Sviluppare in serie di Fourier $f(x) = \cos^2 x$ definita per $x \in [-\pi, \pi]$.

Soluzione. *Velocemente:*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

da cui

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

Volendo applicare la definizione l'esercizio è più lungo...
La funzione è pari con valor medio 0.5 quindi:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x \sin nx\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}+2e^0}{4}\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(2+n)x}+e^{i(2-n)x}+e^{-i(2-n)x}+e^{-i(2+n)x}}{8}+\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(2+n)x}+e^{-i(2+n)x}}{8}+\frac{e^{i(2-n)x}+e^{-i(2-n)x}}{8}+\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos(2+n)x+\frac{1}{4}\cos(2-n)x+\frac{1}{2}\cos nx\,dx$$

per $n \neq 2$ si può integrare

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{4}\frac{\sin(2+n)x}{2+n}+\frac{1}{4}\frac{\sin(2-n)x}{2-n}+\frac{1}{2}\frac{\sin nx}{n}\right)_0^{2\pi} = 0$$

per $n = 2$ si ha

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 0+\frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{4}\frac{\sin 4x}{4}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}\right)_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

quindi $a_n = 0$ tranne $a_2 = 1/2$