1. Calcolare

$$\int_l \frac{\overline{z}}{z^2} dz$$

essendo l il segmento $\overline{P_1 P_2}$ con $P_1 \equiv (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})$, $P_2 \equiv (1+i)$.

Parametrizzando il percorso su l si ha $z = (1+i)t$ per $1/2 \leq t \leq 1$ e $dz = (1+i)dt$ quindi

$$\int_l \frac{\overline{z}}{z^2} dz = \int_{1/2}^{1} \frac{(1-i)t}{(1+i)^2 t^2}(1+i)dt = \frac{1-i}{1+i}\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{t} = \frac{-2i}{2}[\log 1 - \log 1/2] = -i \log 2$$

2. Calcolare

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

$$\oint_\gamma (z - z_0)^n dz$$

essendo γ la circonferenza di centro z_0 e raggio R.

Sono le formule di Cauchy di pag.43-45 con z_0 interno alla curva γ di integrazione. Nel primo integrale $n = 1$ quindi vale $2\pi i$, mentre il secondo per $n \neq -1$ vale zero.
Dimostriamolo: su γ si ha $z = z_0 + Re^{i\theta}$ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ quindi

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

$$\oint_\gamma (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{in\theta} iRe^{i\theta} d\theta = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta =$$

$$= iR^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1}\left[e^{i(n+1)2\pi} - 1\right] = 0$$

3. Calcolare

$$\int_{1-i}^{2+i} 3z^2 + 2z dz$$

Sostituendo $z = x + iy$ la funzione è $(3x^2 - 3y^2 + 2x) + i(6xy + 2y)$ si dimostra con semplicità che è analitica in tutto $\mathcal{C}$, infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + 2 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Una sua primitiva è $z^3 + z^2$ quindi

$$\int_{1-i}^{2+i} 3z^2 + 2z dz = z^3 + z^2 \Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7 + 19i$$

4. Calcolare

$$\oint_\sigma \frac{1}{z} dz$$

essendo σ la circonferenza $|z| = 3/2$ nel domino $\mathcal{D}$ corona circolare $1 < |z| < 2$.

È sempre la formula di Cauchy di pag.45 con $z_0 = 0$ interno alla curva σ di integrazione. Poiché $n = 1$ l'integrale vale $2\pi i$.
Dimostriamolo: su σ si ha $z = \frac{3}{2}e^{i\theta}$ per $0 \le \theta \le 2\pi$ e $dz = i\frac{3}{2}e^{i\theta}d\theta$ quindi

$$\oint_\sigma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{3}{2}e^{i\theta}} i\frac{3}{2}e^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

5. Per il ramo di $\sqrt{z}$ per cui $\sqrt{4} = 2$, calcolare

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

essendo γ la semicirconferenza $|z| = 4$ con $\Im\{z\} > 0$.

Ci interessa il valore principale di $\sqrt{z}$

$$v.p.\{\sqrt{z}\} = \left\{\sqrt{\rho e^{i(\theta+2n\pi)}}\right\}_0 = \sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$$

su γ si ha $z = 4e^{i\theta}$ per $0 \le \theta \le \pi$ e $dz = i4e^{i\theta}d\theta$ $\sqrt{z} = 2e^{i\theta/2}$ quindi

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{i4e^{i\theta}d\theta}{2e^{i\theta/2}} = 2i\int_0^\pi e^{i\theta/2}d\theta = 2i\frac{2}{i}e^{i\theta/2}\Big|_0^\pi = 4(e^{i\pi/2} - 1) = 4(i-1)$$

Potevamo osservare che la funzione è analitica e che $2\sqrt{z}$ è una primitiva di $1/\sqrt{z}$ in tal caso si ha

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_4^{-4} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\big|_4^{-4} = 2(\sqrt{-4} - \sqrt{4}) = 2(2i-2) = 4(i-1)$$

6. Per il valore principale di $\sqrt{z}$, calcolare

$$\oint_\sigma \sqrt{z} dz$$

essendo σ la frontiera della corona circolare $r < |z| < R$.

Il dominio considerato non è di monodromia per $\sqrt{z}$ *in quanto internamente a* $|z| = r$ *e* $|z| = R$ *c'è il punto di diramazione* $z = 0$. *Tagliando il semiasse reale positivo il dominio diventa di monodromia e di olomorfismo per* $\sqrt{z}$ *e per il teo di cauchy si ha*

$$\int_{C_R} \sqrt{z}dz + \int_{B'}^{A'} \sqrt{z}dz + \int_{-C_r} \sqrt{z}dz + \int_{A}^{B} \sqrt{z}dz = 0$$

e quindi:

$$\int_{C_R} \sqrt{z}dz + \int_{-C_r} \sqrt{z}dz = \int_{A'}^{B'} \sqrt{z}dz - \int_{A}^{B} \sqrt{z}dz$$

Il testo ci richiede di calcolare la somma dei primi due:
su C_R*:* $z = Re^{i\theta}$ *;* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *;* $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ *;* $\sqrt{z} = \sqrt{R}e^{i\theta/2}$
su $-C_r$*:* $z = re^{i\theta}$ *;* $2\pi \geq \theta \geq 0$ *;* $dz = ire^{i\theta}d\theta$ *;* $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$
quindi

$$\int_{C_R} \sqrt{z}dz + \int_{-C_r} \sqrt{z}dz = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{R}e^{i\theta/2}iRe^{i\theta}d\theta + \int_{2\pi}^{0} \sqrt{r}e^{i\theta/2}ire^{i\theta}d\theta =$$

$$= iR^{3/2}\int_{0}^{2\pi} e^{i3\theta/2}d\theta - ir^{3/2}\int_{0}^{2\pi} e^{i3\theta/2}d\theta = i\left.\frac{e^{i3\theta/2}}{i3/2}\right|_{0}^{2\pi}\left(R^{3/2} - r^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(e^{i3\pi} - 1\right)\left(R^{3/2} - r^{3/2}\right) = -\frac{4}{3}\left(R^{3/2} - r^{3/2}\right)$$

Più semplicemente potevamo calcolare gli ultimi due:
su AB: $z = \rho$ *;* $r \leq \rho \leq R$ *;* $dz = d\rho$ *;* $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}$
su A'B': $z = \rho^{2\pi i}$ *;* $r \leq \rho \leq R$ *;* $dz = d\rho$ *;* $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}e^{i\pi} = -\sqrt{\rho}$
quindi

$$\int_{A'}^{B'} \sqrt{z}dz - \int_{A}^{B} \sqrt{z}dz = \int_{r}^{R} -\sqrt{\rho}d\rho - \int_{r}^{R} \sqrt{\rho}d\rho = -2\left.\frac{\rho^{3/2}}{3/2}\right|_{r}^{R} = -\frac{4}{3}\left(R^{3/2} - r^{3/2}\right)$$

7. Calcolare

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{-z+i}}{(z+3)(z-i)}dz$$

Dopo aver notato che $e^{-z+i}/(z+3)$ *è analitica nel dominio di interesse e che* $z_0 = i$ *vi appartiene, applichiamo la formula integrale di Cauchy di pag.48*

$$\oint_{\sigma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

ottenendo

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{-z+i}/(z+3)}{z-i}dz = 2\pi i\left\{e^{-z+i}/(z+3)\right\}_{z=i} = 2\pi i e^{-i+i}/(i+3) = \frac{2\pi i}{3+i} = \frac{\pi}{5}(1+3i)$$

8. Calcolare

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{-z+i}}{(z+3)(z-i)^2} dz$$

Come prima, ora peró applichiamo la formula integrale di Cauchy per le derivate di pag.52

$$\oint_\sigma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

ottenendo

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{-z+i}/(z+3)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \left\{ e^{-z+i}/(z+3) \right\}_{z=i} = 2\pi i \left\{ -e^{-z+i} \frac{z+4}{(z+3)^2} \right\}_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{4+i}{8+6i} \right) = -\frac{\pi}{25}(8+19i)$$

9. Calcolare lo sviluppo di Taylor di punto iniziale $z=0$ e $z=1$ per la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

La funzione è definita ed olomorfa in $\mathcal{C}$ tranne che in $z = \pm i$.
Possiamo calcolare i coefficienti c_n utilizzando la definizione o più semplicemente riferirci a serie note.
Nel punto $z=0$ vale $|z^2| < 1$ quindi abbiamo la serie geometrica

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

Nel punto $z=1$ è necessario scomporre in frazioni semplici

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{R_1}{z-i} + \frac{R_2}{z+i}$$

con i residui

$$R_1 = \lim_{z \to +i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

$$R_2 = \lim_{z \to -i} \frac{1}{z-i} = -\frac{1}{2i}$$

devo ottenere serie con i termini z-1 quindi aggiungo e tolgo 1 ai denominatori

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-1+1-i} - \frac{1}{z-1+1+i} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{(1-i)(1+\frac{z-1}{1-i})} - \frac{1}{(1+i)(1+\frac{z-1}{1+i})} \right)$$

vale $|\frac{z-1}{1-i}| < 1$ *e* $|\frac{z-1}{1+i}| < 1$ *ossia* $|z-1| < \sqrt{2}$ *quindi abbiamo le serie geometriche*

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(1-i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-1}{1-i})^n - \frac{1}{(1+i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z-1}{1+i})^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2i}\left(\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\right)(z-1)^n$$

sostituendo $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ *e* $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ *si ha infine*

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2i}\left(\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}e^{-i(n+1)\pi/4}} - \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}e^{i(n+1)\pi/4}}\right)(z-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{\frac{n+1}{2}}}\left(\frac{e^{i(n+1)\pi/4}}{2i} - \frac{e^{-i(n+1)\pi/4}}{2i}\right)(z-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{\frac{n+1}{2}}}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}(z-1)^n$$

10. Calcolare lo sviluppo di Taylor di punto iniziale $z = 1$ per la funzione

$$f(z) = \log z$$

Per poter parlare di derivabilità occorre tagliare il semiasse reale negativo.
applicando la definizione

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

si ha $c_0 = 0$; $c_1 = 1$; $c_2 = -1/2$; $c_3 = 1/3$ *generalizzando* $c_n = (-1)^{n-1}/n$ *quindi*

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$