1. Sia data la funzione $w^3 = z$, e si supponga che per $z = 1$ si abbia $w = 1$. Se partendo dal punto $z = 1$ si compie un giro in senso antiorario attorno all'origine, quando si torna la prima volta in $z = 1$ quanto vale w?

[$w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$]

Se si compiono altri giri?

[$w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ poi si ripetono: $w_3 = 1 \equiv w_0$ ...]

In senso orario?

[$w_{-1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv w_2$; $w_{-2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv w_1$; $w_{-3} = 1 \equiv w_0$ poi si ripetono ...]

Se il percorso non racchiude l'origine?

[non cambia la fase, quindi non cambia $w = 1 \equiv w_0$]

2. Sia data la funzione $w = (1 - z^2)^{1/2}$ e per $z = 0$ si abbia $w = 1$. Se si compie, partendo da $z = 0$, un giro completo in senso antiorario tale da racchiudere il punto $z = 1$ ma non il punto $z = -1$, quando si torna in $z = 0$ quanto vale la w?

[$w_1 = -1$]

Compiendo più giri?

[i valori si ripetono: $w_2 = 1 \equiv w_0$ ...]

E se si compie un giro che racchiude entrambi i punti?

[$w = 1 \equiv w_0$]

nessuno dei due punti?

[non cambia la fase, quindi non cambia $w = 1 \equiv w_0$]

Funzioni elementari. Dimostrare che:

$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

[uso le formule di eulero]

$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$

[uso gli sviluppi in serie]

$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$

$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$

[uso le formule di eulero]

Dimostrare che gli zeri di $\sin(z)$ e $\cos(z)$ sono tutti reali, e determinarli.
[sostituisco $z = x + iy$]

Dimostrare che

$$\begin{aligned} &\sin(-z) = -\sin(z) \\ &\cos(-z) = \cos(z) \end{aligned}$$

[uso le formule di eulero]

Dimostrare che

$1 - \tanh^2(z) = \mathrm{sech}^2(z)$
[uso le formule di eulero ricordando che $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ e che $\mathrm{sech} = \frac{1}{\cosh}$]

$\sin(iz) = i\sinh(z)$
$\cos(iz) = \cosh(z)$
[uso le formule di eulero]

$\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$
[uso le formule di eulero]

Dimostrare che, se si considera il valore principale:

$\sin^{-1}(z) = -i\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$
[uso le formule di eulero sulla formula inversa poi ricavo e^{iw}]

$\tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$
[uso le formule di eulero sulla formula inversa poi ricavo e^{2w}]

Dimostrare che z^2 è continua in z_0. Dimostrare invece che

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

non è continua in z_0 se $z_0 \neq 0$.
[uso la definizione di continuità]

La funzione $\frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$ è continua in $z = i$?
[uso la definizione di continuità e trovo che ha discontinuità eliminabile]

Per quali valori di z è continua la funzione $\csc(z)$?
[$z \neq n\pi$ ossia non per gli zeri di $\sin z$]

Determinare il dominio di definizione, analiticità, e le singolarità delle funzioni:

$\frac{z^2-3z}{z^2+2z+2}$
[$z \neq -1 \pm i$; è analitica perché lo sono numeratore e denominatore]

$\frac{\ln(z+3i)}{z^2}$
[$z \neq 0$; $z = -3i$ è un punto di diramazione]

$\sin^{-1}(1/z)$
[$z \neq 0$]

$\sqrt{z(z^2+1)}$
[$z \in \mathcal{C}$; $z = 0$ e $z = \pm i$ sono punti di diramazione; è analitica]

$\frac{\cos(z)}{(z+i)^3}$
[$z \neq -i$; è analitica perché lo sono numeratore e denominatore]

Determinare le singolarità al finito e all'infinito di

$$\frac{(z+3i)^2}{(z^2-2z+5)^2}$$

[$z \neq 1 \pm 2i$; è analitica perché lo sono numeratore e denominatore]

Dimostrare che e^{z^2} ha una singolarità essenziale all'infinito. La funzione è analitica?
[è analitica (vedi pag.31)]