Esercizio 1

Valutare la trasformata di Fourier del segnale rettangolare (onda quadra) di ampiezza A e periodo T.

Soluzione. *Il segnale può essere descritto, all'interno del periodo, nella forma*

$$f(t) = \begin{cases} A/2, & 0 \leq t < T/2; \\ -A/2, & T/2 \leq t < T. \end{cases}$$

Applicando le formule

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right)\, dt$$

e, per la forma complessa, usando la forma

$$c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

si ricava calcolando (si può notare che la funzione è dispari e a valor medio nullo)

$$f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{A}{k\pi} \left[1 - (-1)^k\right] \sin k\omega t = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2} \frac{A}{k\pi} \left[1 - (-1)^k\right] e^{jk\omega t}$$

essendo ovviamente $\omega = 2\pi/T$.

Esercizio 2

Come nell'esercizio precedente ma considerando il segnale traslato di $T/2$.

Soluzione. *Avendo a che fare con una traslazione di* $-T/2$ *(o* $T/2$*, è equivalente), è sufficiente, per la proprietà di traslazione, moltiplicare per* $e^{-j\frac{2\pi}{T}k\frac{T}{2}} = e^{-jk\pi} = (-1)^k$. *In alternativa è possibile notare che tale traslazione corrisponde ad un'inversione di segno nella funzione.*

Esercizio 3

Valutare la serie di Fourier di un segnale triangolare di ampiezza A e periodo T.

Soluzione. *Il segnale può essere descritto, all'interno del periodo, nella forma*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T}t, & 0 \leq t < T/2; \\ -\frac{2A}{T}t, & T/2 \leq t < T. \end{cases}$$

Applicando le formule

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\,dt$$

e, per la forma complessa, usando la forma

$$c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

si ricava calcolando (si può notare che la funzione è pari)

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2A}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right]\cos k\omega t = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right]e^{jk\omega t}$$

essendo ovviamente $\omega = 2\pi/T$.

Esercizio 4

Come l'esercizio precedente, ma considerando il segnale traslato di $T/4$ verso destra.

Soluzione. *Avendo a che fare con una traslazione di* $-T/4$, *è sufficiente, per la proprietà di traslazione, moltiplicare per* $e^{-j\frac{2\pi}{T}k\frac{T}{4}} = e^{-jk\frac{\pi}{2}}$.

Esercizio 5

Sviluppare in serie di Fourier $f(x) = \cos^2 x$ definita per $x \in [-\pi, \pi]$.

Soluzione. *Si trova*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

quindi $a_n = 0$ *tranne che* $a_2 = 1/2$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} k \sin nx dx = 0$$

In definitiva vale

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

Esercizio 6

Sviluppare in serie di Fourier $f(x) = k$ definita per $x \in (0, \pi)$ prolungando la $f(x) = 0$ per $x \in (-\pi, 0)$.

Soluzione. *Sono soddisfatte le condizioni di Dirichlet. Si trova*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} k dx = k$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} k \cos nx dx = \frac{k}{n\pi} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} k \sin nx dx = \frac{k}{n\pi} [-\cos nx] \Big|_0^{\pi} = \frac{k}{n\pi} \left[(-1)^{n+1} + 1\right]$$

quindi $b_n = 0$ *per* n *pari e* $b_n = 2k/n\pi$ *per* n *dispari.*

In definitiva per $x \neq 0, \pm\pi$ *vale*

$$S(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots \right)$$

e in $x = 0, \pm\pi$

$$S(x) = \frac{k+0}{2} = \frac{k}{2}$$

Esercizio 7

Sviluppare in serie di Fourier $f(x) = k$ definita per $x \in (0, \pi)$ prolungando ora la $f(x) = -k$ per $x \in (-\pi, 0)$.

Soluzione. *La funzione è ancora dispari, ed ora a valor medio nullo, quindi si ha uno sviluppo di soli seni ($a_n = 0$). Si trova*

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} k \sin nx dx = \frac{2k}{n\pi}[(-1)^{n+1} + 1]$$

quindi $b_n = 0$ per n pari e $b_n = 4k/n\pi$ per n dispari.

In definitiva per $x \neq 0, \pm\pi$ vale

$$S(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right)$$

e in $x = 0, \pm\pi$

$$S(x) = \frac{k - k}{2} = 0$$