

$$\int d\boldsymbol{k} \ k^2 \ n(\boldsymbol{k}) \tag{2.5}$$

$$\int d\boldsymbol{r} \ r^2 \ \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.6}$$

come ai momenti secondi delle due distribuzioni; in particolare 2.5 è proporzionale all'energia cinetica media $T_k = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ di un nucleone, mentre 2.6 definisce il raggio quadratico medio R^2_{ms}, $R_{ms} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$. Con le definizioni date in termini di operatori, si possono vedere le 2.5, 2.6 come casi particolari di espressioni del tipo

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O}_1 \rangle &= \int \prod_{k=1}^{A} d\boldsymbol{r}_k d\boldsymbol{r}'_k \ \psi^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \ O(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1)\psi(\boldsymbol{r}'_1, ..., \boldsymbol{r}'_A) = \\
&= \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1 \ \rho(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) \ O(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) \ ;
\end{aligned}$$

dato che $\hat{O}_1$ è un operatore ad 1 corpo, sarà scrivibile come

$$O(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) = O(\boldsymbol{r}_1)\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1)$$

pertanto

$$\langle \hat{O}_1 \rangle = \int d\boldsymbol{r}_1 \ \rho(\boldsymbol{r}_1) \ O(\boldsymbol{r}_1)$$

in cui, ad esempio, la 2.6 è ottenibile da

$$O(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) = r_1^2 \ \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1) \ .$$

2.2 Modelli nucleari

In questa parte descriviamo brevemente i possibili approcci al problema della descrizione di un sistema a molti corpi; in ognuno dei casi l'analisi è sempre volta a dare una espressione per la densità diagonale ad un corpo e la relativa distribuzione di momento, secondo la 2.3.
È bene precisare che in ognuno di questi tipi di approccio il nucleo atomico è trattato in teoria quantistica non relativistica, e le caratteristiche note delle interazioni nucleari (*range* ed entità dell'interazione, saturazione, ecc..) vengono tenute in conto solo dal punto di vista fenomenologico. Il nucleo qui è modellizzato come un sistema di fermioni; non interagenti nella trattazione a gas di Fermi, immersi in un campo medio confinante, negli altri.

2.2.1 Modello a gas di Fermi

Un modello nucleare si può ottenere semplicemente prendendo come funzione d'onda del sistema di A fermioni il prodotto antisimmetrizzato di autofunzioni di particella singola; assumendo le particelle non interagenti e confinate in un volume V tali funzioni sono semplicemente

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \quad . \tag{2.7}$$

Le quanità che ci interessano si possono poi dedurre secondo le definizioni del Cap. 1, che i $\boldsymbol{k}$ che compaiono nella 2.7 possono, nel gas di Fermi, assumere solamente valori tali che $k < k_F$, e che i livelli energetici relativi sono tutti degeneri quattro volte per effetto dell'esistenza, oltre che dello *spin*=$\frac{1}{2}$ di ogni fermione, anche dell'*isospin*, variabile discreta a due valori che distingue protoni e neutroni una volta introdotta la dicitura di *nucleoni* per entrambi. Si deducono, da queste premesse, la classica distribuzione di momento a gradino valida per il gas di Fermi e, più in generale, caratteristica del mezzo nucleare esteso di densità costante.
Introdotta quindi la

$$\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{4}{V}\sum_{k<k_F} \; e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})} \quad ,$$

con la sostituzione

$$\frac{1}{V}\sum_{k<k_F} \quad \to \quad \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k<k_F}$$

deduciamo secondo le definizioni la densità e la distribuzione di momento:

$$\rho(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}') = \frac{16\pi k_F^3}{3(2\pi)^3} \equiv \rho_0 \ ;$$

$$n(\boldsymbol{k}) = 4V\theta(k_F - k) \ .$$

2.2.2 Modello a shell

Un campo medio in cui immaginiamo immersi i nucleoni si introduce con la seguente operazione sulla Hamiltoniana di un sistema in cui l'interazione fra la coppia di particelle i, j è descritta da v_{ij}:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_i \hat{T}_i + \sum_{i<j} \hat{v}_{ij} = \\ &= \left(\sum_i \hat{T}_i + \sum_i \hat{V}_i\right) + \left(\sum_{i<j} \hat{v}_{ij} - \sum_i \hat{V}_i\right) = \\ &= \hat{H}_0 + \hat{V}_1 \ ; \end{aligned}$$

ottenendo cosí una $\hat{H}_0$ separabile nella equazione $i-$esima, cosa che dà la possibilità di risolvere un problema ad un corpo per poi scrivere ancora la funzione d'onda totale come determinante di Slater; quindi, campo medio $\hat{V}_i$ va scelto in modo da poter trascurare $\hat{V}_1$ nell'equazione di Schroedinger.

Le forme di $\hat{V}_i$ più usate sono quella di buca sferica, potenziale di oscillatore armonico, potenziale alla Saxon-Woods consistente di un miglioramento di quello di oscillatore armonico che, a grande distanze, è sicuramente non realistico dato che prevede interazione fino ad $r \to \infty$; quindi, sostanzialmente, lo si sostituisce con una buca di potenziale di circa la stessa forma e rapidamente tendente ad una costante.

Il modello a shell quindi consiste nell'avere funzioni d'onda di particella singola dalla soluzione di

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{r_i} + V(\boldsymbol{r}_i)\right)\varphi_{\alpha_i}(\boldsymbol{r}_i) = \epsilon_i \varphi_{\alpha_i}(\boldsymbol{r}_i) \ ;$$

per tutti e tre i potenziali suggeriti abbiamo simmetria sferica, il che come sappiamo dà luogo a soluzioni del tipo

$$\varphi_{\alpha_i}(\boldsymbol{r}_i) = \chi_{n_i l_i}(r_i) Y_{l_i m_i}(\theta_i, \phi_i) \ ,$$

con α tutti i numeri quantici spaziali. In questo modo abbiamo la possibilità di classificare gli stati di un nucleone con la notazione spettroscopica e di sistemare i nucleoni sui vari orbitali in maniera analoga a quanto si fa per gli elettroni atomici, costituendo quindi gli strati o *shell*. Le predizioni del modello a shell (SM) sono ben note in fisica nucleare; le principali caratteristiche sono che, con potenziali di oscillatore armonico, si riproduce bene il caratteristico andamento dell'energia di legame/nucleone in funzione del numero atomico. Vedremo inoltre in seguito come è possibile rendere quantitativo il modello applicando delle modifiche allo stadio della costruzione della funzione d'onda di A particelle; modifiche, tolte le quali, ci si riduce al caso si SM. In particolare si vedrà che lo SM cosí com'è risulta inadeguato per la deduzione della distribuzione di impulso di un nucleone nel mezzo nucleare, essendo incapace di rendere conto dell'esistenza di impulsi sopra una certa soglia. Questo è dovuto essenzialmente al fatto che in questo approccio i nucleoni sono incapaci di avvicinarsi sotto una certa distanza, visto che sono confinati nella loro buca di potenziale $V(\boldsymbol{r})$; questo fa sí che l'introduzione di correlazioni a corto raggio dia conto della deficienza di $n(\boldsymbol{k})$ ad alto impulso.

2.2.3 Campo autoconsistente

In questo caso gli orbitali da usare nella costruzione di

$$\phi_A(\{\boldsymbol{r}\}) = \frac{1}{\sqrt{A!}}\ det\ \{\psi_i(r_j)\} \tag{2.8}$$

si costruiscono per via variazionale. Scelto un set ortonormale ψ_i di funzioni di prova di particella singola, della quale trascuriamo ora ulteriori gradi di libertà interni, si calcola il valore medio sullo stato 2.8 della Hamiltoniana effettiva

$$\langle\phi|\left(\sum_i \hat{T}_i + \sum_{i<j}\hat{v}_{ij}\right)|\phi\rangle =$$

$$= \sum_i \langle\psi_i|\hat{T}_1|\psi_i\rangle + \sum_{i<j}\langle\psi_i\psi_j|\hat{v}_{12}|\psi_i\psi_j - \psi_j\psi_i\rangle \ .$$

Ci avvarremo ora del noto risulato secondo il quale è possibile stabilire un limite superiore per l'autovalore dello stato fondamentale dell'Hamiltoniana di un sistema in maniera variazionale, utilizzando una funzione di prova dipendente da un opportuno numero di parametri variabili. Introducendo dei moltiplicatori λ_{ij} ed utilizzando la condizione di ortogonalità delle funzioni di prova si può imporre la condizione di stazionarietà:

$$\sum_i \langle \delta\psi_i | \hat{T}_1 | \psi_i \rangle + \sum_{i<j} \langle \delta\psi_i \psi_j | \hat{v}_{12} | \psi_i \psi_j - \psi_j \psi_i \rangle - \sum_i \lambda_{ij} \langle \delta\psi_i | \psi_j \rangle = 0 \ , \ \forall \ \delta\psi_i$$

da cui

$$\hat{T}_1 \psi_i(\boldsymbol{r_1}) + \sum_j \int d\boldsymbol{r_2} \psi_j^\star(\boldsymbol{r_2}) \hat{v}_{12} \psi_j(\boldsymbol{r_2}) \psi_i(\boldsymbol{r_1}) - \sum_j \int d\boldsymbol{r_2} \psi_j^\star(\boldsymbol{r_2}) \hat{v}_{12} \psi_j(\boldsymbol{r_1}) \psi_i(\boldsymbol{r_2}) =$$

$$= \sum_j \lambda_{ij} \psi_j(\boldsymbol{r_1}) \ ;$$

a questo punto si può diagonalizzare, il che fa sí che

$$\psi_i \quad \rightarrow \quad \varphi_i \qquad ; \qquad \sum_{ij} \quad \rightarrow \quad \epsilon_i \delta_{ij}$$

e quindi abbiamo ottenuto l'equazione di *Hartree-fock*

$$\hat{T}_1 \varphi_i(\boldsymbol{r}_1) + \sum_j \int d\boldsymbol{r}_2 \varphi_j^\star(\boldsymbol{r}_2) \hat{v}_{12} \varphi_j(\boldsymbol{r}_2) \varphi_i(\boldsymbol{r}_1) - \sum_j \int d\boldsymbol{r}_2 \varphi_j^\star(\boldsymbol{r}_2) \hat{v}_{12} \varphi_j(\boldsymbol{r}_1) \varphi_i(\boldsymbol{r}_2) =$$

$$= \epsilon_i \varphi_i(\boldsymbol{r}_1) \ . \tag{2.9}$$

La 2.9 va riletta nella forma

$$\hat{T}_1 \varphi_i(\boldsymbol{r}_1) + \hat{V}_H(\boldsymbol{r}_1) \varphi(\boldsymbol{r}_1) - \int d\boldsymbol{r}_2 \varphi r_2 \hat{V}_F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$$

in cui

$$\hat{V}_H(\boldsymbol{r}_1) = \sum_j \int d\boldsymbol{r}_2 \varphi_j^\star(\boldsymbol{r}_2) \hat{v}_{12} \varphi_j(\boldsymbol{r}_2) \ ,$$

e

$$\hat{V}_F(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2) = \sum_j \varphi_j^\star(\boldsymbol{r}_2) \hat{v}_{12} \varphi_i(\boldsymbol{r}_2)$$

che sono due potenziali, rispettivamente, locali e non locali, da intendere come campi medi sentiti dal nucleone identificato con $\boldsymbol{r}_1$. Gli orbitali da utilizzare possono quindi essere ottenuti in maniera autoconsistente nel senso che dopo una prima minimizzazione di $\langle \hat{H} \rangle$, si ha una nuova espressione per il potenziale da usare in $\hat{H}$ stessa.

Possiamo commentare il contenuto degli ultimi due paragrafi osservando che, mentre la trattazione alla H-F ha bisogno di complicati e ulteriori sviluppi per poter essere utilizzata, il modello a shell nucleare presenta il vantaggio di essere molto semplice nelle applicazioni, ed è quello nell'ambito del quale si svolgono solitamente ulteriori sviluppi; come già precisato sarà quello che ci permetterà di tenere nel giusto conto lo scattering multiplo, che discutiamo nell'utlima sezione del capitolo.

2.3 Funzioni d'onda correlate

Una funzione di correlazione si introduce per ognuna delle coppie di nucleoni presenti, in modo da far dipendere il comportamento di ogni nucleone dai suoi vicini; tali funzioni sono a corto raggio d'azione, tipicamente si annullano esponenzialmente con la distanza fra i due nucleoni, con un parametro di circa 2 *fm*. Questo si fa per compensare la non conoscenza esatta dell'interazione fra nucleoni; un residuo della trattazione a scambio di mesoni come mediatori dell'interazione forte rimane nel potenziale di interazione a grandi distanze, per il quale si usa un andamento di tipo Yukawa, ma la presenza di un *hard core* rende impossibile una trattazione altrettanto precisa a brevi distanze, tanto meno l'uso di tecniche perturbative. Il fatto che la descrizione a particelle indipendenti non è soddisfacente soprattutto alle brevi distanze lo si vede bene analizzando la distribuzione di momento dei nucleoni ricavata sulla base di tale assunzione: benchè si avvicini a quella attesa a piccoli k, fallisce già per $k \sim 2fm^{-1}$.
Questo effetto verrà evidenziato nel capitolo successivo, quando si sarà sviluppato un metodo per calcolare la distribuzione di momento nel caso di un sistema correlato. Dunque, sebbene nell'uso di un campo medio in cui sia immerso il nucleone si tenga conto in media di tutti gli effetti dei campi reali, il passo successivo dopo la trattazione a particelle indipendenti in un modello a gas di Fermi, nella materia nucleare estesa, o di modello a shell o in un campo autoconsistente alla Hartree-Fock, nel caso di nuclei finiti, è quello di usare funzioni d'onda correlate.

In generale, dunque, si ha a che fare con un operatore $\hat{F}(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A)$ che introduce le correlazioni fra particelle; in questo modo non solo fra le singole coppie ma anche fra cluster di più particelle. In tal caso, l'espressione della matrice densità non diagonale assume la forma:

$$\rho_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) = \int \prod_{j=2}^{A} d\boldsymbol{r}_j \psi^\star(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \hat{F}^\dagger(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \hat{F}(\boldsymbol{r}'_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \psi(\boldsymbol{r}'_1, ..., \boldsymbol{r}_A) \quad (2.10)$$

espressione, questa, del tutto formale finchè non si specifichi la forma e le caratteristiche delle correlazioni che si vogliono far intervenire; ciò che si deve rispettare è l'assunzione che le interazioni così introdotte per i nucleoni si annullino in un raggio di pochissimi *fm* (correlazioni a corto raggio, SRC). Tipicamente, quello che si fa variare è il comportamento attrattivo/repulsivo a corto raggio. Ulteriori dettagli sono discussi in ciò che segue.

2.3.1 Correlazioni tipo Jastrow

La funzione d'onda di Jastrow **??** è il modo più semplice di introdurre una funzione d'onda per un sistema correlato a molti corpi. Scriviamo:

$$\psi\left(\{\boldsymbol{x}_i\}\right) = \left(\hat{S} \prod_{i<j} f(ij)\right) \phi(\{\boldsymbol{x}_i\}) \quad (2.11)$$

nella quale $\hat{S}$ è un operatore di simmetrizzazione e $\{\boldsymbol{r}_i\}$ sta ad indicare l'insieme $\boldsymbol{x}_i ... \boldsymbol{x}_A$, mentre le $f(ij)$ sono le funzioni di correlazione; ϕ è totalmente antisimmetrica. Si tenga presente che questa assunzione tiene conto, oltre che delle correlazioni formalmente introdotte con le f, anche del principio di Pauli tramite l'antisimmetria; ci si riferisce a questa caratteristica come *correlazioni di Pauli*. Queste nel caso più semplice dipendono solo dalla distanza $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ ed hanno la forma:

$$f(r_{ij}) = \sum_k \gamma_k e^{-a_k r_{ij}{}^2} \quad . \tag{2.12}$$

La scelta dei parametri si fa per via variazionale; per non avere solo un cambiamento nella normalizzazione della funzione d'onda, o un cambiamento del parametro dell'oscillatore armonico, devono essere contemporaneamente $\gamma_i = 1$ ed $a_i = 0$, almeno peer un indice i; una scelta fatta spesso è $f(ij) = 1 - \gamma exp^{-ar_{ij}{}^2}$.
Nel caso più realistico invece si fanno intervenire correlazioni dipendenti dagli stati di spin, isospin e momento angolare dei due nucleoni; nella:

$$f(r_{ij}) = \sum_{n=1}^{6} f_n(r_{ij})\hat{O}_n(ij)$$

con

$$\hat{O}_n(ij) = [1, \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j, S_{ij}] \otimes [1, \boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j]$$

Ognuno degli $\hat{O}_n(ij)$ è costruito sulla base della conoscenza delle forze nucleari, infatti anche per il potenziale $v(ij)$ che interviene nell' Hamiltoniana si può usare la stessa dipendenza operatoriale. Questi operatori devono rispettare le condizioni usuali di hermitianetà, simmetria per scambio di coordinate, invarianza sotto rotazioni, riflessioni spaziali e temporali, trasformazioni galileiane di velocità e invarianza sotto rotazioni nello spazio di isospin per tenere conto dell'indipendenza dalla carica delle forze nucleari. I termini non centrali sono quelli contenenti S_{ij}, l'operatore tensoriale, che dipende dall'orientazione relativa degli spin:

$$S_{ij} = 3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{r}_j)(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{r}_j)}{r_j^2} - \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \quad .$$

Nel caso più generale, poi, esistono dei termini a carattere non locale che tengono conto della dipendenza di spin-orbita, cioè:

$$f_7(r_{ij})\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$$

$$f_8(r_{ij})(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S})(\boldsymbol{\tau}_i \cdot \boldsymbol{\tau}_j)$$

Comunque, ai fini pratici, è stato evidenziato che i contributi significativi sono quelli derivanti dai termini $n = 1, 4, 6$ della sommatoria che definisce le correlazioni [**?**]. Nel prossimo capitolo vedremo qual è l'effetto dell'inclusione delle correlazioni in alcune quantità quali le densità e distribuzioni di momento rispetto al caso del modello a particelle indipendenti.
Ai fini dei calcoli, quando si usa anche un potenziale con la stessa dipendenza operatoriale, intervengono prodotti fra più operatori fra quelli descritti e quindi è molto utile la proprietà dell'insieme degli $\hat{O}_n$ di essere chiuso rispetto alla composizione, ovvero:

$$\hat{O}_n(ij)\hat{O}_m(ij) = \sum_p K^n_{pm}\hat{O}_p(ij)$$

dove le K^n_{pm} sono opportune matrici 6×6.
A questo punto è opportuno puntualizzare che l'approccio alla Jastrow per l'introduzione di correlazioni nello stato fondamentale di un sistema nucleare non è

certamente il più soddisfacente; come è dimostrato in **??**. Oltre a dover tenere nella giusta considerazione accanto ai contributi delle correlazioni centrali tutti quegli altri descritti, già nell'approccio alla Jastrow è necessario in generale scegliere con cura il tipo do correlazione da utilizzare. Anche volendo usare solo i termini descritti in 2.12, in dipendenza dal potenziale utilizzato è necessario che le correlazioni siano scelte in modo che abbiano un *overshooting* tale da creare correlazione repulsiva a corto raggio se per esempio si ha un potenziale tipo *soft core* come quello che useremo nel nostro caso, oppure che abbiano un comportamento *ad hoc* alle distanze intermedie in modo da compensare deficienze nella funzione d'onda modello che si sta utilizzando. Come discusso brevemente in **??** e **??**, l'approccio migliore per ottenere

Figura 2.1 – *Funzioni di correlazione del tipo 2.12; in basso ed in alto* $1-\gamma e^{-ar^2}$, *per i due casi di correlazione con hard core e non; al centro* $1+\gamma_1 e^{-ar^2}+\gamma_2 e^{-br^2}$, *per l'andamento più realistico.*

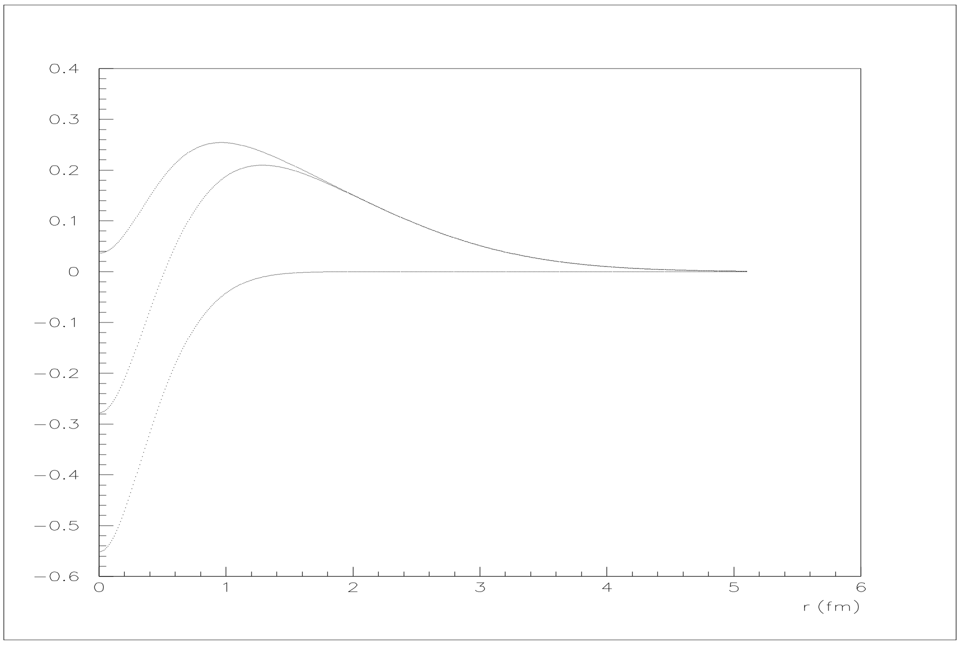


Tabella 2.1: I valori dei parametri utilizzati nelle funzioni di Fig. 1; sono anche quelli che verranno utilizzati nelle figure alla fine del prossimo capitolo.

	γ_1	γ_2	a	b
hard core	1.0	0.0	2.8	0.0
realistico	-1.56	-1.09	1.602	0.240
soft core	0.7191	0.0	-2.0502	0.0

una funzione d'onda è di tipo variazionale sul valore di aspettazione dell'energia, in cui vengono distinti i contributi di correlazione nella forma $\psi_{real}(\{x_i\}) = \hat{F}\phi(\{x_i\})$. In $\hat{F}$ sono ancora contenuti termini di correlazione del tipo a due corpi, e in ϕ c'è la dipendenza da variabili spaziali e discrete. Tuttavia in questo approccio si tiene conto in modo realistico di correlazioni dipendenti dallo stato dei nucleoni, e di contributi alla parte spaziale derivanti non più semplicemente da prodotti di gaussiane, e questo permette di arrivare alla migliore forma attualmente disponibile di funzione d'onda per un sistema correlato, in termini di energia di legame e raggio quadratico medio. Il motivo per cui quindi si usa una funzione modello molto più semplice risiede nella possibilità di avere una espressione semplice per effettuare calcoli in maniera analitica, in modo da poter testare la bontà di una certa approssimazione o di un certo calcolo numerico con il valore esatto fornito dal modello ipotizzato. È questo essenzialmente quello vedremo nel Cap.3, dove questo tipo di approccio ci permetterà prima di avere un'idea di che tipo di convergenza ha l'espansione in cluster che si adotta per il calcolo dell'energia di un sistema, poi di allargare il modello per poter includere nella trattazzione l'interazione nello stato finale del processo di diffusione semi inclusiva $^4He(e, e'p)X$.

Concludiamo questa sezione, quindi, con l'epsressione del valore medio di un operatore quantistico $\hat{O}$ calcolato sullo stato fondamentale di un dato sistema costruito sulla base dell'ipotesi di Jastrow 2.11. Risulta:

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\langle \phi_0 \hat{F}^\dagger \hat{O} \hat{O} \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 \hat{F}^2 \phi_0 \rangle} \ . \tag{2.13}$$

2.4 Sezione d'urto nucleone-nucleone

La conoscenza della interazione nucleone-nucleoneè importante per più di un motivo, sia per la costruzione di una funzione d'onda correlata, sia per l'introduzione della FSI.
Gli esperimenti che danno la possibilità di ottenere queste informazioni sono principalmente gli urti $p-H$ e $p-D$; il caso del nucleo di deuterio permette di accedere al processo $p-n$ una volta isolato il contributo di $p-p$, che invece si ha con il nucleo di idrogeno; si ricorre a questo metodo visto che non disponiamo di neutroni liberi.
Nella costruzione di una funzione d'onda correlata le informazioni sull'interazione $N-N$ sono contenute, appunto, nelle funzioni di correlazione; invece la FSI si fa dipendere dallo scattering multiplo, trattato nell'ambito della teoria di Glauber, di un protone sugli altri nucleoni. La sezione d'urto di questi processi entra direttamente nella definizione degli operatori dell'interazione nello stato finale, come mostrato nel paragrafo successivo e nella Appendice C.
Nelle figure che seguono è mostrato l'andamento delle sezioni d'urto fra nucleoni, nelle diverse combinazioni. Per confronto si ricordi che, ad esempio, la sezione d'urto del processo $\gamma - N$ è di circa due ordini di grandezza inferiore della corrsipondente $N-N$, a testimonianza della maggiore intensità dell'interazione forte, tra nuceloni, rispetto a quella elettromagnetica fra fotone e protone.

2.5 Scattering multiplo

Per una particella incidente su un bersaglio fisso puntiforme, abbiamo la nota espressione della sezione d'urto in funzione dell'ampiezza di scattering del processo di diffusione in cui il potenziale di interazione abbia simmetria sferica:

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$$

Usando un approccio alla Green , ovvero utilizzando la

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{2m}{\hbar^2}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{2.14}$$

vogliamo una soluzione dell'equazione di Schroedinger tridimensionale

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \psi(\boldsymbol{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) \tag{2.15}$$

che abbia il seguente comportamento asintotico:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}' e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} V(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}') \ ,$$

dalla quale otterremo l'ampiezza di scattering elastico, che è il punto di partenza per la trattazione dello scattering multiplo:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}' e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} V(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}') \ . \tag{2.16}$$

Si possono introdurre le basi della teoria passando per la descrizione di un problema di scattering unidimensionale, in cui il proiettile può solamente o non essere deflesso o tornare indietro. In questo caso ci serve una soluzione dell'equazione integrale unidimensionale

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int dx' G(x, x')V(x')\psi(x')$$

dove la dipendenza in (x, x') della funzione di Green si può porre nella forma $x - x'$. Prendendo una soluzione della 2.14 della forma

$$G(x - x') = -\frac{i}{\hbar v}\frac{e^{ik|x-x'|}}{|x - x'|}$$

e una funzione d'onda nella forma fattorizzata del tipo

$$\psi(x) = e^{ikx}\varphi(x) \ , \tag{2.17}$$

in cui la φ è una funzione lentamente variabile del suo argomento su distanze dell'ordine della lunghezza di De Broglie della particella incidente, troviamo, imponendo la 2.17 nella 2.15:

$$\frac{d\varphi}{dx} \simeq -\frac{i}{\hbar v}V(x)\varphi(x) \ ,$$

quindi, richiedendo che per $x \to -\infty$ si riottenga una ψ tipo onda piana:

$$\varphi(x) \simeq exp\left(-\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{x} dx' V(x')\right)$$

dove abbiamo trascurato il contributo di scattering indietro grazie all'approssimazione menzionata su φ, ovvero un termine

$$-\frac{i}{\hbar v}\int_x^\infty dx' e^{2ik(x-x')}V(x')\varphi(x')$$

nell'esponenziale; si noti nella 2.17 l'analogo con l'ottica ondulatoria, in cui l'onda che attraversa un mezzo dispersivo viene sfasata.
La richiesta che si sta facendo è quindi: se d è il range del potenziale, deve essere $kd \gg 1$ per la particella incidente; inoltre dalla 2.17 segue:

$$k \gg \frac{V}{\hbar v} \quad \rightarrow \quad \frac{V}{E} \ll 1 \ .$$

Abbiamo dunque ottenuto una espressione per φ che ci permette di scrivere la funzione d'onda per lo scattering in avanti di un proiettile di alta energia da parte del potenziale $V(x)$ come

$$\psi(x) = e^{ikx - \frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^x dx' V(x')}$$

con la condizione al contorno $\varphi(-\infty) = 1$. Ora si può fare un passo avanti verso il caso tridimensionale, per il quale cerchiamo una soluzione della forma

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\varphi(\boldsymbol{r})$$

e, con passaggi simili al caso unidimensionale, prendendo $\boldsymbol{k}$ lungo la direzione dell'asse z, otteniamo:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{ikz - \frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^z dz' V(x,y,z')} \tag{2.18}$$

valida per piccoli angoli, nella zona di interazione, cioè $r \approx d$. Per vedere quali sono le restrizioni poste dalla derivazione della 2.18 considerariamo la situazione rappresentata nella Fig. 2.2. Si vede che quando il momento trasferito è piccolo, possiamo assumere che esso non abbia componente lungo la direzione z; così l'ampiezza di scattering 2.16 diventa:

$$f(q) = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\boldsymbol{b} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\ V(b^2+z^2)\ e^{-\frac{im}{k\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\ \ V(b^2+z'^2)}\ ;$$

integrando in z, ovvero calcolando:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} dz\ V(b^2+z^2)\ e^{-\frac{im}{k\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\ \ V(b^2+z'^2)} = \\
&= -\frac{\hbar^2 k}{im}\int_{-\infty}^{+\infty} d\left(e^{-\frac{im}{k\hbar^2}\int_{-\infty}^{x} dz' V(b^2+z'^2)}\right) = \\
&= -\frac{\hbar^2 k}{im}\left(e^{\frac{i}{2k}\int_{-\infty}^{+\infty} dz' V(b^2+z'^2)} - 1\right) = \\
&= -\frac{2\hbar^2 k}{im}\left(e^{2i\chi(\boldsymbol{b})} - 1\right) = \\
&= \frac{ik\hbar^2}{m}\Gamma(\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

con la quale abbiamo definito il *phase-shift* χ

$$\chi(\boldsymbol{b}) = -\frac{1}{4k}\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\, V(b^2+z'^2)$$

e la cosiddetta *funzione profilo* Γ

$$\Gamma(\boldsymbol{b}) = 1 - e^{2i\chi(\boldsymbol{b})}$$

ottendo così

$$f(\boldsymbol{q}) = \frac{ik}{2\pi}\int d^2\boldsymbol{b}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}\left(e^{2i\chi(\boldsymbol{b})} - 1\right) \quad . \tag{2.19}$$

Ora si può introdurre lo scattering multiplo semplicemente indicando con $i = 1...A$ le particelle del bersaglio, ora non più puntiforme, cosicchè il potenziale di interazione è

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{A} V(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$$

e, ipotizzando scattering successivi, l'effetto dell' $i-$esimo essendo l'introduzione di un phase-shift

$$e^{i\chi_i(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}_i)} \quad ,$$

abbiamo finalmente la funzione profilo contenente i contributi di eventuali scattering ripetuti:

$$\Gamma(\boldsymbol{b};\{\boldsymbol{r}_j\}) = 1 - e^{2i\sum_j \chi_j(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_j)} \quad .$$

Questa può essere espansa, in modo da avere la possibilità di includere nel risultato finale tutti i contributi desiderati di $0, 1, 2, ..., A$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\Gamma &= 1 - \prod_j (1 - \Gamma(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_j)) = \\ &= \sum_{j=1}^{A} \Gamma_j + \sum_{i<j}^{A} \Gamma_i \Gamma_j + ...\end{aligned}$$

dove l'aver posto $i < j$ preclude la possibilità da parte della particella $i-$esima di essere colpita una seconda volta. Ora, questa espansione è l'approccio usuale al problema dello scattering multiplo; nella trattazione di una interazione del tipo $A(e,e'n)X$ lo scattering multiplo è quello in cui incorre il nucleone colpito dall'elettrone, prima di uscire definitivamente dal nucleo. Nella trattazione della FSI nell'ambito della *linked cluster expansion* che verrà presentata si mostrerà come, anziché usare l'espansione di cui qui sopra, si può tenere conto dell'intera espressione della Γ, utilizzando i seguenti ulteriori sviluppi.
Poichè stiamo trattando un bersaglio composto, dobbiamo includere il suo stato interno nel nostro formalismo; ovvero, riscrivere la 2.17 in questo modo:

$$\psi_{k,i}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\varphi(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A)$$

in cui ψ_i rappresenta lo stato iniziale del bersaglio; $\boldsymbol{r}$ è ancora la coordinata del proiettile. Si noti che stiamo trattando i componenti del bersaglio come se fossero immobili durante l'interazione, quindi non c'è dipendenza temporale nella ψ_i; questa assunzione risulta verificata per le energie solitamente utilizzate per i proiettili. Siamo dunque arrivati alla seguente forma per l'ampiezza di scattering:

$$f_{fi}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A) =$$

$$= \frac{ik}{2\pi}\int d^2\boldsymbol{b}\ e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}\int\prod_j d\boldsymbol{r}_j e^{i\boldsymbol{p}_m\cdot\boldsymbol{r}_1}\psi_f^\star(\boldsymbol{r}_2,...,\boldsymbol{r}_A)\Gamma(\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_A)\psi_i(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A)$$
$$= \frac{ik}{2\pi}\int d^2\boldsymbol{b}\ e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}}\ \langle f|\hat{S}|i\rangle$$

con

$$\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{r}_i - \hat{k}(\hat{k}\cdot\boldsymbol{q})\ .$$

Pertanto, abbiamo espresso l'elemento di matrice del processo di scattering in cui un nucleone viene estratto dal sistema iniziale A come:

$$\langle f|\hat{S}|i\rangle = \int\prod_j d\boldsymbol{r}_j e^{i\boldsymbol{p}_m\cdot\boldsymbol{r}_1}\psi_f^\star(\boldsymbol{r}_2,...,\boldsymbol{r}_A)\hat{S}(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A)\psi_i(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A) \tag{2.20}$$

oppure, utilizzando la relazione di completezza per la funzione d'onda del sistema residuo:

$$\sum_f\ \psi_f^\star(\boldsymbol{r}_2,...,\boldsymbol{r}_A)\psi_f(\boldsymbol{r}'_2,...,\boldsymbol{r}'_A) = \prod_{i=2}^{A}\ \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}'_i)$$

si ha direttamente la probabilità di avere in seguito all'interazione uno stato a $\boldsymbol{p}_m$; in altre parole, la distribuzione di *momento mancante* $\boldsymbol{p}_m$:

$$\sum_f\ \left|\langle f|\hat{S}|i\rangle\right|^2 = \tag{2.21}$$

$$= \int\prod_{i=1}^{A}\ d\boldsymbol{r}_i d\boldsymbol{r}'_i\ e^{i\boldsymbol{p}_m\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)}\ \hat{S}^\dagger(\boldsymbol{r}'_1,...,\boldsymbol{r}'_A)\hat{S}(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A)\ \cdot$$
$$\cdot\ \psi_i^\star(\boldsymbol{r}'_1,...,\boldsymbol{r}'_A)\psi_i^\star(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A)\prod_{j=2}^{A}\ \delta(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}'_j) =$$
$$= \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1\ e^{i\boldsymbol{p}_m\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)}\ \prod_{i=2}^{A}\ d\boldsymbol{r}_i\ \hat{S}^\dagger(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}_2,...,\boldsymbol{r}_A)\hat{S}(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A)\ \cdot$$
$$\cdot\ \psi_i^\star(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}_2,...,\boldsymbol{r}_A)\psi_i(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A)\ ;$$

si osservi, in particolare, che nel caso in cui non teniamo conto di interazioni nello stato finale la matrice $\hat{S}$ del processo si riduce all'identità e si riottiene la distribuzione di momento non distorta, che è proporzionale a:

$$\sum_f\ \left|\langle f|\hat{S}|i\rangle\right|^2 =$$

$$= \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1\ e^{i\boldsymbol{p}_m\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)}\int\prod_{j=2}^{A} d\boldsymbol{r}_j\ \psi_i^\star(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}_2,...,\boldsymbol{r}_A)\psi_i(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A)$$
$$= \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1\ e^{i\boldsymbol{p}_m\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}'_1)}\ \rho_0(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)\ .$$

Sappiamo allora che tutta l'informazione sullo scattering multiplo, cioè sulla FSI, è contenuta nell'operatore $\hat{S}$, che riscriviamo:

$$S(\boldsymbol{r}_1,...,\boldsymbol{r}_A) = 1 - \Gamma(\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_A) = \prod_{j=2}^{A}(1 - \theta(z_j - z_1)\Gamma(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_j)) \tag{2.22}$$

in cui imponiamo che il nucleone colpito possa reintereragire solo con le particelle che si trovano più avanti, nella direzione z, per mezzo della θ.

La nuova quantità introdotta $\boldsymbol{p}_m$ prende il nome di *momento mancante*, definito dalla differenza $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$, che differisce dal momento $\boldsymbol{p}'$ del nucleone appena colpito per effetto della FSI, come illustrato in Fig. 1.3.

Figura 2.2 – *Sezione d'urto totale ed elastica per le collisioni pp e $\bar{p}p$ in funzione dell'impulso del fascio incidente nel riferimento del laboratorio e dell'energia totale nel centro di massa. (COMPAS Group, IHEP, Protvino, Russia, Aprile 1998)*

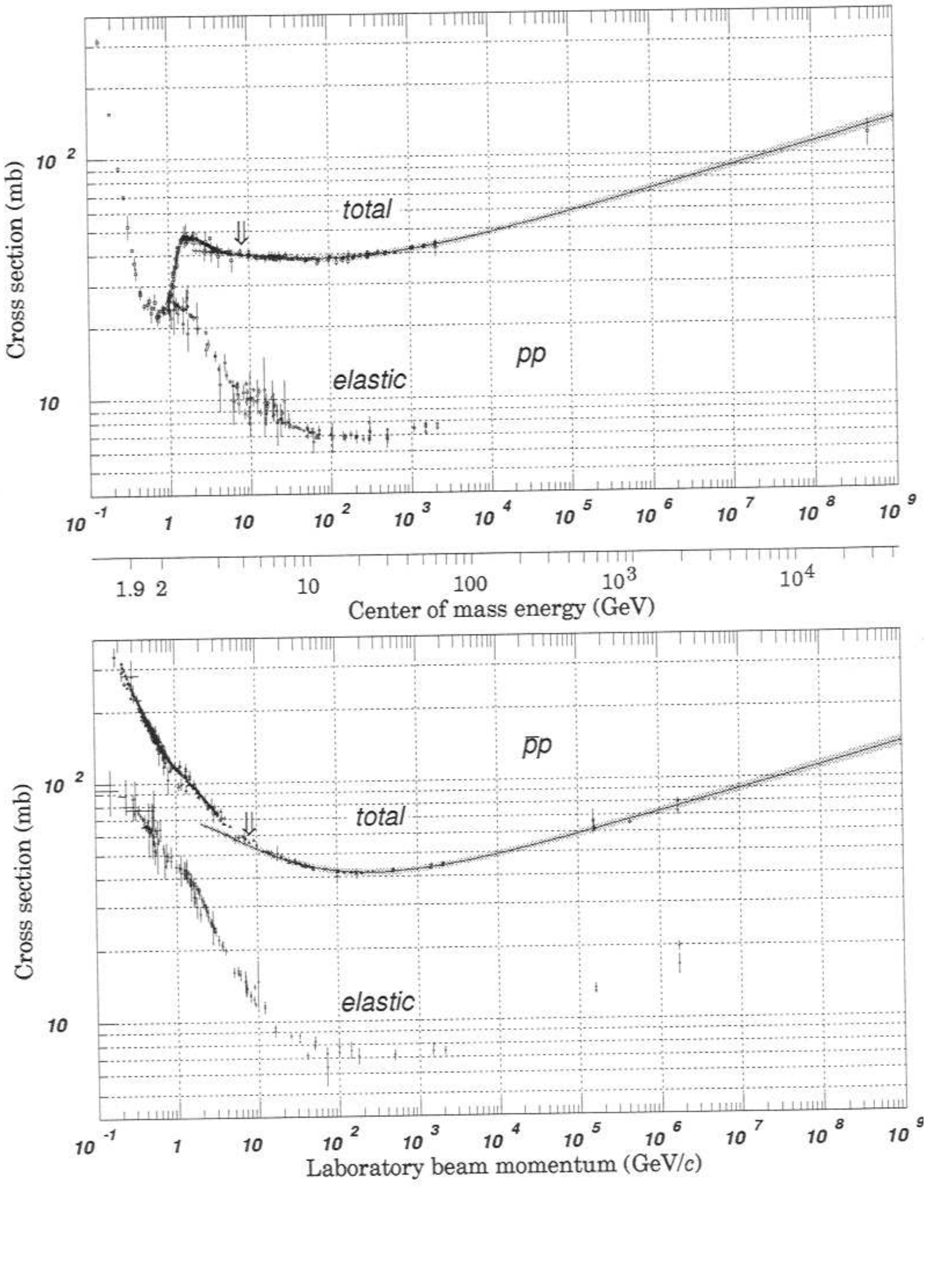


Figura 2.3 – *Sezione d'urto totale ed elastica per le collisioni pd (solo totale), np e $\bar{p}d$ (solo totale) in funzione dell'impulso del fascio incidente nel riferimento del laboratorio e dell'energia totale nel centro di massa. (COMPAS Group, IHEP, Protvino, Russia, Aprile 1998)*

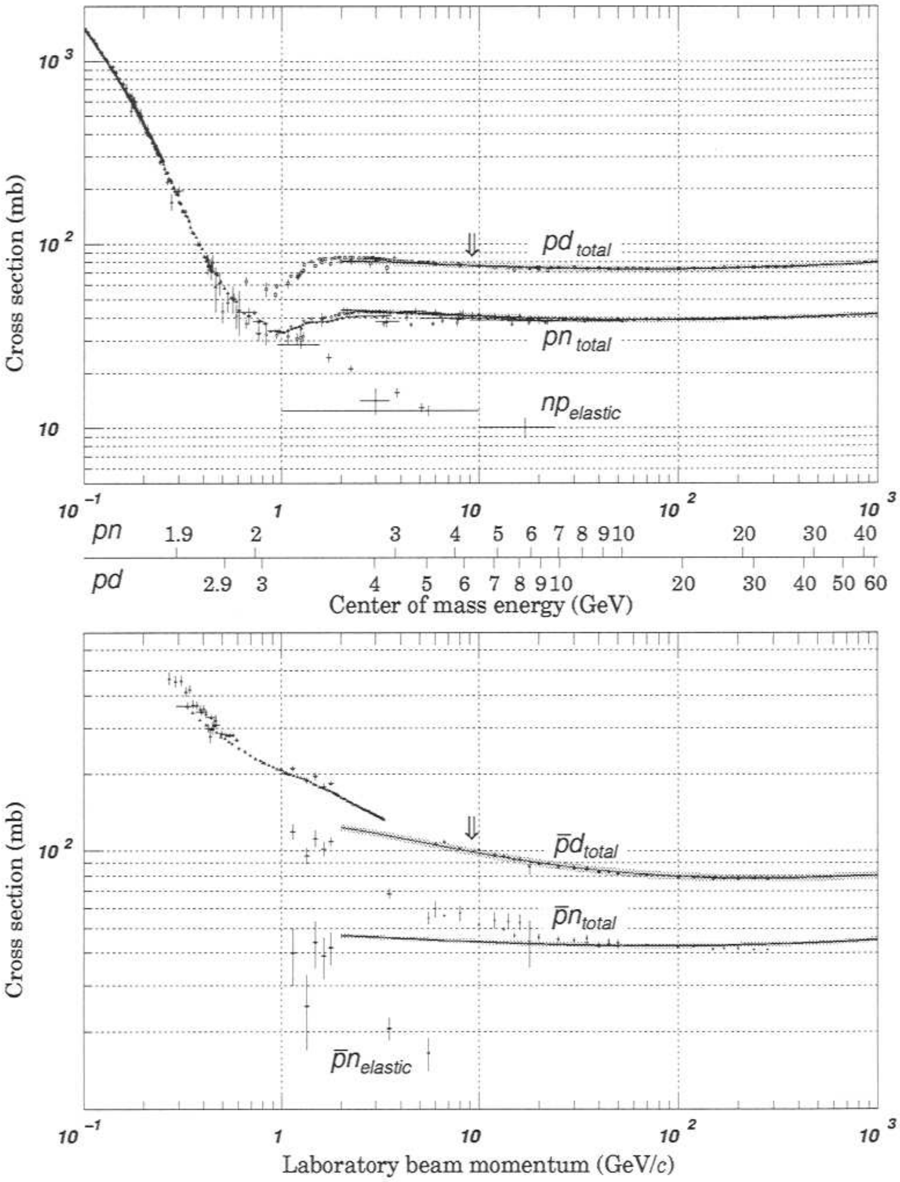
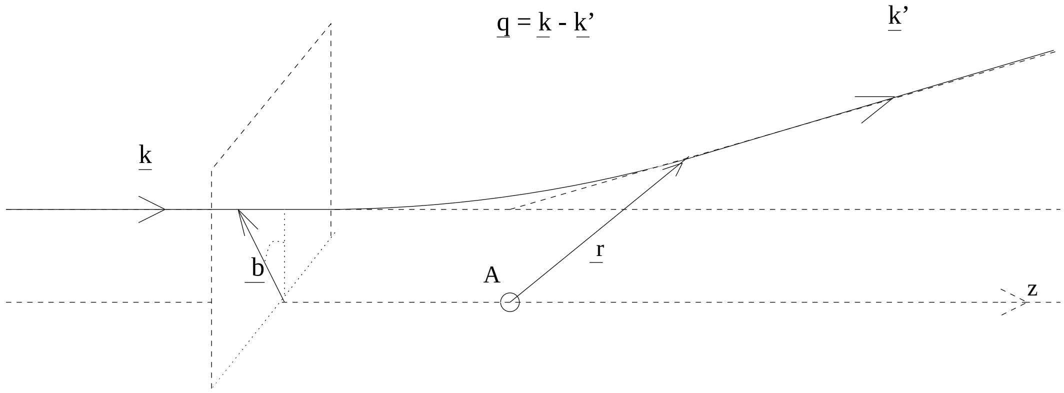


Figura 2.4 – $\boldsymbol{b}$ *è il vettore parametro di impatto della particella incidente e* $\boldsymbol{q}$ *il momento trasferito.*



Capitolo 3

Espansione in cluster

L'espansione in cluster può essere realizzata in diversi modi, dipendendo dalla quantità che si vuole utilizzare come identificatore dell'ordine dell' espansione. Possiamo formulare una espansione che ci permetta di calcolare alcunequantità basilari nello studio della fisica nucleare, quali la distribuzione di momento dei nucleoni, il valore di aspettazione dell'energia di legame, il raggio quadratico medio, il fattore di forma.

Prenderemo in considerazione una espansione basata sul numero di particelle che entrano in ogni cluster ed una sul parametro di espansione η, dipendente direttamente dalle funzioni di correlazione usate nella funzione d'onda.

3.1 Espansione in cluster classica

Esistono moltissime versioni di questo tipo do espansione, in particolare ne descriveremo una applicabile alla materia nucleare, termine usato per il caso in cui il numero A può essere grande a piacere, ed una applicabile a nuclei anche piccoli; prenderemo poi in considerazione la seconda per i nostri scopi. In ogni caso, la peculiarità del caso è che si considerano contributi da cluster di n particelle, all'ordine *n-esimo* dell'espansione.

3.1.1 Materia nucleare

In questo caso , l'approccio a particelle indipendenti è quello del modello a gas di Fermi, di cui non discuteremo; l'unica cosa da notare è che la distribuzione di momento in questo caso sarebbe la ben nota distribuzione a gradino che, come vedremo, è ben diversa da quella realistica di un sistema complicato quale un nucleo atomico.

Per un generico operatore quantistico $\hat{O}$ del quale si vuole il valore medio, si può costruire uno sviluppo in cluster della

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \tag{3.1}$$

definendo: (CLARK)

$$I(\beta) = \langle \psi | e^{\beta \hat{O}} | \psi \rangle,$$

per cui resta definito

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\partial}{\partial \beta} ln I(\beta)_{\beta=0}$$

Ora, se è possibile scrivere $\hat{O}$ nella forma

$$\hat{O} = \sum_{i=1}^{A} \hat{O}(i) + \sum_{i<j} \hat{O}(ij) + \sum_{i<j<k} \hat{O}(ijk) + ...$$

dove i termini a uno, due, tre corpi sono irriducibili, allora esiste una espressione esatta per $\hat{O}$, che può poi essere usata agli ordini più bassi.

Introduciamo le funzioni d'onda correlate:

$$|\psi\rangle = \hat{A} \ F \ \frac{1}{\sqrt{A!}} det(\ \varphi_i(x_j) \ )$$

con $\hat{A}$ l'operatore di antisimmetrizzazione, F le correlazioni, da specificare, e

$$\varphi_i(x_j) = |i(x_j)\rangle$$

tali che

$$\hat{O}(1)\varphi_i(x_1) = o_i \ \varphi_i(x_1)$$

e gli integrali di normalizzazione:

$$I_i(\beta) = \langle i | F^\dagger(1) \ e^{\beta \hat{O}(1)} \ F(1) | i \rangle$$

$$I_{ij}(\beta) = \langle ij | F^\dagger(12) \ e^{\beta \hat{O}(1) + \beta \hat{O}(2)} \ F(12) | ij - ji \rangle$$

$$...$$

$$I_{12...A}(\beta) \equiv I(\beta)$$

quindi definiamo i termini irriducibili Y decomponendo ulteriormente:

$$I_i(\beta) = Y_i$$

$$I_{ij}(\beta) = Y_i \, Y_j \, Y_{ij}$$

$$I_{ijk}(\beta) = Y_i \, Y_j \, Y_k \, Y_{ij} \, Y_{ik} \, Y_{jk} \, Y_{ijk}$$

$$...$$

$$I_{12...A}(\beta) = \prod_i Y_i \prod_{i<j} Y_{ij} \prod_{i<j<k} Y_{ijk} \, ... \, Y_{12...A}$$

Finalmente, vale la scrittura esatta per $\hat{O}$:

$$\hat{O} = \langle \hat{O} \rangle_1 + \langle \hat{O} \rangle_2 + ... + \langle \hat{O} \rangle_A \tag{3.2}$$

dove i singoli termini si leggono:

$$\langle\hat{O}\rangle_1 = \sum_i \frac{\partial}{\partial\beta} lnY_i \Big|_{\beta=0} = \sum_i \frac{\langle i|F^\dagger(1)\hat{O}(1)F(1)|i\rangle}{\langle i|F^\dagger(1)F(1)|i\rangle}$$

$$\langle\hat{O}\rangle_2 = \sum_{i<j} \frac{\partial}{\partial\beta} lnY_{ij} \Big|_{\beta=0} =$$

$$= \sum_{i<j} [\frac{\langle ij|F^\dagger(12)\left[\hat{O}(1)+\hat{O}(2)\right]F(12)|ij-ji\rangle}{\langle ij|F^\dagger(12)F(12)|ij-ji\rangle}$$

$$-\langle i|F^\dagger(1)\hat{O}(1)F(1)|i\rangle - \langle j|F^\dagger(1)\hat{O}(1)F(1)|j\rangle]$$

e via dicendo.

Un caso di interesse, diciamo, è quello dell'Hamiltoniana, per la quale scriviamo esplicitamente la (2) separatamente per il termine cinetico e quello potenziale, quando valgano:

$$T = -\frac{\hbar^2}{m}\sum_i \nabla_i^2 = \sum_i \hat{t}(i) \qquad\qquad V = \sum_{i<j} v(ij) \tag{3.3}$$

per le quali, con la scelta di Jastrow delle correlazioni, cioè:

$$F(i) = 1$$

$$F(ij) = \sum_k \gamma_k e^{-a_k r_{ij}^2} = f(ij) \ \in R$$

si ricava per il secondo ordine in $\hat{T}$

$$\langle T\rangle_1 = -\frac{h^2}{m}\sum_i \langle i|\nabla_i^2(1)|i\rangle$$

$$\langle T\rangle_2 = \sum_{i<j}\left[\frac{\langle ij|f(12)\left[\hat{t}(1)+\hat{t}(2)\right]f(12)|ij-ji\rangle}{\langle ij|f^2(12)|ij-ji\rangle} - \langle i|\hat{t}(1)|i\rangle - \langle j|\hat{t}(1)|j\rangle\right]$$

mentre per $\hat{V}$ allo stesso ordine bisogna innanzi tutto notare che non si ha che

$$I_i(\beta) = \langle i|F^\dagger(1)F(1)|i\rangle = 1$$

e

$$I_{ij}(\beta) = \langle ij|F^\dagger(12)e^{\beta v(12)}F(12)|ij-ji\rangle$$

pertanto si ottiene:

$$\langle\hat{V}\rangle_1 + \langle\hat{V}\rangle_2 = \sum_{i<j}\frac{\langle ij|f^2(12)v(12)|ij-ji\rangle}{\langle ij|f^2(12)|ij-ji\rangle}.$$

3.1.2 Nuclei leggeri

Questo caso differisce dal precedente solo per l'impostazione matematica, mentre il significato dei vari contributi rimane invariato; in particolare saremo in grado di portare l'espansione fino a contributi derivanti da cluster di tre particelle correlate. Ciononostante, vedremo nel prossimo come è possibile migliorare i risulati ottenibili da questo approccio con uno molto più efficace e con minore sforzo di calcolo. Rimanendo valide le espressioni 3.3 per l'Hamiltoniana e 3.1 per il generico valore medio, si arriva a scrivere il valore di aspettazione per l'energia nel seguente modo:

$$E = \frac{\langle\phi| \prod f^2(ij) \left[\sum_i T_i + \sum_{i<j} \tilde{V}_{ij}\right] |\phi\rangle}{\langle\phi| \prod f^2(ij)|\phi\rangle}$$

nella quale è definito l'operatore a due particelle $\tilde{V}$ nel seguente modo:

$$\tilde{V}(ij) = V(ij) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 \, ln \, f(ij)$$

In modo analogo a quanto descritto in precedenza, con le definizioni ulteriori:

$$I(\beta) = \langle\phi| \prod_{i<j} g_{ij}(\beta) \prod_i h_i(\beta)|\phi\rangle$$

$$h_i(\beta) = e^{\beta T_i} \qquad\qquad g_{ij}(\beta) = e^{\left(2ln \, f(ij) + \beta \tilde{V}_{ij}\right)}$$

abbiamo l'espressione esatta per l'energia:

$$E = \frac{\partial}{\partial\beta} \, ln \, I(\beta)_{\beta=0}$$

L'espansione consiste ora nell'includere contributi dal numero voluto di particelle, cioè:

$$I^{(1)} = \langle\phi| \prod_i h_i(\beta)|\phi\rangle$$

$$I^{(2)} = I^{(1)} \prod_{i<j} \frac{\langle\phi|g_{ij}(\beta)h_i(\beta)h_j(\beta)|\phi\rangle}{\langle\phi|h_i(\beta)|\phi\rangle\langle\phi|h_j(\beta)|\phi\rangle}$$

eccetera; già il prossimo termine è molto complicato. I corrispondenti contributi all'energia sono:

$$E^{(1)} = \sum_i \langle\phi|T_i|\phi|\rangle$$

$$E^{(2)} = \sum_{i<j} \left(\frac{\langle\phi|f^2(ij)\left[\tilde{V}_{ij} + T_i + T_j\right]|\phi\rangle}{\langle\phi|f^2(ij)|\phi\rangle} - \langle\phi|\left(T_i + T_j\right)|\phi|\rangle \right)$$

$$E^{(3)} = \sum_{i<j<k} \Bigg[\frac{\langle\phi|f^2(ij)f^2(ik)f^2(jk)\left[\tilde{V}_{ij} + \tilde{V}_{ik} + \tilde{V}_{jk} + T_i + T_j + T_k\right]|\phi\rangle}{\langle\phi|f^2(ij)f^2(ik)f^2(jk)|\phi\rangle}$$

$$- \frac{\langle\phi|f^2(ij)\left[\tilde{V}_{ij} + T_i + T_j\right]|\phi\rangle}{\langle\phi|f^2(ij)|\phi\rangle}$$

$$-\frac{\langle\phi|f^2(ik)\left[\tilde{V}_{ik}+T_i+T_k\right]|\phi\rangle}{\langle\phi|f^2(ik)|\phi\rangle}$$

$$-\frac{\langle\phi|f^2(jk)\left[\tilde{V}_{jk}+T_i+T_k\right]|\phi\rangle}{\langle\phi|f^2(jk)|\phi\rangle}-\langle\phi|\left(T_i+T_j+T_k\right)|\phi\rangle \quad \Big]$$

In particolare, questa espansione è stata usata per verificare che tipo di funzioni di correlazione sono da usare per un dato potenziale; si verifica che anche per un potenziale con hard-core è possibile avere una serie convergente, con risultati soddisfacenti al terzo ordine.

3.2 Espansione NC

Come giòservato, l'espressione NC sta ad indicare la caratteristica di questa espansione di consrevare la normalizzazione della densità del sistema, quindi il numero di particelle che lo compongono, ad ogni ordine; tale affermazione è verificata esplicitamente per funzioni d'onda di modello a shell per A=4 in Appendice B. Questa caratteristica è rilevante nel caso di funzione d'onda correlata, mentre il fatto che ciò non si verifichi con l'inclusione della FSI dà una misura della sua entità. Indicheremo la densità ottenuta in questo approccio con l'indice LOA che significa *lowest order approximation* essendo lo sviluppo in η che si fa fermato all'ordine più basso.

In questo approccio si parte dalla (1), e si prendono subito in considerazione le espressioni delle funzioni d'onda correlate in questo modo:

$$|\psi\rangle=(\hat{S}\prod_{i<j}f(ij))|\phi\rangle$$

perciò

$$\langle\hat{O}\rangle=\frac{\langle\phi|\prod f(ij)\hat{O}\prod f(ij)|\phi\rangle}{\langle\phi|\prod f^2(ij)|\phi\rangle} \tag{3.4}$$

in cui $\hat{S}$ simmetrizza il prodotto delle $f(ij)$, che hanno la stessa forma del caso precedente, e le $|\phi\rangle$ sono prodotti antisimmetrizzati di funzioni d'onda di particella singola. La differenza sostanziale in questo caso è che ora si farà una espansione del prodotto delle correlazioni, prendendo quindi questo come parametro *piccolo* su cui concentrare l'attenzione. Infatti, definiamo:

$$f(ij)=\sum_k\gamma_k e^{-a_k r_{ij}^2}$$

$$f^2(ij)=1+\eta(ij)$$

$$f(ij)=1+h(ij);$$

Possiamo quindi usare a numeratore e a denominatore della (3), rispettivamente:

$$\prod_{i<j}f(ij)=1+\sum_{i<j}h(ij)+\sum_{(ij)<(lk)}h(ij)h(lk)+\sum_{(ij)<(lk)<(rs)}h(ij)h(lk)h(rs)+...$$

$$\prod_{i<j} f^2(ij) = 1 + \sum_{i<j} \eta(ij) + \sum_{(ij)<(lk)} \eta(ij)\eta(lk) + ...$$

L'espansione vera e propria consiste nell'usare questa approssimazione per il denominatore:

$$\frac{1}{\langle\phi|f^2(ij)|\phi\rangle} = \frac{1}{\langle\phi|\left(1+\sum\eta(ij)+...\right)|\phi\rangle} =$$

$$= 1 - \sum_{i<j}\eta(ij) - \sum_{(ij)<(lk)} \eta(ij)\eta(lk) + \left(\sum_{i<j}\eta(ij)\right)^2 + ... \tag{3.5}$$

e prendere, nei prodotti con i termini a numeratore, solo le potenze in η che interessano. Per l'operatore generico $\hat{O}$ vale dunque:

$$\langle\hat{O}\rangle = \langle\Delta\hat{O}\rangle_1 + \langle\Delta\hat{O}\rangle_2 + ...$$

dove si legge

$$\langle\Delta\hat{O}\rangle_1 = \langle\hat{O}\rangle_0 + \langle\phi|\sum_{i<j}\left[h(ij)\hat{O} + \hat{O}h(ij) + h(ij)\hat{O}h(ij)\right]|\phi\rangle - \langle\hat{O}\rangle_0\langle\phi|\sum_{i<j}\eta(ij)|\phi\rangle \tag{3.6}$$

e

$$\langle\Delta\hat{O}\rangle_2 = \langle\phi|\sum_{i<j}[h^2(ij)\hat{O} + \hat{O}h^2(ij) + h^3(ij)\hat{O} + \hat{O}h^3(ij) + h^2(ij)\hat{O}h(ij) +$$

$$+ h(ij)\hat{O}h^2(ij) + h^3(ij)\hat{O}h(ij) + h(ij)\hat{O}h^3(ij) + h^2(ij)\hat{O}h^2(ij)]|\phi\rangle +$$

$$-\langle\phi|\sum_{i<j}\left[h(ij)\hat{O} + \hat{O}h(ij) + h(ij)\hat{O}h(ij)\right]|\phi\rangle\langle\phi|\sum_{i<j}\eta(ij)|\phi\rangle +$$

$$-\langle\hat{O}\rangle_0\left(\langle\phi|\sum_{(ij)<(lk)}\eta(ij)\eta(lk)|\phi\rangle - \langle\phi|\sum_{i<j}\eta(ij)|\phi\rangle^2\right) \tag{3.7}$$

dove stiamo tenendo conto del fatto che il parametro di espansione è η, pertanto bisogna fare in modo che i termini del tipo η ed η^2, nel caso in cui si possa commutare l'ordine delle correlazioni e dell'operatore $\hat{O}$, diano il risultato semplice

$$\langle\Delta\hat{O}\rangle_1 = \langle\phi|\left(1 + \sum_{i<j}\eta(ij)\right)\hat{O}|\phi\rangle_0 - \langle\hat{O}\rangle_0\langle\phi|\sum_{i<j}\eta(ij)|\phi\rangle \tag{3.8}$$

e, per il secondo ordine

$$\langle\Delta\hat{O}\rangle_2 = \langle\phi|\sum_{(ij)<(lk)}\eta(ij)\eta(lk)\hat{O}|\phi\rangle - \langle\phi|\sum_{i<j}\eta(ij)\hat{O}|\phi\rangle\langle\phi|\sum_{i<j}\eta(ij)|\phi\rangle +$$

$$-\langle\hat{O}\rangle_0\left[\langle\phi|\sum_{i<j,,,,l<k}\eta(ij)\eta(lk)|\phi\rangle - \langle\phi|\sum_{i<j}\eta(ij)|\phi\rangle^2\right] \tag{3.9}$$

ovvero nelle (5),(6) sono stati presi, a ragione, i termini in h in modo che siano rispettate

$$\eta(ij) \sim 2h(ij) + h^2(ij)$$

e

$$\eta^2(ij) \sim 4h^2(ij) + 4h^3(ij) + h^4(ij).$$

È chiaro che un confronto diretto termine a termine con il tipo di espansione del paragrafo precedente non è possibile, dato il diverso significato delle due operazioni svolte; tuttavia è possibile individuare i termini che nei due casi contengono stesse potenze di η (o, equivalentemente, di f^2) per capire quali sono i termini corrispondenti.

3.3 La densità non diagonale nella LOA

Un caso di interesse per l'espansione presentata nel paragrafo precedente, è quello di prendere il valore medio dell'operatore densità non diagonale ad un corpo **??**, ovvero

$$\hat{\rho}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_{i=1}^{A} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)\, \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'_i) \prod_{j \neq i}^{A} \delta(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}'_j). \tag{3.10}$$

Sostituendo questa espressione nell'operatore della (5), usando però

$$\langle \phi | \hat{O} | \phi' \rangle$$

$$|\phi'\rangle = |\phi(x'_1 ... x'_A)\rangle = det(\ \phi_i(x'_j)\ ) \tag{3.11}$$

otteniamo al primo ordine in η (LOA) per la densità non diagonale una espressione ben nota, che ci permette di calcolare in questa approssimazione la densità di un sistema correlato con gli ulteriori vantaggi, come vedremo, di una scrittura che conserva la normalizzazione della densità stessa e di dare una rappresentazione diagrammatica del processo fisico in esame; tale rappresentazione poi si estende all'inclusione di interazioni nello stato finale del processo. Si può inoltre verificare esplicitamente che, fino a questo ordine, prendono parte al processo solo termini corrispondenti a diagrammi connessi, mentre si cancellano essattamente quelli relativi a grafici sconnessi; per questo ci si riferisce a questo approccio come alla *linked cluster expansion*. I dettagli di come avvenga questa cancellazione sono dati insieme al calcolo dettagliato della densità in [**?**].

Se ne deduce la

$$\rho_{LOA}(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1) = 4\rho_0(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1) + \tag{3.12}$$

$$+ \quad 4 \int d\boldsymbol{r}_2 \left[f(12)f(1'2) - 1\right] \left(4\rho_0(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}'_1)\rho_0(\boldsymbol{r}_2) - \rho_0(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)\rho_0(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}'_1)\right) +$$
$$- \quad 4 \int d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3 \left[f^2(23) - 1\right] \rho_0(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2) \left(4\rho_0(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}'_1)\rho_0(\boldsymbol{r}_3) - \rho_0(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3)\rho_0(\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}'_1)\right)$$

$$= \rho^{SM}(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}'_1) + \rho^{H}(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}'_1) + \rho^{S}(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}'_1) \tag{3.13}$$

dove sono $f(ij) = f(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ e le ρ_0 sono le densità in assenza di correlazioni, ricavate quindi da funzioni d'onda a determinanti di Slater, definite da:

$$\rho_0(\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_j) = \sum_a \varphi_a^*(\boldsymbol{r}_i)\varphi_a(\boldsymbol{r}_j)$$

e

$$\rho_0(\boldsymbol{r}_i) = \sum_a \varphi_a^*(\boldsymbol{r}_i)\varphi_a(\boldsymbol{r}_i) \;;$$

le somme si estendono sugli stati occupati, a riassume i soli numeri quantici spaziali. Si noti come per un nucleo con shell chiuso l'espressione 3.12 sia particolarmente semplice da scrivere in termini delle autofunzioni di campo medio φ che compaiono nelle ρ_0; infatti le somme sugli stati occupati si riducono, per le parti di spin ed isospin, al calcolo delle tracce dei relativi prodotti di spinori. Si dice che le somme su σ e τ vengono in questo modo saturate.
Nella 3.13 gli apici SM, H, e S stanno rispettivamente per Shell Model, Hole e Spectator; il significato di ciò risulta chiaro dalla figura 3.4. Questa espressione della densità non diagonale tiene conto, insomma, sia di del principio di Pauli sia delle correlazioni a corto raggio (SRC) fra i nucleoni. In alcuni casi è possibile non tenere conto delle correlazioni di Pauli, o fralo in modo diverso da quello usato qui. È interessante notare come in questa approssimazione sia conservata la normalizzazione della densità nucleare, cioè

$$\int d\boldsymbol{r}_1 \rho(\boldsymbol{r}_1) = \int d\boldsymbol{r}_1 \rho_{LOA}(\boldsymbol{r}_1) = 1$$

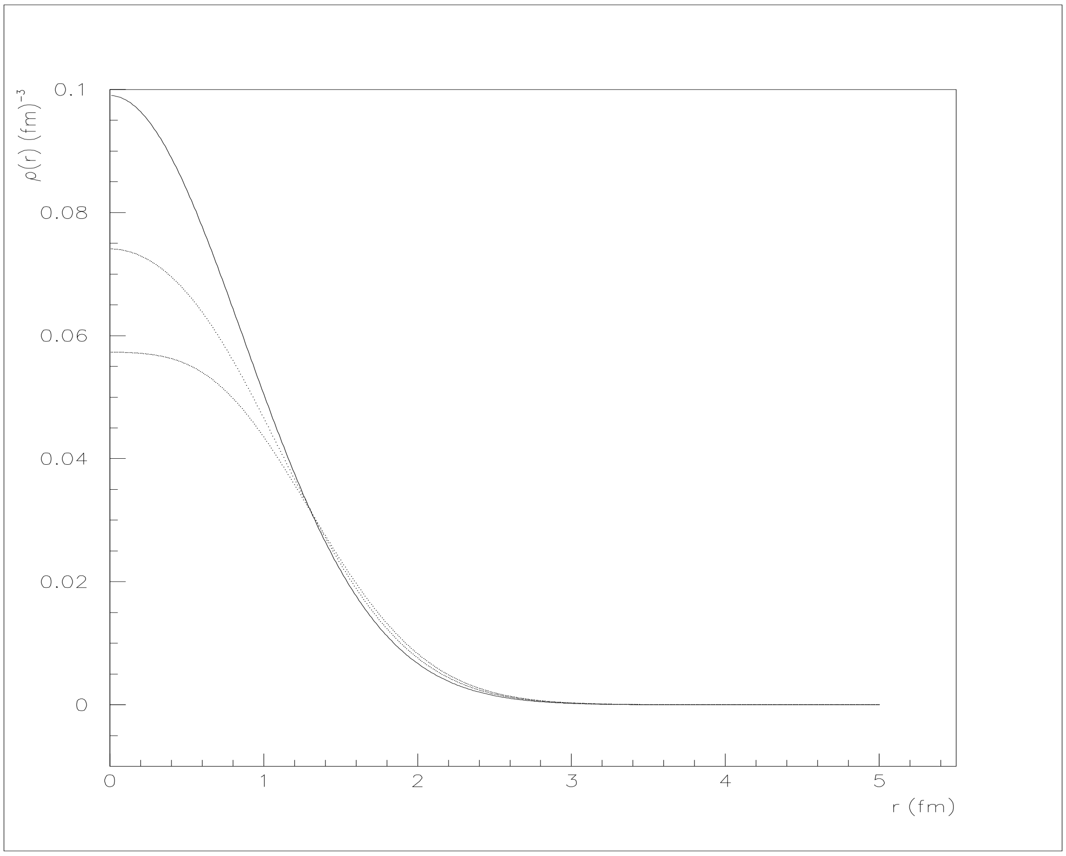
relazione semplice da verificare, sempre valendo la 3.11.

È possibile scrivere nella stessa approssimazione la densità a due corpi, tuttavia non è necessario prenderla in considerazione per mettere in evidenza gli effetti delle correlazioni a corto raggio perchè come si vede dalle definizioni date nel capitolo 1 sono sufficienti quantità dipendenti dalla $\rho^{(1)}$; questo risulta dalle figure delle pagine seguenti che mostrano l'andamento di $\rho(\boldsymbol{r}_1) = \rho(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{r}_1)$, dalla quale si ricava il raggio quadratico medio; inoltre, sono riportati i risultati del calcolo delle distribuzioni di momento e del fattore di forma relativi alla ρ_{LOA}, come definiti nel Cap. 1.

Tabella 3.1: Valori di $\langle r^2 \rangle$ per ^4He calcolati con gli stessi parametri usati per la densità in Fig. 1; α è il parametro delle funzioni di oscillatore armonico per lo stato 1s. La prima riga corrisponde a nessuna correlazione.

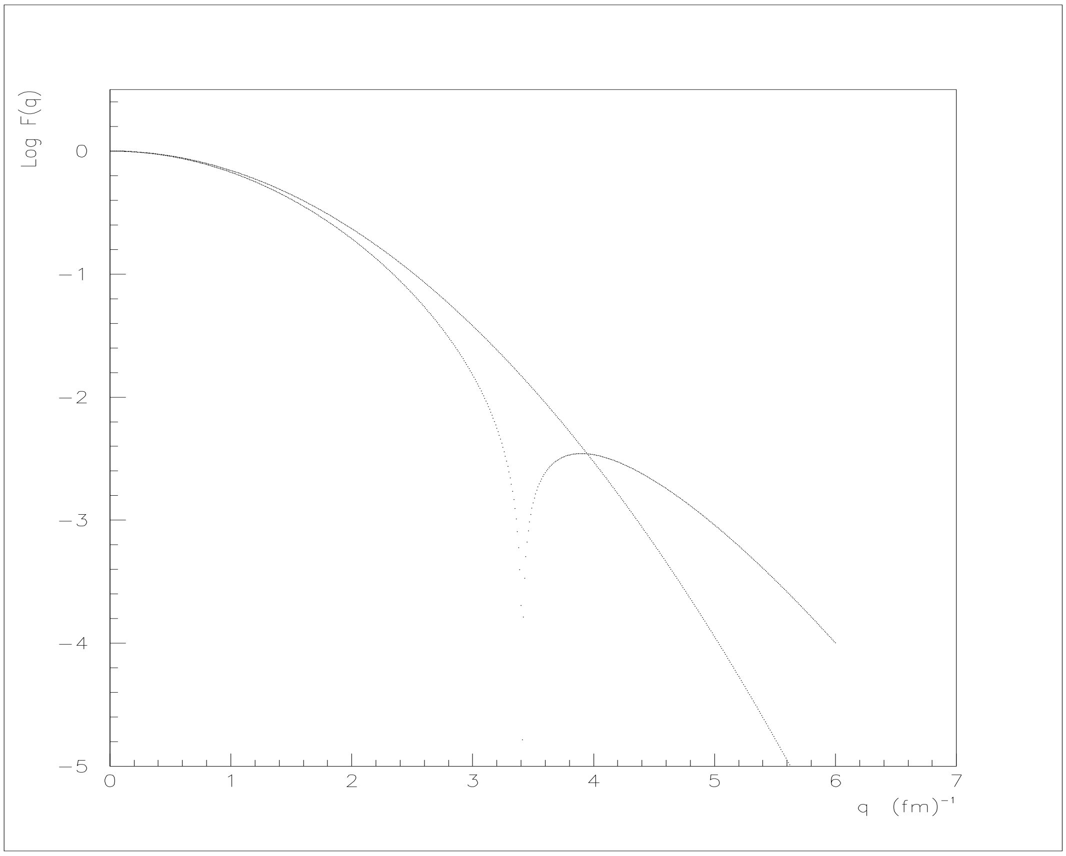
α	a	γ	rms
$\frac{1}{0.8293}$	0	0	1.47
$\frac{1}{0.8293}$	2.0502	0.7191	1.54
$\frac{1}{0.8293}$	2.8	1.0	1.53

Figura 3.1 – *La distribuzione di densità per un sistema correlato di quattro nucleoni, con correlazioni tipo $f = 1 - \gamma e^{ar^2}$. La curva in alto corrisponde al sistema non correlato, le altre due a due valori di prova dei parametri di correlazione.*



Utilizzando per le φ_a nella 3.12 le espressioni di oscillatore armonico, nel caso di nuclei con shell chiuso è possibile ottenere analiticamente il risulato, da cui dedurre le altre quantità dipendenti dalla $\rho^{(1)}$. Possiamo quindi verificare nelle figure 3.2 e 3.3 l'effetto dell'inclusione di correlazioni a corto raggio sul fattore di forma e la distribuzione di momento calcolate in questa approssimazione per He^4. In particolare, si osservi nel grafico della distribuzione di momento come le componenti ad alto k, quelle a $k > 2fm^{-1}$, diciamo, sono completamente dovute all'inclusione di correlazioni. Si osservi che anche vicino allo zero le due distribuzioni differiscono sensibilmente; attribuiamo questa caratteristica al cattivo comportamento asintotico delle autofunzioni di particella singola di oscillatore armonico, il cui potenziale si estende a distanza infinita.

Figura 3.2 – *Il fattore di forma ricavato dalla distribuzione di densità di pagina precedente. È chiara l'inadeguatezza del caso non correlato, che in figura corrisponde alla curva monotona, quando si confronti con osservazioni sperimentali.*



Avendo ampiamente mostrato che una funzione d'onda non correlata non può dare conto delle più semplici caratteristiche di un sistema nucleare, siamo certi che una trattazione soddisfacente dovrà tenerle nel giusto conto. Anche nel caso di inclusione nel modello di una interazione di stato finale, sarà necessario partire da una funzione d'onda correlata. Questo è quanto si fa usualmente, come è mostrato in **??**, in cui è discusso anche il problema ulteriore di come sia necessario capire il ruolo della interazione successiva del nucleone colpito per poter risalire in modo non ambiguo al tipo di correlazioni esistenti fra i nucleoni costituenti il bersaglio iniziale.

Figura 3.3 – *Distribuzione di momento del nucleo di* ^4He *calcolata dalla 3.12; le componenti a grande k esistono solo usando funzioni d'onda correlate e differiscono per i diversi valori dei parametri di correlazione. Qui le correlazioni utilizzate sono quelle delle denità della Fig. 1; in particolare quella che scende rapidamente è relativa al modello a shell.*

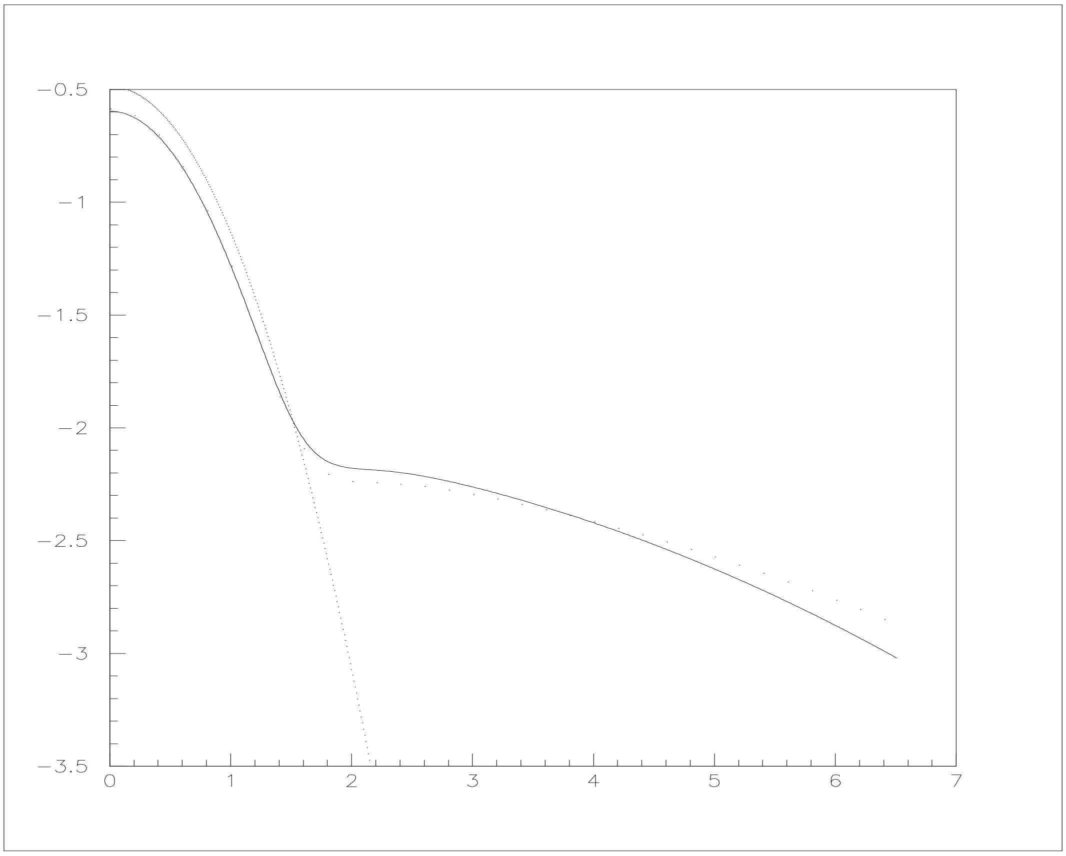
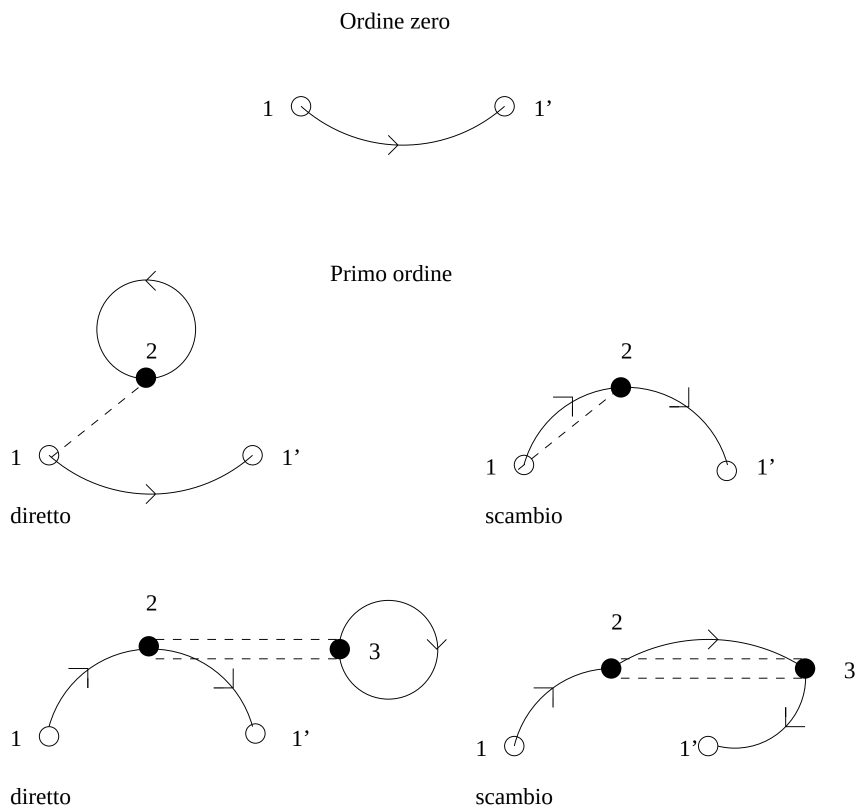


Figura 3.4 – *È possibile rappresentare i termini che entrano nella espressione 3.12 della densità correlata, componendo le unità di base come descritto in* **??**. *Si osservi che tutti i grafici sono connessi. La prima coppia di grafici rappresenta i contributi a* ρ^H*, mentre la seconda a* ρ^S*, come definite nella 3.13.*



..it's hard,
and it will get harder,
but it turns the world.
(Bart Kosko)

È dura, eh?
(Claudio Ciofi degli Atti)

Capitolo 4

Convergenza ed utilizzo della espansione NC

Nel capitolo precedente sono state presentate la espansione in cluster classica CE e quella NC in potenze di η. Un calcolo delle densità e del fattore di forma e distribuzione di momento ad essa relativi ci ha permesso di vedere come sono fatte queste quantità in un sistema correlato rispetto alle stesse calcolate nell'approssimazione di particelle completamente indipendenti. Ora siamo in grado di confrontare le due espansioni, e lo faremo nel calcolo della energia di legame dello stato fondamentale di ^4He; la minimizzazione dell'energia infatti è la procedura usualmente seguita per ottimizzare i parametri che entrano nelle funzioni d'onda di particella libera e nelle funzioni di correlazione.

4.1 espansione NC modificata

A questo punto, è opportuno introdurre uno sviluppo ulteriore alla nostra espansione; si possono trattare le correlazioni fra coppie di particelle non più tutte sullo stesso piano, ma tenere conto esattamente di quelle relative alla coppia 1-2 ed espandere il resto nel modo usuale. Questo risulterà come vedremo in una migliore convergenza; questo approccio si usa comunque solo per il calcolo di valori medi di operatori a due corpi; in questo caso, al termine di potenziale che appare nella H. Abbiamo per la normalizzazione, a denominatore della 3.4:

$$\langle\phi|\prod_{i<j} f^2(ij)|\phi\rangle = \langle\phi|f^2(12)\prod_{i<j\neq 12} f^2(ij)|\phi\rangle$$

Quindi, le f rimaste nella produttoria vengono espanse allo stesso modo di prima. Scriviamo il risultato per un generico operatore a dua corpi $\hat{O}(lk)$ al secondo ordine:

$$\langle\hat{O}(lk)\rangle = \langle\triangle O(lk)\rangle_1 + \langle\triangle O(lk)\rangle_2$$

con:

$$\langle\triangle O(lk)\rangle_1 = \frac{\langle\tilde{O}(lk)\rangle}{\langle f^2(12)\rangle} + \frac{\langle\sum_{i<j\neq 12}\left(f(ij)\tilde{O}(lk)f(ij) - \tilde{O}(lk)\right)\rangle}{\langle f^2(12)\rangle} +$$

$$
\begin{aligned}
& - \quad \frac{\langle \tilde{O}(lk)\rangle}{\langle f^2(12)\rangle}\frac{\langle \sum_{i<j\neq 12}\eta(ij)\rangle}{\langle f^2(12)\rangle} \\
\langle \triangle O(lk)\rangle_2 \;&= \\
&= \quad \frac{1}{\langle f^2(12)\rangle}\langle \sum \left(f(ij)f(rs)\tilde{O}(lk)f(ij)f(rs) - f(ij)\tilde{O}(lk)f(ij) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. -f(rs)\tilde{O}(lk)f(rs) + \tilde{O}(lk)\ \right)\rangle + \\
& - \quad \frac{\langle \sum_{i<j\neq(12)}\left(f(ij)\tilde{O}(lk)f(ij) - \tilde{O}(lk)\right)\rangle}{\langle f^2(12)\rangle}\frac{\langle \sum_{ij\neq(12)}\eta(ij)\rangle}{\langle f^2(12)\rangle} + \\
& - \quad \frac{\langle \tilde{O}(lk)\rangle}{\langle f^2(12)\rangle}\left(\frac{\langle \sum_{i<j\neq r<s\neq(12)}\eta(ij)\eta(rs)\rangle}{\langle f^2(12)\rangle} - \frac{{\sum_{i<j\neq(12)}}^2}{\langle f^2(12)\rangle}\right)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo scritto $\tilde{O}(lk) = f(12)\hat{O}(lk)f(12)$.

4.2 Risultati per l'energia

A questo punto possiamo analizzare i risultati di alcuni calcoli; al fine di fare un confronto è opportuno discuterne brevemente il significato.[1] L'espansione in η presentata differisce sostanzialmente dalla CE alla quale ci si riferisce usualmente, come abbiamo avuto modo di verificare; quest'ultima infatti ci consente di dare una interpetazione senza ambiguità della approssimazione che si sta facendo: il cluster di ordine n contiene il contributo di correlazioni $n-$arie, cioè fra n particlelle. La seconda invece è una vera e propria espansione in senso matematico, in cui il parametro η si considera piccolo e si performa l'approssimazione separatamnente a numeratore e denominatore dell'espressione per il valore medio di un certo operatore. Come termine di paragone, possiamo immaginare di prendere la potenza di $f = 1 - \eta$; in questo modo dovrebbero equivalere il secondo ordine della CE e il primo in η.

Nelle 4.1 e 4.2 sono riportati i risultati del calcolo per l'energia dello stato fondamentale di ^4He, nel caso della $\eta-$espansione, per due forme della funzione di correlazione. È da notare come la convergenza della serie sia piuttosto rapida; il risultato al primo ordine è molto buono se confrontato con il valore esatto atteso, ottenuto dall'espressione completa di $\langle E\rangle$, mentre al secondo ordine modificato, come descritto nella sezione precedente, fornisce un valore pressochè esatto. Questa conclusione è meglio verificata con la funzione di correlazione a carattere repulsivo a $r \to 0$ ed attrattivo a medie distanze, nella 4.2.

Per i calcoli si è utilizzato in tutti e tre i casi illustrati nelle tabelle lo stesso potenziale, noto in letteratura come $S3$, che ha la forma di somma di gaussiane; i valori dei parametri sono riportati in **??**.

[1] I calcoli numerici riportati nelle tabelle di questo paragrafo sono stati eseguiti utilizzando una routine di integrazione 9$-$dimensionale basata sul metodo di integrazione QRN, *quasi random number*, presentato in **??**. Invece le espressioni utilizzate per questi calcoli, che differiscono da quelle formali riportate nel testo, sono descritte in **??**.

Tabella 4.1: Energia dello stato fondamentale di ^4He: risultati in LOA con correlazioni di tipo $f = 1 - \gamma e^{-ar^2}$.

	T	V	T+V
I ordine	72.68	-100.15	-27.47
II ordine	72.95	-93.97	-21.02
modifica I ordine	72.68	-97.77	-25.09
modifica II ordine	72.95	-97.14	-24.19
calcoli esatti	72.76	-97.18	-24.41

Tabella 4.2: Come in 4.1 ma con correlazioni tipo $f = 1 - \gamma e^{-ar^2} - \delta e^{-br^2}$.

	T	V	T+V
I ordine	80.05	-115.39	-35.34
II ordine	71.49	-95.79	-24.30
modifica I ordine	80.05	-102.19	-22.14
modifica II ordine	71.49	-99.12	-27.63
calcoli esatti	69.00	-96.20	-27.20

Per quanto detto in precedenza, stiamo raffrontando i valori di $\langle E \rangle$ nelle tabelle in questo modo: quelli relativi al primo ordine in η con il secondo ordine della CE; il secondo ordine in η invece con il terzo in CE, per la stessa forma della funzione di correlazione. Emerge dunque che un risulatato soddisfacente è fornito dal pprimo caso; in cui il valore della η è più vicino al calcolo esatto. Il secondo caso invece suggerisce, osservato che nella espressione di $\langle E \rangle$ nella CE compaiono correlazioni fra gruppi di tre particelle, che non è necessario tenerne conto, dato che il valore di $-24.19 \quad Mev$ è raggiungibile in 4.2 senza includerle.

A questo punto abbiamo una forte indicazione della bontà della approssimazione fornita dalla serie pesentata per il calcolo del valore medio di un operatore; abbiamo mostrato nei capitoli precedenti come è possibile utilizzarla per avere una espressione analitica della densità non diagonale del sistema ^4He e vedremo nel prossimo paragrafo come utilizzarla per implementare una descrizione della FSI in un processo di diffusione.

Tabella 4.3: Risultati ottenuti dalla espansione classica, presentata nel Cap. 2; la funzione di correlazione è quella utilizzata in 4.1, quindi il valore esatto di riferimento è lo stesso.

	E
I ordine	64.17
II ordine	-28.9
III ordine	-22.5

4.3 Un nuovo approccio all'interazione nello stato finale nell'ambito della LOA

Riscriviamo la 3.4 con l'ulteriore aggiunta della distorsione sulle ϕ che tiene conto della possibilità dello scattering multiplo nello stato finale che, come abbiamo visto nel Cap.1, significa avere uno stato fondamentale tipo:

$$\tilde{\phi}(\{x\}) = \prod_{i=2}^{A} \Big(1 - \theta(r_{1z} - r_{iz})\Gamma(b_{12}) \Big)\phi(\{x\}) = \prod_{i=2}^{A} G(1i)\phi(\{x\}) \ .$$

Nelle formule qui sopra stiamo utilizzando direttamente l'espressione per la matrice $\hat{S}$ del processo di re-scattering come la abbiamo ricavata nel Cap. 1, dove se ne è mostrata la forma e la proprietà di fattorizzazione. Utilizziamo la notazione G che sta per Glauber. Per quanto riguarda la funzione profilo $\Gamma(\boldsymbol{b})$, invece, utilizziamo da qui in poi una parametrizzazione ben nota nelle trattazioni delle interazioni in questione, che è ricavata in Appendice, a partire dalla forma generale sempre del Cap. 1.

Espandendo al solito numeratore e denominatore del valore di aspettazione in potenze di η otteniamo in luogo dei tre termini descritti in **??**

$$\begin{aligned}(a) \quad \rightarrow \quad (\tilde{a}) &= \langle\tilde{\phi}|\hat{\rho}_1|\tilde{\phi}'\rangle = \\ &= A\int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1 \prod_{j=2}^{A} d\boldsymbol{r}_j \phi^\star(\{x\}) \prod_{k=2}^{A} G^\dagger(1k)\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}'_1 - \boldsymbol{r}') \prod_{k=2}^{A} G(1'k)\phi'(\{x\})\end{aligned}$$

in cui ϕ' contiene $\boldsymbol{r}'_1$; con l'approssimazione:

$$\begin{aligned}&\phi^\star(x_1, ..., x_A)\phi(x'_1, x_2, ..., x_A) = \\ &= \frac{1}{A}\sum_{\alpha,\beta}(-1)^{P_\alpha + P_\beta}\varphi^\star_\alpha(x_1)\varphi_\beta(x'_1)\phi^{\alpha\star}_{A-1}\phi^{\beta}_{A-1} = \\ &= \frac{1}{A}\sum_{\alpha}\varphi^\star_\alpha(x_1)\varphi_\alpha(x'_1)\phi^{\alpha\star}_{A-1}\phi^{\beta}_{A-1} = \\ &= \frac{1}{A}\sum_{\alpha}\varphi^\star_\alpha(x_1)\varphi_\alpha(x'_1)\prod_{i=2}^{A}\rho_0(\boldsymbol{r}_i)\end{aligned}$$

segue

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}) &= \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1 \sum_\alpha \varphi^\star_\alpha(x_1)\varphi_\alpha(x'_1)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r}')\prod_{j=2}^{A} d\boldsymbol{r}_j G^\dagger(1j)G(1'j)\rho_0(\boldsymbol{r}_j) \\
&= 4\ \rho_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\ \left[\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]^{A-1}
\end{aligned}
$$

in cui abbiamo introdotto il *fattore di assorbimento*

$$
\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \int\ d\boldsymbol{r}_2 G^\dagger(12)G(1'2)\rho_0(\boldsymbol{r}_2)\ . \tag{4.1}
$$

In maniera del tutto analoga a quanto fatto per $(\tilde{a})$, risultano anche:

$$
(b) \to (\tilde{b}) + (\tilde{b^2_L}) + (\tilde{b^2_U})
$$

e

$$
(c) \to (\tilde{c}) - (\tilde{c_L}) - (\tilde{c_U})\ ;
$$

dunque in totale disponiamo dei seguenti termini per la densità distorta:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}) &= 4\ \rho_0(1,1')\ \left[\Phi(1,1')\right]^{A-1} \\
(b_1) &= \left[\Phi(11')\right]^{A-2} 4\int d\mathbf{2}\ \eta(12;1'2)\Big[\ 4\rho_0(11')\rho_0(2) - \rho_0(12)\rho_0(21')\ \Big]G^\dagger(12)G(1'2) \\
(\tilde{b}^L_2) &= -\left[\Phi(11')\right]^{A-2} 4\int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\sum_{a\neq b}\Big[\ 4\varphi^\star_a(1)\varphi_b(1')\varphi^\star_b(2)\varphi_a(2)\rho_0(3) + \\
&\qquad -\varphi^\star_a(1)\varphi_b(1')\varphi^\star_b(2)\varphi_a(3)\rho_0(32)\ \Big]G^\dagger(12)G^\dagger(13)G(1'2)G(1'3) \\
(\tilde{b}^U_2) &= \left[\Phi(11')\right]^{A-3} 4\int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\Big[\ 4\rho_0(3)\sum_a\varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\sum_{b\neq a}|\varphi_b(2)|^2 + \\
&\qquad -\sum_a\varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\sum_{b\neq a}\varphi^\star_b(2)\varphi_b(3)\rho_0(32)\ \Big]G^\dagger(12)G^\dagger(13)G(1'2)G(1'3) \\
(\tilde{c}^L) &= \left[\Phi(11')\right]^{A-1} 4\int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\ \Big[4\ \rho_0(3)\sum_a\varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')|\varphi_a(2)|^2 + \\
&\qquad -\sum_a\varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\varphi^\star_a(3)\varphi_a(3)\rho_0(32)\ \Big] \\
(\tilde{c}^U) &= \left[\Phi(11')\right]^{A-1} 4\int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\Big[\ 4\rho_0(3)\sum_a\varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\sum_{b\neq a}|\varphi_b(2)|^2 \\
&\qquad -\sum_a\varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\sum_{b\neq a}\varphi^\star_b(2)\varphi_b(3)\rho_0(32)\ \Big]
\end{aligned}
$$

In tutte le espressioni qui sopra abbiamo scritto brevemente i per il vettore $\boldsymbol{r_i}$. Le stesse quantità si possono compattare ulteriormente; se definiamo:

$$
1+\Gamma(1,1';2) = G^\dagger(1,2)G(1',2) = 1-\Gamma^\dagger(1,2)-\Gamma(1',2)+\Gamma^\dagger(1,2)\Gamma(1',2)
$$

e

$$
1+\Gamma(1,1';2,3) = G^\dagger(1,2)G^\dagger(1,3)G(1',2)G(1',3) = 1-\sum\Gamma+\sum\Gamma\Gamma-\sum\Gamma\Gamma\Gamma
$$

possiamo suddividere i termini di tipo (b) in questo modo:

$$\begin{aligned} (\tilde{b}_1) &= (\hat{b}_1) + (B_1) \\ (\tilde{b}_2^L) &= (\hat{b}_2^L) + (B_2^L) \\ (\tilde{b}_2^U) &= (\hat{b}_2^U) + (B_2^U) \end{aligned} \tag{4.2}$$

in cui le funzioni profilo, tranne che per i fattori $\Phi(1,1')$, sono state isolate nei termini di tipo (B_i^I).
Conviene ora osservare che ulteriori arrangiamenti permettono di dare una interpretazione in termini diagrammatici delle interazioni in gioco, ma l'espressione ottenuta permette con facilità di effettuare alcune considerazioni per il caso modello di ^4He; infatti questo è l'unico nucleo con shell chiuso (il che riduce i calcoli relativi a spin ed isospin) con tutti i nucleoni sullo stesso shell, $1s$, che è degenere quattro volte. Pertanto si possono ignorare tutti i termini che involvono prodotti di orbitali con numeri quantici spaziali $a \neq b$, deducendo una espressione in cui le FSI si riconoscono ancora nella presenza dei fattori $\Phi(1,1')$, rimanendo con:

$$\rho_D = (\tilde{a}) + (\tilde{b}^1) + (\tilde{c}_L) \tag{4.3}$$

la quale può essere valutata analiticamente utilizzando le

$$\varphi_{1s}(\boldsymbol{r}) = N\ e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}}\ ,$$

normalizzate ad 1 tramite N. Calcoliamo quindi la trasparenza nucleare relativa alla ρ_D per ^4He come definita in 2.4 che, come anticipato, ci darà un'indicazione della avvenuta distorsione della densità nucleare; infatti è semplice osservare che, sia per quella calcolata in approssimazione SM, sia per quella correlata che coinvolge i due termini aggiuntivi come in 3.12, la T vale identicamente 1 non appena si normalizzano le $\rho(\boldsymbol{r})$ ad 1 anzichè ad A come si è fatto finora.

Tabella 4.4: Calcolo della trasparenza nucleare per ^4He utilizzando l'espressione 4.3; sono riportati i valori relativi ai singoli termini. Il valore T_0 è quello comune relativo ρ_{SM} e ρ_{LOA}. I valori delle costanti utilizzate per l'espresione'C.3 sono $b_0 = 0.6\ fm$, $\alpha_{pn} = -0.33$, $\sigma_{tot} = 0.043\ barn$.

T_0	T_a	T_b	T_c	T_{He}
1	0.0020	-0.0055	0.0004	0.9969

La situazione è diversa se si intende con le nostre equazioni descrivere un nucleo più grande per il quale si possa assumere $A >> 1$; in genere il caso di ^{16}O è un buon candidato, essendo anche questo un nucleo a shell chiuso e sufficientemente pesante. Se si utilizza, dunque, questa approssimazione in tutte le potenze di Φ che compaiono nell'espressione per ρ_D che, scritta in funzione delle 4.2 si può riarrangiare con:

$$(\hat{b}_L^2) - (\tilde{c}_L) = (\hat{d})$$

$$(\hat{b}_U^2) - (\tilde{c}_U) = 0$$

ottenendo:

$$\rho_D = (\hat{a}) + (\hat{b}^1) + (\hat{d}) + (B^1) + (B^2_L) + (B^2_U) \ . \tag{4.4}$$

I primi tre termini sono quelli che compongono la densità correlata 3.12, con il fattore Φ^A; gli altri si scrivono:

$$\begin{aligned}
(B^1) &= 4\big[\Phi(11')\big]^A \int d\mathbf{2}\ \eta(12;1'2)\Big[\ 4\rho_0(11')\rho_0(2) - rho_0(12)rho_0(21')\ \Big]\ \Gamma(11';2) \\
(B^2_L) &= -4\big[\Phi(11')\big]^A \int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\Big[\ 4\rho_0(3)\sum_a \varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\sum_{b\neq a}|\varphi_b(2)|^2 + \\
&\qquad - \sum_a \varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\sum_{b\neq a}\varphi^\star_b(2)\varphi_b(3)\rho_0(32)\ \Big]\Gamma(11';23) \qquad (4.5) \\
(B^2_U) &= 4\big[\Phi(11')\big]^A \int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\Big[\ 4\rho_0(3)\sum_a \varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\sum_{b\neq a}|\varphi_b(2)|^2 + \\
&\qquad - \sum_a \varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')\sum_{b\neq a}\varphi^\star_b(2)\varphi_b(3)\rho_0(32)\ \Big]\Gamma(11';23) \ .
\end{aligned}$$

Infine, per avere anche gli ultimi due termini in funzione di $\rho_0(i)$, $\rho_0(i,j)$ si consideri:

$$\begin{aligned}
(A) &= 4\int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\sum_a\Big[\ 4\rho_0(3)\varphi^\star_a(1)\varphi_a(1')|\varphi_a(2)|^2 + \\
&\qquad -\varphi^\star_a(1)\varphi_b(1')\varphi^\star_b(2)\varphi_b(3)\rho_0(32)\ \Big]\Gamma(11';23)
\end{aligned}$$

che, aggiunto e sottratto, permette di avere:

$$\big[(B^2_L) - (A)\big] + \big[(B^2_U) - (A)\big] = (S^1) + (S^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= -4\big[\Phi(11')\big]^A \int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\Big[\ 4\rho_0(3)\rho_0(21')\rho_0(12) - \rho_0(21')\rho_0(13)\rho_0(32)\ \Big]\Gamma(11';23) + \\
&\quad +4\big[\Phi(11')\big]^A \int d\mathbf{2}d\mathbf{3}\ \eta(23;23)\ \rho_0(11')\Big[\ \rho_0(2)\rho_0(3) - \rho_0(23)\rho_0(23)\ \Big]\Gamma(11';23) \ .
\end{aligned}$$

Ora siamo capaci di dare una espressione compatta per la densità distorta:

$$\rho_D(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1) = \rho_{SM}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1) + \rho^{SM}_{FSI}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1) + \rho^{H}_{FSI}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1) + \rho^{S}_{FSI}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1) \ ; \tag{4.6}$$

si osservi che in assenza di FSI la 4.6 si riduce alla 3.12, come ci si aspettava; infatti i vari termini valgono, tolti i primi tre che forniscono $\rho_{LOA}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)$ che già conosciamo:

$$\begin{aligned}
\rho^{SM}_{FSI} &= \big[\Phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)^A - 1\big]\ \rho_{LOA}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1) \\
\rho^{H}_{FSI} &= S\ \big[\Phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)\big]^A \int d\boldsymbol{r}_2\eta(\mathbf{12};\mathbf{1'2})\ \big[S\rho_0(\mathbf{1},\mathbf{1'})\rho_0(\mathbf{2}) - \rho_0(\mathbf{1},\mathbf{2})\rho_0(\mathbf{2},\mathbf{1'})\big]\ \Gamma(\mathbf{12};\mathbf{1'2}) \\
\rho^{S}_{FSI} &= -S\ \big[\Phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)\big]^A \int d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3\eta(\mathbf{23})\rho_0(\mathbf{2},\mathbf{1'})\ \big[S\rho_0(\mathbf{2},\mathbf{1})\rho_0(\mathbf{3}) - \rho_0(\mathbf{2},\mathbf{3})\rho_0(\mathbf{3},\mathbf{1})\big]\ \Gamma(\mathbf{12};\mathbf{13}) \\
&= \big[\Phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)\big]^A \rho_0(\mathbf{1},\mathbf{1'}) \int d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3\eta(\mathbf{23})\ \Big[S\rho_0(\mathbf{2})\rho_0(\mathbf{3}) - |\rho_0(\mathbf{2},\mathbf{3})|^2\Big]\ \Gamma(\mathbf{12};\mathbf{13})
\end{aligned}$$

La 4.6 in questo tipo di approccio è stata utilizzata in [**?**, morital]d in [**?**, incorso]er calcolare la trasparenza del nucleo di ^{16}O, con i risultati di Il fatto che l'interazione nello stato fionale faccia sì che la trasparenza di un nucleo risulti minore di 1 è dovuto alla caratteristiche dell'interazione nucleone-nucleone, cioè alla capacità di

Tabella 4.5: Trasparenza nucleare per ^{16}O calcolata con la 4.6 (da [**?**, morita1]

T_{SM}	T_{FSI}^{SM}	T_{FSI}^{H}	T_{FSI}^{S}	$T_{^{16}O}$
0.51	0.020	-0.032	0.009	0.57

assorbimento alla alte energie da parte del sistema residuo, dei protoni colpiti dalla sonda elettromagnetica. Essendo però la distribuzione di $\boldsymbol{p}_m$ anisoptropa non è possibile tenere conto della FSI semplicemente come un fattore di attenuazione sul flusso di protoni emessi: infatti abbiamo visto che il suo contrtibuto non si può porre come fattore sulla sezione d'urto totale.

Si possono introdurre ulteriori elementi di base in analogia a quanto fatto in Appendice B.1 per il caso della ρ_{LOA} per descrivere in termini di diagrammi la 4.6; le definizione corrispondenti sono le seguenti:

- correzione ai termini di tipo SM:

$\Phi(i,j)^A - 1$

- funzione profilo agente fra i e j:

$\Gamma(i,j)$

Queste regole si aggiungono a quelle già introdotte, per dare luogo ai diagrammi della Fig. 4.1.

4.4 Distribuzione di momento mancante

Il tratto saliente dell'avvenuta interazione nello stato finale nel processo descritto in fig **??** è quello di rendere inaccessibili all'evidenza sperimentale le caratteristiche dell'interazione a corto raggio fra i nucleoni nello stato fondamentale, avendo la FSI stessa un piccolo raggio d'azione; per questo motivo è opportuno valutare correttamente l'entità della distorsione intervenuta per speculare sulle caratteristiche nucleari. Ancora una volta è necessario considerare l'impulso del nucleone colpito; è ad impulsi elevati che gli effetti di correlazioni nello stato fondamentale iniziale ed interazioni nello stato finale danno luogo a comportamenti simili e quindi difficili da distinguere.

L'estrazione delle informazioni relative al momento mancante fa uso della *funzione spettrale* $S(\boldsymbol{p}_m, E_m)$, definita come la probabilità di osservare le quantità $\boldsymbol{p}_m$

ed E_m nel nucleone rivelato in coincidenza con l'elettrone scatterato, facendo riferimento alla **??**; la sezione d'urto del processo si può far dipendere dalla funzione spettrale secondo la

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu d\boldsymbol{p}_m} = K \ \sigma_{en} \ P(E_m, \boldsymbol{p}_m) \ ;$$

la distribuzione di momento mancante si deduce poi con l'integrazione:

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{p}_m) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \ dE_m \ P(E_m, \boldsymbol{p}_m) \\ &= \frac{1}{(2\pi)3} \sum_f \left| \langle f | \hat{S} | i \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

La definizione che ne abbiamo dato a partire dalla funzione d'onda dello stato fondamentale era

$$W(\boldsymbol{p}_m) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1 e^{i\boldsymbol{p}_m \cdot (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1)} \rho_D(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1)$$

in cui

$$\rho_D(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1) = \int \prod_{j=2}^{A} d\boldsymbol{r}_j \psi_i^\star(1', 2, .., A) \hat{S}^\dagger(1', 2, .., A) \hat{S}(1, .., A) \psi_i(1, .., A) \ ;$$

$\hat{S}$ è la matrice di diffusione del processo di scattering multiplo, contenente le funzioni profilo di Glauber.

L'approssimazione della *densità locale*

$$\psi^\star(1', 2, .., A)\psi(1, .., A) = \rho_0(1, 1') \prod_{j-2}^{A} \rho_0(i) \ , \tag{4.7}$$

che equivale in qualche modo a trascurare le correlazioni di Pauli a questo livello, permette di confinare le funzioni profilo secondo la

$$n(\boldsymbol{p}_m) = \frac{1}{2\pi^3} \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1 e^{i\boldsymbol{p}_m \cdot (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1)} \rho_0(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1) \Phi(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1) \ ,$$

avendo così introdotto il *fattore di assorbimento*

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1) = \int \prod_{j=2}^{A} d\boldsymbol{r}_j \rho_0(\boldsymbol{r}_j) \hat{S}^\dagger(\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}_2, ...) \hat{S}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ...)$$

che corrisponde alla quantità vista in 4.1. Per ottenerlo però nella stessa forma fattorizzata occorre esplicitare gli operatori $\hat{S}$ secondo la 2.22

$$\hat{S}^\dagger \hat{S} = \prod_{j=2}^{A} \Big(1 - \theta(z_j - z'_1)\Gamma^\dagger(\boldsymbol{b}'_1 - \boldsymbol{b}_j)\Big)\Big(1 - \theta(z_j - z_1)\Gamma(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_j)\Big)$$

cioè

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1) = \Big[\int d\boldsymbol{r}_2 \rho_0(\boldsymbol{r}_2)\Big(1 - \theta(z_j - z'_1)\Gamma^\dagger(\boldsymbol{b}'_1 - \boldsymbol{b}_j)\Big)\Big(1 - \theta(z_j - z_1)\Gamma(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_j)\Big)\Big]^{A-1} \ ; \tag{4.8}$$

$\boldsymbol{b}_j$ è la componente di $\boldsymbol{r}_j$ trasverssa alla direzione di $\boldsymbol{q}$, il momento trasferito. Si noti che questa fattorizzazione è permessa dalla 4.7.
È la presenza del fattore di assorbimanto che caratterizza la distribuzione di momento mancante facendola dipendere dall'angolo che $\boldsymbol{p}_m$ forma con la direzione di $\boldsymbol{q}$, contrariamente a quanto avviene per le n_{SM} e n_{LOA} in cui compare solo il modulo dell'impulso. Nella 4.8 infatti la componente z nella θ, impedisce la fattorizzazione, insieme alla presenza di $\Gamma(1',2)\Gamma(1,2)$ in cui $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1$ compaiono in maniera tale da non permettere una valutazione agevole della doppia trasformata di Fourier che definisce $W(\boldsymbol{p}_m)$.
Dovendo quindi valutare $n(\boldsymbol{p}_m)$ per direzioni fissate di $\boldsymbol{p}_m$ si prendono in considerazione quelle longitudinali e trasversali rispetto alla direzione di $\boldsymbol{q}$. Dette allora $n(p_z)$ ed $n(p_{ortog}$ le distribuzioni di interesse, si trova in entrambi i casi un concorso della FSI con le ISC nel generare le componenti a p_m elevato che mancano completamente se le particelle sono indipendenti; nella distribuzione trasversa l'effetto è maggiore di quanto si ha nel caso di correlazioni iniziali, mentre in quella longitudinale i due contributi hanno lo stesso ordine di grandezza e quindi sono più difficili da separare.

4.4.1 Il caso del nucleo di ^4He

Il caso dell ^4He si prende in considerazione perché dopo il deutone è il nucleo piè leggero con shell chiuso ma sufficientemente grande perché abbia senso l'analisi utilizzando tecniche a molti corpi quale ad esempio l'espansione in cluster. Una analisi dettagliata di quanto avviene per il deutone è presentata in [?], [?] L'4^He invece è un buon surrogato di nucleo pesante, perché risulta un sistema fortemente legato in cui l'energia di legame per nucleone si avvicina a quella di nuclei grandi e quindi è ragionevole assumerne simili le caratteristiche. Il fatto che abbia shell chiuso ed $A = 4$ rappresenta una notevole semplificazione nei calcoli, che tuttavia rimangono piuttosto involuti in special modo dopo l'introduzione della FSI che non permette nemmeno di utilizzare l'approssimazione del paragrafo precedente in base alla quale è possibile scrivere la PD nella forma 4.6 in cui i termini hanno una diretta interpretazione; in questo caso solo alcuni ne sopravvivono. L'espansione in cluster connessi che abbiamo descritto ci ha condotto all'espressione 4.3 per la distribuzione di impulso mancante del protone estratto dall ^4He, i cui termini riscriviamo esplicitamente:

$$\begin{aligned}
(\tilde{a}) &= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^3}\left[\phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)\right]^3 e^{-(\boldsymbol{r}_1^2+\boldsymbol{r}_1'^2)/2\alpha^2} \\
(\tilde{b}_1) &= \frac{3}{\pi^3\alpha^6}\left[\phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)\right]^2 e^{-(\boldsymbol{r}_1^2+\boldsymbol{r}_1'^2)/2\alpha^2}\int d\boldsymbol{r}_2\eta(\boldsymbol{r}_{12},\boldsymbol{r}'_{12})e^{-\boldsymbol{r}_2^2/2\alpha^2}\Gamma(\mathbf{11'},\mathbf{23}) \\
-(\tilde{c}) &= -\frac{3}{\pi^{9/2}\alpha^9}\left[\phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)\right]^3 e^{-(\boldsymbol{r}_1^2+\boldsymbol{r}_1'^2)/2\alpha^2}\int d\boldsymbol{r}_2 d\boldsymbol{r}_3\eta(\boldsymbol{r}_{23})e^{-(\boldsymbol{r}_2^2+\boldsymbol{r}_3^2)/\alpha^2}\ .
\end{aligned}$$

Tali espressioni si ottengono, come sempre abbiano fatto finora anche per la densità non diagonale correlata, per il calcolo dell'energia, ecc., prendendo come stato fondamentale del nucleo in esame una funzione d'onda fattorizzata in parte spaziale simmetrica con orbitali di oscillatore armonico in onda $1S$ e parte di spin isospin antisimmetrizzata. Questa scelta si fa per effettuare quanti pi calcoli è possibile in maniera analitica; l'approssimazione successiva consiste nel migliorare le funzioni d'onda di particella singola sistemandone il comportamento asintotico errato, derivante dal potenziale di oscillatore armonco che si estende fino all'infinito, con una coda realistica. Si potrebbero poi prendere in considerazione per la funzione d'onda totale una sovrapposizione di stati che tenga in considerazione almeno l'onda D; cosa che, almeno per il caso in esame, non si è rivelata particolarmente rilevante in altri casi. Infine, i calcoli più precisi si ottengono con funzioni d'onda realistiche disponibili solo in forma numerica. In questo caso continueremo con la funzione d'onda utilizzata finora.

Ricordiamo che in ognuno dei termini nella 4.3 il fattore di assorbimento Φ prende la forma:

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) &= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^3} \int d\boldsymbol{r}_2 e^{-\boldsymbol{r}_2^2/\alpha^2} \hat{G}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) \hat{G}(\mathbf{1}', \mathbf{2}) \qquad (4.9)\\ &= \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^3} \int d\boldsymbol{r}_2 e^{-\boldsymbol{r}_2^2/\alpha^2} \left(1 - \theta(r_{2z} - r_{1z})\Gamma^\dagger(\boldsymbol{b}_{12})\right) \left(1 - \theta(r_{2z} - r'_{1z})\Gamma^\dagger(\boldsymbol{b}_{1'2})\right)\end{aligned}$$

L'integrazione dell'equazione precedente può essere portata a termine senz'altro ed è fatta in Appendice; il risultato è una espressione complessa, come lo sono le funzioni profilo, dettaglio di cui va tenuto conto in fase del calcolo della corrispondente distribuzione di impulso mancante, in cui il primo è l'unità e rende agevole l'inclusione o meno del contributo della FSI nel calcolo, regolando il valore della sezione σ_t che compare a fattore degli altri tre termini. La funzione θ dipendente dalle coordinate logitudinali, sulla direzione del momento trasferito $\boldsymbol{q}$, dà luogo dopo l'integrazione alla presenza della nota funzione degli errori $erfc(x)$, che non permette di portare ulteriormente avanti il calcolo analitico nelle variabili che prende come argomento. Le componenti trasverse sono invece ancora scrivibili in forma chiusa.
Il fatto dunque che la distribuzione di impulso mancante risulti anisotropa sulle diverse direzioni che $\boldsymbol{p}_m$ può assumere si vede da queste note e dalla presenza nel secondo termine della 4.3 delle funzioni profilo che generano un problema analogo.

Va quindi scelta una direzione sulla quale calcolare l'espressione per la distribuzione di impulso mancante, che ora si scrive:

$$W(\boldsymbol{p}_m) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}'_1 e^{i\boldsymbol{p}_m \cdot (\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1)} \left(\tilde{a}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) + \tilde{b}_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1) - \tilde{c}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1)\right) \qquad (4.10)$$

Quello che ci si aspetta è, in maniera analoga a quanto ottenuto in [**?**] con altre premesse e riportato parzialmente in Fig. 4.3, è che la distribuzione per direzioni di $\boldsymbol{p}_m$ trasverse all'impulso trasferito $\boldsymbol{q}$ sia dominata dall'interazione nello stato finale, sovrastando completamente la curva relativa alla densità non distorta; l'altro caso di interesse è quello lungitudinale rispetto alla stessa direzione di riferimento , per la quale vale la stessa conclusione ma con effetti comparabili per i due Casi di ρ_{LOA} e ρ_D. In tal caso, le due distribuzioni sono molto simili ed è impossibile estrarre informazioni sulle correlazioni nello stato iniziale, perché i due contributi per le componenti ad alto impulso delle curve sono della stessa entità.

Consideriamo ora il secondo caso menzionato, per $\theta = \theta_{prot} = 0$; otteniamo il risultato ponendo nelle nostre equazioni $\boldsymbol{k}_\perp i = 0$, che ci fa ottenere l'andamento illustrato in Fig. 4.4.

Abbiamo dunque conferma di quanto ci si aspettava per la distribuzione esaminata per l'andamento a k_z elevato. Per k vicino allo 0 troviamo invece una notevole differenza. Ricordiamo che la FSI dà luogo ad una attenuazione del flusso di nueleoni uscenti dal nucleo; questo è il significato del risultato ottenuto per la trasparenza nucleare calcolata nel paragrafo precedente dalla stessa densità utilizzata per il calcolo in Fig 4.4 e che probabilmente è responsabile dell'effetto a piccolo k.

Per il calcolo della stessa, l'aver posto $\boldsymbol{k}_\perp = 0$ significa poter integrare le componenti trasverse della ρ_D in modo analitico, essendo quelle che non sono interessate dalle funzioni θ e/o $erfc(x)$; tuttavia l'elevato numero di termini da tenere in considerazione continua a complicare il problema.

Figura 4.1 – *I termini costituenti la densità distorta di 4.6, nella rapppresentazione diagrammatica già descritta nel Capitolo 3. Si osservi che esistono diagrammi per contributi che, in assenza di FSI, sarebbero non connessi, dal punto di vista delle correlazioni iniziali, quindi nulli.*

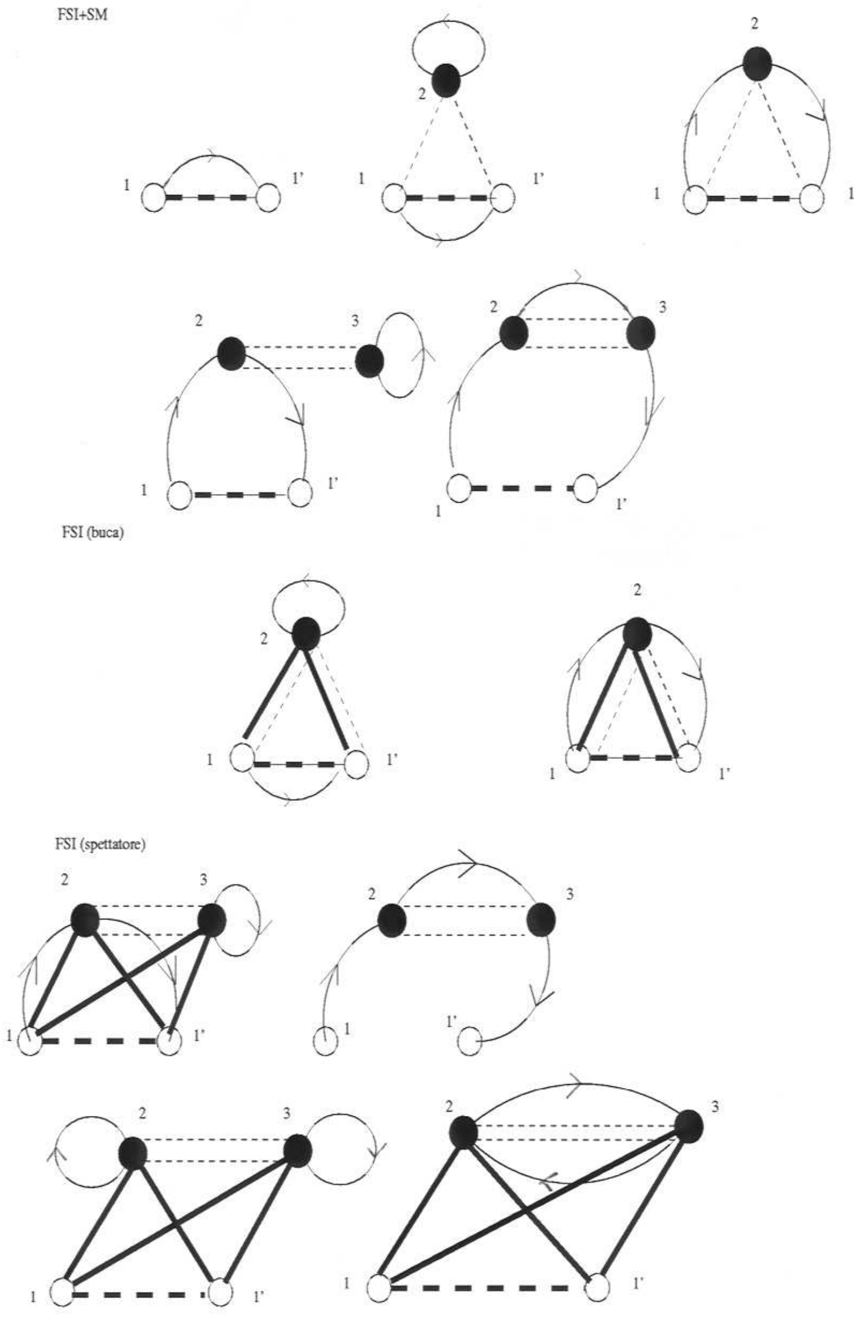


Figura 4.2 – *La distribuzione di momento mancante dipende dalla sua orientazione rispetto alla direzione del momento trasferito; θ è l'angolo relativo dei due vettori. In questi calcoli è stata presa in considerazione la convergenza della serie in Γ di [?],[?], per A=4, senza fare uso di correlazioni nello stato iniziale, ISC.*

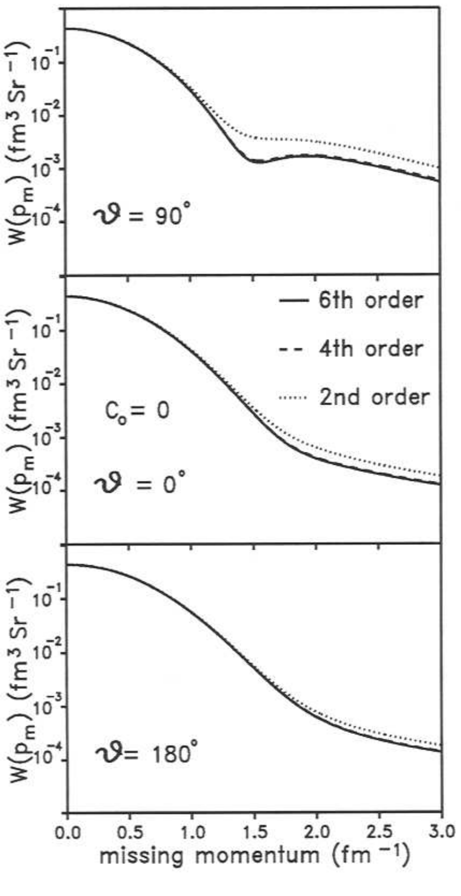


Figura 4.3 – *La distribuzione di impulso distorta longitudinale, confrontata con quella non distorta a tratto pieno, per ^4He. È evidente come le due curve siano comparabili nella regione in cui sono importanti le componenti a corto raggio della ρ incluse nella trattazione, per $k \geq 1.5 - 2.0\ fm$.*

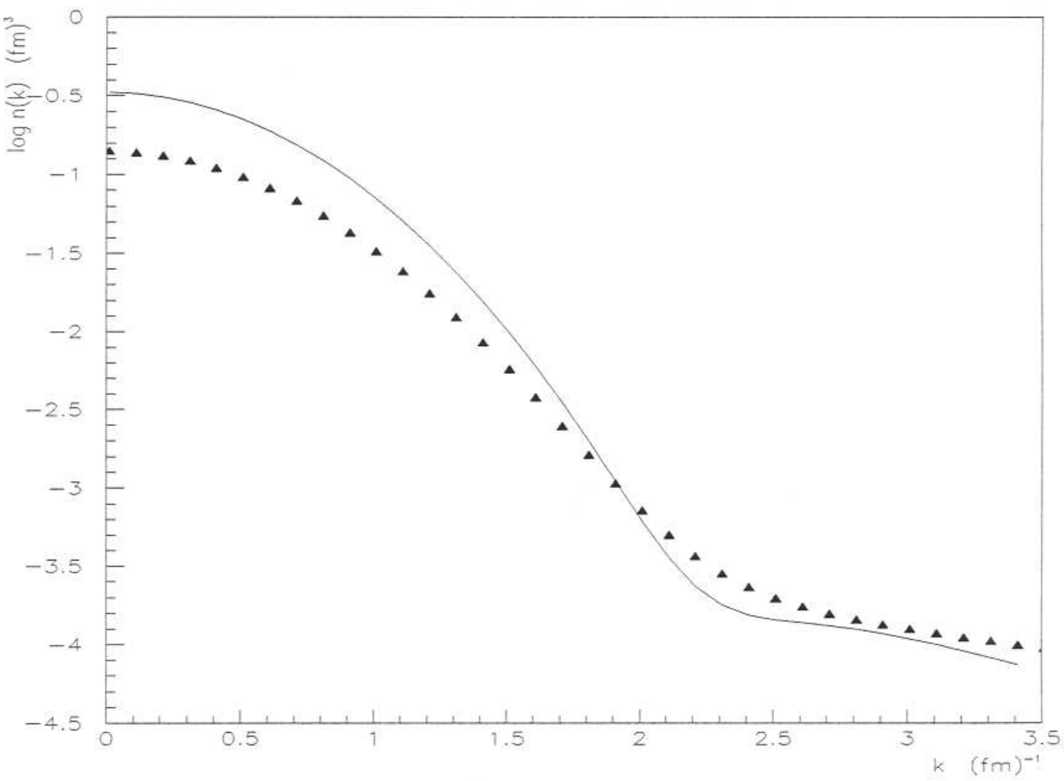


Figura 4.4 – *In questo caso la distibuzione di impulso distorta longitudinale è messa a confronto con quella prevista dal modello a particelle indipendenti.*

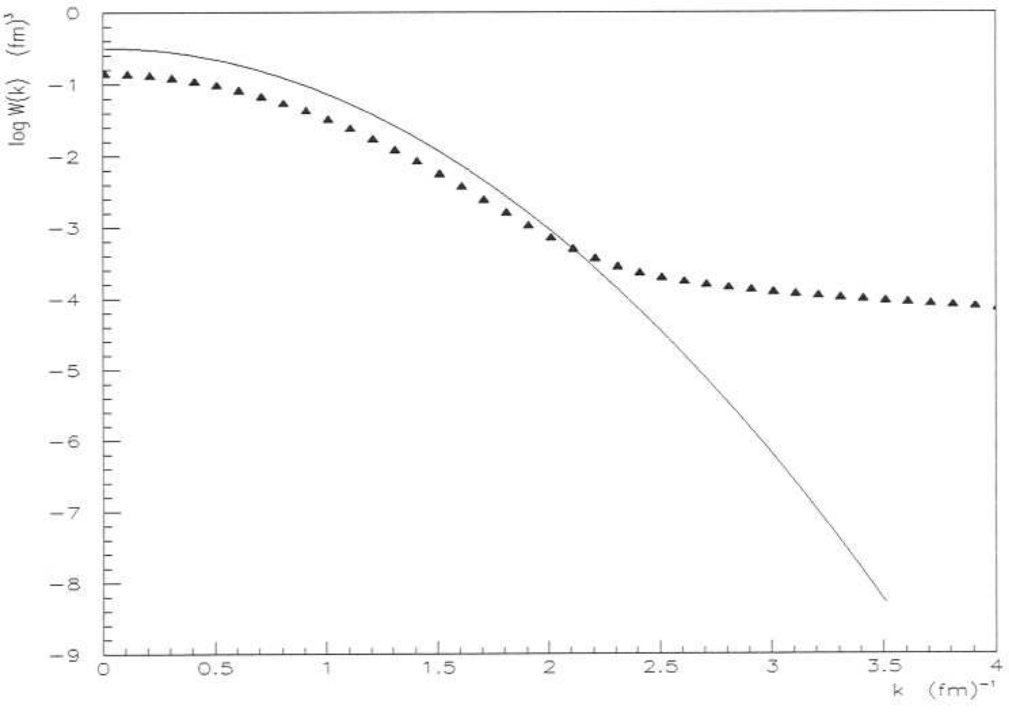
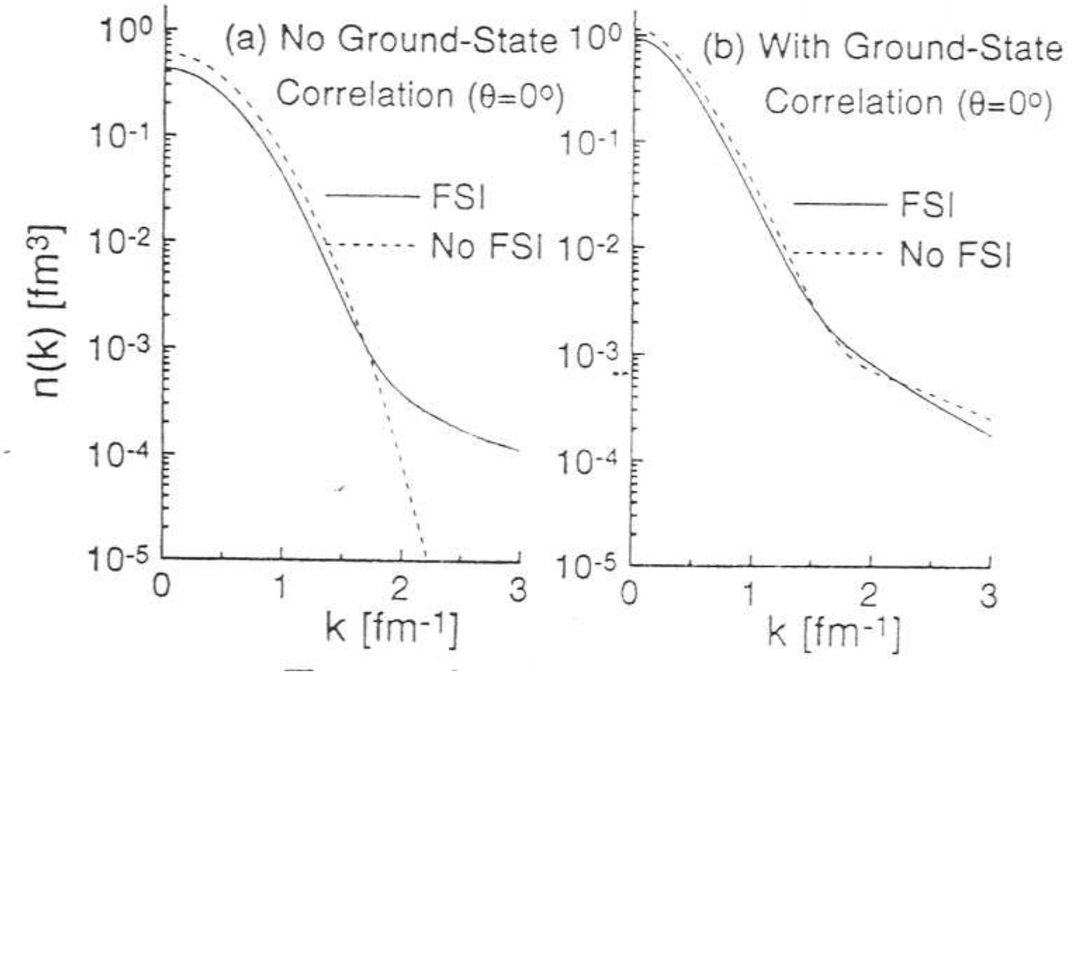


Figura 4.5 – *In questa figura ci sono i calcoli equivalenti alle due figure precedenti, dove però le funzioni d'onda utilizzate non sono quelle derivate dalla espansione in cluster qui adottata, ma quelle realistiche, ottenute numericamente per altra via [?]. Si può in questo modo valutare come i due calcoli siano equivalenti, sebbene quelli precedenti necessitino di un tempo nettamente inferiore, nonché siano applicabili a nuclei in linea di principio comunque complessi, per i quali invece non esistono funzioni d'onda in forma chiusa.*



Capitolo 5

Sommario e conclusioni

Abbiamo preso in considerazione nello sviluppo di questa tesi il processo di diffusione di elettroni su nuclei atomici, nella sua accezione semi-inclusiva $A(e,e'p)X$, per sviluppare un modello della interazione nello stato finale dello stesso. La trattazione di tale interazione viene affrontata di solito sfruttando l'approssimazione della densità locale che, nell'ambito della teoria dello scattering multiplo di Glauber, permette di decidere quanti scattering successivi considerare.

Abbiamo visto che ciò è possibile nell'ambito della espansione in cluster connessi; il metodo adottato risulta in una espansione contenente sia l'effetto di correlazioni sia quello della FSI, che viene implementata tramite l'uso delle funzioni profilo di Glauber; questo, con l'ulteriore vantaggio che a tutti gli ordini l'espansione adottata mantiene la normalizzazione della funzione d'onda e contiene il contributo di tutti gli scattering multipli senza dover decidere quanti sono da tenerne in considerazione.

La stessa espansione viene utilizzata per il calcolo dell'energia dello stato fondamentale del nucleo di ^4He. Questo mette in evidenza il carattere di convergenza della serie adottata, ed il confronto con i risultati di altri tipi di espansione utilizzati in precedenza. Siamo in grado di indagare il diverso comportamento della espansione NC utilizzando funzioni di correlazione e potenziali di interazione nucleone-nucleone differenti, e di concludere che la convergenza della stessa risulta più soddisfacente delle espansioni basate sul numero di particelle/cluster precedentemente analizzate e che sono da escludere contributi derivanti da cluster di tre particelle, almeno per il calcolo dell'energia di legame, se la serie NC viene calcolata al secondo ordine.

Il poter associare ai termini dell'espansione un chiaro significato fisico per mezzo di una rappresentazione diagrammatica in termini di cluster connessi di particelle permette di interpretare la rilevanza dei vari contributi sulla base di quali sono i nucleoni che maggiormente prendono parte al processo; mi riferisco alla distinzione fra contributi di nucleoni spettatori e contributi di buca. A questo proposito, i calcoli della trasparenza nucleare riportati nel capitolo 4 mostrano in che modo il contributo della FSI sia da tenere in considerazione; il risultato di ^4He mostra l'attenuazione del flusso di particelle uscenti; quello per $^{16}0$ distingue anche i contributi di T^H_{FSI} e T^S_{FSI} evidenziando la predominanzadel primo.

Nell'analizzare la componente longitudinale alla direzione di $\boldsymbol{q}$ della distribuzione di momento mancante troviamo un contributo della FSI che si confonde con quello delle correlazioni nello stato iniziale, rendendone eventualmente problematica l'analisi separata dal punto di vista delle osservazioni sperimentali, come ci si aspettava; anche in questo caso le espressioni utilizzate sono quelle derivate dalla espansione NC.

Entrambi i tipi di calcolo descritti finora richiedono un notevole sforzo dal punto di vista numerico; nel caso dell'energia l'integrazione sulle coordinate intrinseche del sistema coinvolge in totale 9 dimensioni da tenere in considerazione non ulteriormente riducibili. La complessità negli altri due casi della trasparenza nucleare e della distribuzione di momento è maggiore nel secondo caso, dove si ha a che fare con funzioni oscillanti che richiedono l'utilizzo di tecniche numeriche miste dal punto di vista dei metodi di integrazione; in particolare si è rivelata particolarmente potente l'applicazione di una routine basata sul sistema quasi random number o QRN , che è la stessa impiegata nei calcoli dell'energia; l'integrazione finale che simula la doppia trasformata di Fourier richiede invece l'utilizzo di metodi standard di integrazione monte carlo.

In conclusione, abbiamo utilizzato una espansione in cluster connessi per il calcolo alcune delle quantità di interesse nella trattazione di un sistema nucleare esteso: l'energia di legame, la trasparenza nucleare, la distribuzione di momento distorta.
Nei casi in cui la trattazione esatta è impossibile è particolarmente utile la espansione in cluster, della quale però non conosciamo la convergenza; i calcoli in questo senso non sono disponibili che all'ordine più basso. Il nucleo di ^4He fornisce invece la possibilità di confronto fra questo metodo ed i risultati ottenibili con tecniche basate, ad esempio, su funzioni d'onda di tipo realistico pressoché esatte. Abbiamo appurato che il metodo qui adottato ha una buona convergenza per il calcolo dell'energia del sistema, permettendoci inoltre di scegliere definitivamente la espansione NO rispetto ad altre; in questo calcolo si ottengono poi i parametri contenuti nelle funzioni d'onda modello in corri- spondenza del minimo dell'energia calcolata, per via variazionale.
Il calcolo della trasparenza nucleare ci ha indicato il contributo di buca come quello dominante, al secondo ordine, per il nucleo di ^4He; argomento, questo, di interesse in quanto piuttosto dibattuto in letteratura a causa dei risultati controversi forniti dai diversi autori.
Nel caso, infine, della distribuzione di momento per ^4He osserviamo che al secondo ordine il comportamento è del tipo atteso; tuttavia, questo calcolo è molto più delicato di quello dell'energia, già di per sé involuto, poiché involve contributi molto piccoli da tenere in considerazione; uno sviluppo della situazione consiste pertanto nella estensione del calcolo ad ordini più elevati della espansione, per mezzo di una estensione del programma numerico adottato fin qui per l'ordine più basso.

Appendici

Appendice A

Coordinate intrinseche

Nel valutare le espressioni per l'energia di un sistema composto è conveniente utilizzare un set appropriato di coordinate, per due ragioni. La prima è che siamo interessati all'energia di legame del sistema, somma fra quella di interazione e quella cinetica relativa al centro di massa del sistema stesso; pertanto, occorre utilizzare un sistema di coordinate *intrinseco*, cioè composto delle $A-1$ coordinate che descrivono il moto intrinseco dei componenti il sistema. Le coordinate adottate per questa trattazione sono usualmente quelle di *Jacobi*. La seconda ragione è che abbiamo a che fare con sistemi correlati, per i quali l'utilizzo di coordinate relative semplifica molto i calcoli, anche dal punto di vista numerico dato che è estremamente complicato implementare il problema, ad esempio, in coordinate cartesiane.

Per un sistema di N particelle, si definiscono le coordinate intrinseche di Jacobi a partire da quelle nel laboratorio, $\boldsymbol{r}_i$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_i &= \boldsymbol{r}_{i+1} - \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i-1}\boldsymbol{r}_j \quad ; \quad \forall\ i = 1, ..., N-1 \\ \boldsymbol{R} &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{r}_j \end{aligned} \tag{A.1}$$

in cui $\boldsymbol{R}$ è evidentemente la coordinata del centro di massa del sistema di particelle identiche. Poichè spesso si utilizza una funzione d'onda in cui la parte spaziale è prodotto di funzioni di oscillatore armonico, è possibile in questo modo isolare il contributo all'energia cinetica del centro di massa omettendo il fattore $e^{-cost \cdot R^2}$ che vi compare. Ovvero, integrandolo, dato che resta normalizzato ad 1.

Per quanto riguarda invece le coordinate relative, queste sono definite chiaramente da

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j \ ;$$

è utile passare dalle Jacobi alle relative; per il caso di $N = 4$ le coordinate relative sono sei e in funzione delle A.1 si leggono:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{12} &= -\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{r}_{13} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{23} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{r}_{14} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \frac{1}{3}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \\
\boldsymbol{r}_{24} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \frac{1}{3}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \\
\boldsymbol{r}_{34} &= \frac{2}{3}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}
\end{aligned}
$$

in cui $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}$ ed è utile la relazione

$$
\sum_{(ij)} r_{ij}^2 = 2u^2 + \frac{8}{3}v^2 + 3w^2 \ ;
$$

infatti la parte spaziale dello stato fondamentale di ${}^4He$ risulta in queste coordinate:

$$
\psi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = e^{-(2u^2 + \frac{8}{3}v^2 + 3w^2)/2\alpha^2}
$$

L'espressione per l'energia cinetica in funzione delle coordinate relative si ricava a partire dalla

$$
T = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N} \nabla_{u_i}^2 - \frac{\hbar^2}{2Nm}\nabla_R^2 \ ,
$$

dalla quale si toglie la parte relativa alla coordinata $\boldsymbol{R}$ del centro di massa; si ottiene così la forma finale:

$$
\begin{aligned}
T = & - \frac{\hbar^2}{m}\sum_{(ij)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r_{ij}^2} + \frac{2}{r_{ij}}\frac{\partial}{\partial r_{ij}} \right] + \\
& - \frac{\hbar^2}{m}\sum_{(ijk)} \Big[\frac{r_{ij}^2 + r_{jk}^2 + r_{ik}^2}{2r_{ij}r_{jk}} \frac{\partial}{\partial r_{ij}}\frac{\partial}{\partial r_{jk}} + \frac{r_{jk}^2 + r_{ki}^2 + r_{ij}^2}{2r_{jk}r_{ki}} \frac{\partial}{\partial r_{jk}}\frac{\partial}{\partial r_{ki}} + \\
& \qquad + \frac{r_{ki}^2 + r_{ij}^2 + r_{jk}^2}{2r_{ki}r_{ij}} \frac{\partial}{\partial r_{ki}}\frac{\partial}{\partial r_{ij}} \Big]
\end{aligned}
$$

in cui

$$
(ij) \ \in \ \{ \ (12), (13), (23), (14), (24), (34) \ \}
$$

e

$$
(ijk) \ \in \ \{ \ (123), (124), (134), (234) \ \} \ .
$$

Appendice B

Espansione in cluster connessi

Mostriamo come si ottiene, al primo ordine in η, l'espressione 3.12 di ρ_{LOA}; in particolare vediamo come questa contenga solo termini rappresentabili con grafici connessi e come la normalizzazione della ρ_0 venga mantenuta, in questa approssimazione.

A partire dalla 3.4 abbiamo

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{O} \rangle &= \frac{\langle \phi | \prod (1 + \eta(ij, i'j'))\, \hat{O} | \phi' \rangle}{\langle \phi | \prod (1 + \eta(ij, i'j'))\, | \phi' \rangle} = \\
&= \langle \phi | \hat{O} | \phi' \rangle + \langle \phi | \sum_{(i,j<i',j')} \eta(ij, i'j') \hat{O} | \phi' \rangle - \langle \phi | \hat{O} | \phi' \rangle \langle \phi | \sum_{ij} \eta(ij, ij) | \phi' \rangle \\
&= (a) + (b) + (c)
\end{aligned} \tag{B.1}
$$

con $\eta(ij, lk) = f(ij) f(lk) - 1$ funzioni di correlazione dipendenti solo dalla distanza. Esplicitando l'operatore $\hat{O}$ utilizzando la 3.10, i tre termini nella **??** valgono

$$
\begin{aligned}
(a) &= \langle \phi | \sum_i \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) | \phi(1, .., i', .., A) \rangle = \\
&= \sum_\alpha \langle \alpha(1) | \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r}'_1 - \boldsymbol{r}) | \alpha(1') \rangle = \\
&= \sum_\alpha \int d\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}'_1 \varphi^\star_\alpha(x_1) \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r}'_1 - \boldsymbol{r}) \varphi_\alpha(x'_1) \;\; = \\
&= \sum_\alpha \varphi^\star_\alpha(x_1) \varphi_\alpha(x'_1) = \\
&= \sum_a \varphi^\star_a(\boldsymbol{r}) \varphi_a(\boldsymbol{r}') \sum_{\sigma_1, \tau_1} \chi^\dagger_{\sigma_1} \chi^\dagger_{\tau_1} \chi_{\sigma_1} \chi_{\tau_1} \;\; = \;\; 4 \;\rho_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \\
(b) &= \langle \phi | \sum_{(i<j)} \eta(ij, ij) \sum_{k \neq i,j} \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r}'_k - \boldsymbol{r}') | \phi(1, .., k', .., A) \rangle \\
&\quad + \langle \phi | \sum_{(i,i'<j)} \eta(ij, i'j) \delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r}'_i - \boldsymbol{r}') | \phi(1, .., i', .., A) \rangle \\
&= (b^1) + (b^2) \;\; = \;\; (b^1) + (b^2_L) + (b^2_U) \\
(c) &= \frac{1}{2} \sum_\alpha \langle \alpha(1) | \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) | \alpha(1') \rangle \sum_{\beta,\gamma} \langle \beta(2) \gamma(3) | \eta(23, 23) | \beta(2) \gamma(3) \rangle_a =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\langle\alpha(1)|\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})|\alpha(1')\rangle \sum_{\beta,\gamma\neq\alpha}\langle\beta(2)\gamma(3)|\eta(23,23)|\beta(2)\gamma(3)\rangle_a + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\langle\alpha(1)|\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})|\alpha(1')\rangle\ 2\sum_{\gamma}\langle\alpha(2)\gamma(3)\eta(23,23)|\alpha(2)\gamma(3)\rangle_a \\
&= (c_U)+(c_L)
\end{aligned}
$$

in cui facciamo uso della proprietà

$$
\langle\phi|\hat{O}(1)|\phi\rangle \ = \ \sum_{\alpha}\langle\alpha(1)|\hat{O}|\alpha(1)\rangle \ ,
$$

visto che le nostre $\phi(x_1,...,x_1)$ sono determinanti di Slater; $|\alpha(1)\rangle = \varphi_\alpha(x_1)$ e $\alpha = \{l,m,n;\sigma;\tau\}$. Gli indici U ed L stanno ad indicare i termini *unlinked* e quelli *linked*, rispettivamente; le connessioni possono essere date sia dalle somme sugli stati sia da integrali sulle variabili; infine $|\alpha\beta\rangle_a$ significa $|\alpha(1)\beta(2)-\beta(1)\alpha(2)\rangle$. Per (b^2) si può subito scrivere:

$$
\begin{aligned}
(b^2) &= \sum_{\alpha\neq\beta}\langle\alpha(1)\beta(2)|\eta(12,1'2)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}'_1-\boldsymbol{r})|\alpha(1')\beta(2)\rangle = \\
&= 4\int d\boldsymbol{r}_2\ \big(f(12)f(1'2)-1\big)\ \big(4\rho_0(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1)\rho_0(\boldsymbol{r}_2)-\rho_0(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\rho_0(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}'_1)\big)\ ,
\end{aligned}
$$

che coincide con il secondo termine della 3.12; il primo termine lo abbiamo già individuato nella (a). Invece in (b^2), considerando la scrittura del determinante

$$
\phi_A = |\phi(x_1,...,x_A)\rangle = \frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{\alpha}(-1)^{P_\alpha}\varphi_\alpha(x_1)\phi^{\alpha}_{A-1}
$$

in cui ϕ^{α}_{A-1} non contiene mai lo stato α, (P è una permutazione) si ottiene

$$
\begin{aligned}
(b^2) &= \frac{1}{2}\langle\phi|\sum_{i\neq j}\eta(ij,ij)\sum_{k\neq i,j}\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r})|\phi\rangle = \\
&= \frac{A(A-1)(A-2)}{2}\langle\phi|\eta(23,23)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})|\phi\rangle = \\
&= \frac{(A-1)(A-2)}{2}\sum_{\alpha,\beta}\int d\boldsymbol{r}_1\varphi^\star_\alpha(x_1)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})\varphi_\beta(x_1)\ \cdot \\
&\quad \cdot\int\prod_{j=2}^{a}d\boldsymbol{r}_j\ \eta(23,23)\ \phi^{\alpha\star}_{A-1}\phi^{\beta}_{A-1}\ (-1)^{P_\alpha+P_\beta} \\
&= \frac{(A-1)(A-2)}{2}\sum_{\alpha}|\varphi_\alpha(x)|^2\int\prod_{j}d\boldsymbol{r}_j\ \left|\phi^{\alpha\star}_{A-1}\right|^2\ \eta(23,23)+ \\
&\quad -\frac{(A-1)(A-2)}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}\varphi^\star_\alpha(x)\varphi_\beta(x)\int\prod_{j}d\boldsymbol{r}_j\ \phi^{\alpha\star}_{A-1}\eta(23,23)\phi^{\beta}_{A-1} \\
&= (b^2_U)+(b^2_L)\ .
\end{aligned}
$$

Allora

$$
(b^2_U) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}|\varphi_\alpha(x)|^2\sum_{\beta,\gamma\neq\alpha}\langle\beta\gamma|\eta(23,23)|\beta\gamma\rangle_a
$$

cancella esattamente (c_U); con questo abbiamo eliminato i termini sconnessi.

Invece, considerando $(b_L^2) - (c_L)$ e facendo uso di

$$\sum_{a \neq b} \varphi_a^\star(1)\varphi_a(2)\varphi_b^\star(2)\varphi_b(1') + \sum_a \varphi_a^\star(1)\varphi_a(2)\varphi_a^\star(2)\varphi_a(1') =$$

$$= \sum_a \varphi_a^\star(1)\varphi_a(2) \sum_b \varphi_b^\star(2)\varphi_b(1')$$

si ottiene il terzo termine in 3.12.

Osserviamo infine come la parte diagonale dell'espressione 3.12 sia tale da mantenere la normalizzazione dell'equivalente di modello a shell, ovvero il primo termine che vi compare. A tale scopo è sufficiente riscrivere i tre termini esplicitando le definizioni di ρ_0 ottenendo nel caso di ^4He, rispettivamente:

$$\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha^3} e^{-\frac{r_1^2}{\alpha^2}} \;;$$

$$\frac{12}{\pi^3\alpha^6} \int d\boldsymbol{r}_2 \;\; \left[f^2(12) - 1\right] \; e^{-\frac{r_1^2 + r_2^2}{\alpha^2}} \;;$$

$$-\frac{12}{\pi^{\frac{9}{2}}\alpha^9} \int d\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 \;\; \left[f^2(23) - 1\right] \; e^{-\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{\alpha^2}} \;.$$

La normalizzazione del primo termine si ottiene integrando in $\boldsymbol{r}_1$ ed è 4; per quanto riguarda gli altri due, integrando il secondo in $\boldsymbol{r}_3$ ed il terzo in $\boldsymbol{r}_1$, si ottengono due contributi uguali ed opposti, scambiando $\boldsymbol{r}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{r}_2$ e $\boldsymbol{r}_2 \leftrightarrow \boldsymbol{r}_3$ nel terzo, lasciando cosí ancora il valore 4. La conclusione è valida anche in generale. Per la derivazione delle figure del paragrafo 3.3 ρ_{LOA} è stata normalizzata ad 1.

B.1 Diagrammi

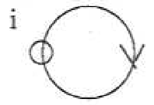
Descriviamo ora le regole con cui si costruiscono i grafici che rappresentano i contributi alla densità. Si associa ciascun elemento nelle 3.12 con una unità di base del grafico in questo modo:

- correlazione binaria nello stato iniziale (ISC):

$f(r_{ij})$

- correlazione di SM in $\boldsymbol{r}_i$:

$\int d\boldsymbol{r}_i \; \rho_0(\boldsymbol{r}_i)$



- particella in $\boldsymbol{r}_i$:

$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$

• correlazione di SM fra $\boldsymbol{r}_i$ e $\boldsymbol{r}_j$:

$$\int d\boldsymbol{r}_i d\boldsymbol{r}_j \rho_0(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j)$$

• una particella in $\boldsymbol{r}_i$ ed una in $\boldsymbol{r}_{ij}$, correlate:

$$\int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_i)\delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_j)\rho_0(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \rho_0(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j)$$

• particella e correlazione SM in $\boldsymbol{r}_i$:

$$\rho_0(\boldsymbol{r}_i)$$

Appendice C

Funzioni profilo

Deriviamo ora una parametrizzazione delle funzioni profilo introdotte nel Cap. 1 ed utilizzate nel Cap. 4, a partire dal teorema ottico per la sezione d'urto totale di un processo di scattering σ_t.
σ_t si può infatti mettere in relazione, nel caso di un potenziale di interazione reale, con l'ampiezza di diffusione f grazie appunto all'espressione fornita dal teorema ottico:

$$\frac{k}{4\pi}\sigma_t = \ Im \ \{f(0)\} \tag{C.1}$$

con $\boldsymbol{k}$ l'impulso del proiettile prima e dopo l'interazione, $f(0)$ l'ampiezza di scattering *in avanti*, ed utilizzando:

$$\sigma_t = \int d\Omega \ \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega \ \left|f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\right|^2 \ .$$

Per descrivere un processo in cui la diffusione sia accompagnata da assorbimento si utilizza un potenziale di interazione complesso, la cui parte immaginaria è responsabile di questo effetto ulteriore; l'espressione del teorema ottico si ricava allo stesso modo e si trova che basta rimpiazzare

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_{in} \ ,$$

la sezione d'urto totale con la somma di quella di diffusione elastica e quella inelastica di assorbimento. Invertiamo la relazione 2.19 fra ampiezza di scattering e funzione profilo, cioè scriviamo

$$\Gamma(\boldsymbol{b}) = \frac{1}{2\pi ik}\int d^2\boldsymbol{q} \ e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}} f(\boldsymbol{q}) \ ; \tag{C.2}$$

possiamo dedurre la forma di Γ se, a partire da C.1, scriviamo

$$\alpha_{pn} = \frac{Im \ f(0)}{Re \ f(0)}$$

da cui

$$f(0) = \frac{ik\sigma_t}{4\pi}\,(1 - i\alpha_{pn}) \ ;$$

se ora si prende la sezione d'urto elastica con un andamento esponenziale di parametro B, che è dell'ordine di 0.5 fm alle alte energie, cioè

$$\frac{1}{k^2}\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \sigma_{el}\frac{B}{\pi}e^{-B\boldsymbol{q}^2} = \frac{1}{k^2}|f(0)|^2 e^{-B\boldsymbol{q}^2}$$

la quale, integrata su $k^2 d\Omega = d^2\boldsymbol{q}$ dà

$$\sigma_{el} = \frac{\sigma_t^2}{16\pi B}(1+\alpha^2) \ ,$$

si ottiene

$$f(\boldsymbol{q}) = f(0)\ e^{-B\boldsymbol{q}^2/2} = \frac{ik\sigma_t}{4\pi}(1 - i\alpha_{pn})\ e^{-B\boldsymbol{q}^2/2} \ .$$

Pertanto la C.2 fornisce per il profilo:

$$\Gamma(\boldsymbol{b}) = \frac{\sigma_t}{4\pi B}(1 - i\alpha_{pn})\ e^{-\boldsymbol{b}^2/2B} \ . \tag{C.3}$$

C.1 Fattori di assorbimento

Il fattore di assorbimento che interviene in tutte le trattazioni della interazione nello stato finale in termini di scattering multiplo viene impiegato nella forma 4.9:

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}'_1) \ &= \ \frac{1}{\pi^{3/2}\alpha^3}\int d\boldsymbol{r}_2 e^{-\boldsymbol{r}_2^2/\alpha^2}\left(1-\theta(r_{2z}-r_{1z})\Gamma^\dagger(\boldsymbol{b}_{12})\right)\cdot \\ &\cdot\left(1-\theta(r_{2z}-r'_{1z})\Gamma(\boldsymbol{b}_{1'2})\right) \ . \end{aligned} \tag{C.4}$$

Per calcolare la $W(\boldsymbol{p}_m)$ è necessario integrare sulle variabili

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} \ &= \ \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1 \ ; \\ \boldsymbol{R} \ &= \ \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}'_1\right) \ .\end{aligned}$$

Conviene allora eliminare l'ulteriore integrazione presente nella C.4 ed esprimere il risultato in funzione delle nuove variabili $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{R}$. Il risultato è una espressione complessa e non analitica nelle coordinate longitudinali:

$$\begin{aligned}Re\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R}) = 1 \ &- \ A_1 e^{-C_1(t^2+s^2/4+\boldsymbol{t}\cdot s)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ erfc\left(\frac{\zeta}{\alpha}+\frac{z}{2\alpha}\right)+ \\ &- \ A_1 e^{-C_1(t^2+s^2/4-\boldsymbol{t}\cdot s)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ erfc\left(\frac{\zeta}{\alpha}-\frac{z}{2\alpha}\right)+ \end{aligned}$$

$$+A_2 e^{-(C_2/2+1/8C_3B^2)s^2-(2C_2-1/2C_3B^2)t^2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ erfc\left(\frac{(Max\left\{\zeta+z/2,\zeta-z/2\right\})}{\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned}Im\Phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R}) \ &= \ \alpha_{pN}A_1 e^{-C_1(t^2+s^2/4+\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{s})}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ erfc\left(\frac{\zeta}{\alpha}+\frac{z}{2\alpha}\right)+ \\ &-\alpha_{pN}A_1 e^{-C_1(t^2+s^2/4-\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{s})}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ erfc\left(\frac{\zeta}{\alpha}-\frac{z}{2\alpha}\right)+\end{aligned}$$

dove abbiamo dostinto per le coordinate le componenti trasversali e logitudinali sulla direzione del momento trasferito:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{s}, z) \\ \boldsymbol{R} &= (\boldsymbol{t}, \zeta) \end{aligned}$$

e *erfc* non è la funzione degli errori di Gauss ma il suo complemento a $\sqrt{\pi}$, mentre le costanti A_i, B_i che compaiono sono funzioni del parametro α dell'oscillatore armonico e B delle funzioni profilo; in particolare le A_i che sono a fattore di tutti i termini sono proporzionali alla sezione d'urto totale protone-nucleone $\sigma_t = 0.043\ barn$ che, quindi, governa l'intensità dell'interazione nello stato finale. In realtà il valore di σ_t non è costante nel range di energia utilizzata negli esperimenti di scattering $p - N$, ma nelkla regione che ci interessa, che è quella di alcuni GeV per l'energia del centro di massa del sistema $p - N$ il valore è quello indicato. L'andamento delle sezioni d'urto fra nucleoni è mostrato nelle figure del paragrafo 2.4.

Si osservi che il calcolo delle due distribuzioni di $W(\boldsymbol{p}_{mz})$ $W(\boldsymbol{p}_{m\perp})$ passa per l'integrazione delle quantità qui descritte, pertanto ci aspettiamo comportamenti differenti nei due casi, differente com'è la dipendenza dalle rispettive componenti longitudinali e trasversali sia della Φ qui sopra sia delle funzioni profilo che sono contenute nelle espressioni previste dalla espansione NC.