Esercizio 1

Valutare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soluzione. *Si deve calcolare*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2} dx$$

Ricordando il metodo delle funzioni di variabile complessa per $\omega < 0$ *(pag.73), si nota che* $\frac{1}{1+z^2} = O(\frac{1}{|z|^2})$ *ed è analitica ad eccezione di* $z = \pm i$ *(poli semplici), poiché solo il polo* $z = i$ *é interno al semicerchio positivo* Γ_+

$$R(i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} = \frac{e^{\omega}}{2i}$$

per il teorema dei residui (giro antiorario) si afferma che

$$F(\omega) = 2\pi i R(i) = \pi e^{\omega}$$

Per $\omega > 0$ *si considera il semicerchio negativo* Γ_- *(nel semicerchio positivo* $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_+} e^{-i\omega z} f(z) dz$ *diverge mentre va a 0 in* Γ_-*) quindi ora il polo da considerare è* $z = -i$

$$R(-i) = \lim_{z \to -i} (z+i) \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} = \frac{e^{-\omega}}{-2i}$$

per il teorema dei residui (giro orario) si afferma che

$$F(\omega) = -2\pi i R(-i) = \pi e^{-\omega}$$

In definitiva

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

Esercizio 2

Valutare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Soluzione. *Si deve calcolare*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} e^{-i\omega x} dx$$

oppure ricordando la formula sulla derivata

$$\mathcal{F}(f'(x)) = i\omega F(\omega)$$

e notando che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

ossia

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}$$

segue che

$$\mathcal{F}(\frac{x}{(1+x^2)^2}) = -\frac{1}{2}i\omega\mathcal{F}(\frac{1}{1+x^2}) = -\frac{i\omega\pi}{2}e^{-|\omega|}$$

Esercizio 3

Valutare la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-|x|}$.

Soluzione. *Si deve calcolare*

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega x}dx = \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)x}dx = \\ &= \frac{e^{(1-i\omega)x}}{1-i\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(1+i\omega)x}}{-(1+i\omega)}\bigg|_{0}^{\infty} = \\ &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \\ &= \frac{2}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

Esercizio 4

Valutare la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-|3x|}$.

Soluzione. *Si deve calcolare*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|3x|}e^{-i\omega x}dx$$

oppure ricordando la formula sul cambiamento di scala

$$\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

segue che

$$\mathcal{F}(e^{-|3x|}) = \frac{1}{3}\frac{2}{(\frac{\omega}{3})^2+1} = \frac{6}{\omega^2+9}$$

Esercizio 5

Valutare la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-|x-1|}$.

Soluzione. *Si deve calcolare*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-1|} e^{-i\omega x} dx$$

oppure ricordando la formula sulla traslazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-ia\omega} F(\omega)$$

segue che

$$\mathcal{F}(e^{-|x-1|}) = e^{-i\omega} \frac{2}{\omega^2+1} = \frac{2e^{-i\omega}}{\omega^2+1}$$

Esercizio 6

Valutare la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{3ix} e^{-|x|}$.

Soluzione. *Si deve calcolare*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{3ix} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx$$

oppure ricordando la formula sulla traslazione nel dominio della frequenza

$$\mathcal{F}(e^{ihx} f(x)) = F(\omega - h)$$

segue che

$$\mathcal{F}(e^{3ix} e^{-|x|}) = \frac{2}{(\omega-3)^2+1}$$

Esercizio 7

Risolvere l'equazione $y'' + 2y' + 12y = f(t)$ dove $f(t) = t$ per $-1 \leq t < 1$ prolungata con $f(t+2) = f(t)$.

Soluzione. *Come prima cosa si sviluppa in serie di Fourier la $f(t)$. Essendo dispari si trova $a_0 = 0$ ed $a_n = 0$ inoltre*

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \int_{-1}^{+1} t \sin(n\pi t) dt = \\
&= \left(-\frac{t\cos(n\pi t)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi t)}{n^2\pi^2} \right)_{-1}^{+1} = \\
&= \left(-\frac{\cos(n\pi) + \cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi) + \sin(n\pi)}{n^2\pi^2} \right) = \\
&= -2\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}
\end{aligned}$$

perció

$$y'' + 2y' + 12y = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi t)$$

posto

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\pi t) + b_n\sin(n\pi t)]$$

si ha

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[-n\pi a_n\sin(n\pi t) + n\pi b_n\cos(n\pi t)]$$

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[-n^2\pi^2 a_n\cos(n\pi t) - n^2\pi^2 b_n\sin(n\pi t)]$$

sostituendo nell'equazione

$$12a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(-n^2\pi^2+12)a_n + 2n\pi b_n]\cos(n\pi t) + [(-n^2\pi^2+12)b_n - 2n\pi a_n]\sin(n\pi t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi t)$$

da cui segue

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ (-n^2\pi^2 + 12)a_n + 2n\pi b_n = 0 \\ (-n^2\pi^2 + 12)b_n - 2n\pi a_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema di due equazioni nelle due variabili a_n e b_n, si ottiene che:

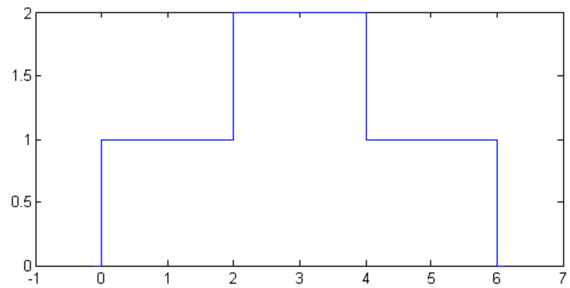
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{4(-1)^n}{(n^2\pi^2 - 12)^2 + (2n\pi)^2} \\ \\ b_n = \dfrac{n^2\pi^2 - 12}{n\pi}\dfrac{2(-1)^n}{(n^2\pi^2 - 12)^2 + (2n\pi)^2} \end{cases}$$

Perciò $y(t)$ è rappresentabile mediante la serie di Fourier

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{(n^2\pi^2 - 12)^2 + (2n\pi)^2}\cos(n\pi t) + \frac{n^2\pi^2 - 12}{n\pi}\frac{2(-1)^n}{(n^2\pi^2 - 12)^2 + (2n\pi)^2}\sin(n\pi t)\right]$$

Esercizio 8

Valutare la trasformata di Fourier del segnale in figura:



Se $\Pi(x)$ è la porta larga 1 e alta 1, ho che $\mathcal{F}\{\Pi(x)\} = \text{sinc}(k/2)$.

Soluzione. *Il segnale è*

$$f(x) = \Pi\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2\Pi\left(\frac{x-3}{2}\right) + \Pi\left(\frac{x-5}{2}\right)$$

ricordando le formule di cambiamento di scala prima, e di traslazione nel dominio del tempo poi, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\} &= e^{-ik}2\text{sinc}(k) + e^{-i3k}4\text{sinc}(k) + e^{-i5k}2\text{sinc}(k) = \\ &= e^{-i3k}4\text{sinc}(k)\left(1 + \frac{e^{i2k}}{2} + \frac{e^{-i2k}}{2}\right) = \\ &= e^{-i3k}4\text{sinc}(k)\left(1+\cos(2k)\right)\end{aligned}$$