Laurent

1. Sviluppare $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ in serie di Laurent nella corona circolare $0 < |z-1| < 2$.

****
SOLUZIONE CON IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI *
****

...

****
SOLUZIONE CON LA RICONDUZIONE A SERIE NOTE *
****

Scomponendo $f(z)$ in frazioni semplici, si ha

$$f(z) = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1}$$

dove i residui valgono

$$R_1 = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \lim_{z\to -1} \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}$$

si ha da subito la componente caratteristica

$$\frac{1/2}{z-1}$$

l'altra componente la si riconduce ad una serie di Taylor (punto iniziale $z = 1$) considerando che $|z-1| < 2$

$$-\frac{1/2}{z+1} = \frac{-1/2}{z-1+2} = \frac{-1/2}{2(1+\frac{z-1}{2})}$$

per $|z-1| < 2$ è la serie geometrica

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n}$$

quindi nella corona circolare $0 < |z-1|2 <$ si ha

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$$

2. Stesso esercizio nel dominio $|z-1| > 2$.

****
*SOLUZIONE CON IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI **
****
...
****
*SOLUZIONE CON LA RICONDUZIONE A SERIE NOTE **
****
Ora si cerca la serie, di punto iniziale $z = 1$, che per $|z-1| > 2$ converga alla componente $-\frac{1/2}{z+1}$

$$-\frac{1/2}{z+1} = \frac{-1/2}{z-1+2} = \frac{-1/2}{(z-1)(1+\frac{2}{z-1})}$$

per $|z-1| > 2$ è la serie geometrica

$$-\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^n}$$

quindi per $|z-1| > 2$ si ha

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}$$

3. Studiare i diversi sviluppi di Laurent per la funzione $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ di punto iniziale $z = 0$.

****
*SOLUZIONE CON IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI **
****
...
****
*SOLUZIONE CON LA RICONDUZIONE A SERIE NOTE **
****
Il punto $z = 0$ è regolare, quindi esiste un intorno di $z_0 = 0$ in cui la funzione è sviluppabile in serie di Taylor.
Scomponendo $f(z)$ in frazioni semplici, si ha

$$f(z) = \frac{R_1}{z+2} + \frac{R_2}{z-1}$$

dove i residui valgono

$$R_1 = \lim_{z \to -2} \frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{3}$$

$$R_2 = \lim_{z\to 1} \frac{z+1}{z+2} = \frac{2}{3}$$

Le singolarità sono $z = -2$ e $z = 1$ per cui le regioni di olomorfismo saranno:

$$|z| < 1$$

in cui per la prima componente si ha

$$\frac{1/3}{z+2} = \frac{1/3}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

e per la seconda

$$\frac{2/3}{z-1} = -\frac{2/3}{1-z} = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$1 < |z| < 2$$

in cui per la prima componente si ha ancora

$$\frac{1/3}{z+2} = \frac{1/3}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

mentre ora per la seconda si ha

$$\frac{2/3}{z-1} = \frac{2/3}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{2}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$|z| > 2$$

in cui ora per la prima componente si ha

$$\frac{1/3}{z+2} = \frac{1/3}{z(1+\frac{2}{z})} = \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{z^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

mentre per la seconda si ha ancora

$$\frac{2/3}{z-1} = \frac{2/3}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{2}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

Residui

Calcolare i residui di

1. $f(z) = \frac{z^2+3z-i}{z^2-1}$

   $z=-1$ e $z=1$ sono poli semplici.

$$R(1) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2+3z-i}{z+1} = \frac{4-i}{2}$$
$$R(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{z^2+3z-i}{z-1} = \frac{-2-i}{-2} = \frac{2+i}{2}$$

2. $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$

   $z=2$ è un polo semplice mentre $z=-1$ è un polo di ordine 2.

$$R(2) = \lim_{z\to 2} \frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{e^2}{9}$$
$$R(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\frac{e^z}{z-2} = \lim_{z\to -1} \frac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2} = \frac{-4e^{-1}}{9} = -\frac{4}{9e}$$

Integrali con i residui

1. calcolare $\int_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z} dz$

   Le singolarità $z=0$ e $z=-1$ stanno dentro la circonferenza $|z|=4$.

$$R(0) = 0$$

poiché la singolarità è eliminabile

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z(z+1)} = 1$$

mentre

$$R(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{e^z-1}{z} = \frac{e^{-1}-1}{-1} = 1-1/e$$

Per il teorema dei residui:

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z} dz = 2\pi i(1-1/e)$$

2. calcolare $\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz$

Le singolarità $z = 0$ e $z = i$ stanno dentro la circonferenza $|z - i| = 3/2$ mentre $z = -i$ sta fuori.

$$R(i) = \lim_{z \to i} \frac{e^{1/z^2}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ei}$$

Il calcolo di $R(0)$ è più complesso perché $z = 0$ è una singolarità essenziale, quindi occorrerebbe considerare lo sviluppo di Laurent. Osservando peró che la funzione è pari, mancano i termini dispari, quindi anche $c_{-1} = 0 = R(0)$.
Per il teorema dei residui:

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz = 2\pi i (\frac{1}{2ei}) = \frac{\pi}{e}$$

3. calcolare $\int_{|z|=2} 1/1 + z^4 dz$

Le singolarità $z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ stanno tutte dentro la circonferenza $|z| = 2$.
Calcolando i residui si trova che la loro somma è nulla, ma ciò si poteva capire osservando (geometricamente) che i contributi delle singolarità si elidono a vicenda.
Per il teorema dei residui:

$$\int_{|z|=2} 1/1 + z^4 dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{4} R(e^{i(\pi+2k\pi)/4}) = 0$$

4. calcolare $\int_0^{2\pi} 1/(3 + \cos x + 2 \sin x) dx$

... cambio variabile $z = e^{ix}$ i poli sono $-5i/(2+i)$ e $-i/(2+i)$ la soluzione è $2\pi i R(-i/(2+i)) = \pi$