Esercizio 1

Se $f(x)$ è differenziabile e $F(\omega) = \frac{1+i\omega}{1+\omega^6}$, calcolare $f'(0)$.

Soluzione. *Utilizzando la formula dell'antitrasformata di Fourier:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega$$

e notando che si può utilizzare la formula sulla trasformazione di una derivata:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega F(\omega)$$

si ricava che:

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega$$

che valutato in $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega F(\omega) \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \frac{1+i\omega}{1+\omega^6} \, d\omega$$

che si risolve con il teorema dei residui ricavando che i tre residui sul semipiano superiore valgono:

$$\begin{aligned} &R(e^{i\pi/6}) = \tfrac{i}{6}(1 + ie^{i\pi/6})e^{-i2\pi/3} \\ &R(e^{i\pi/2}) = 0 \\ &R(e^{i5\pi/6}) = \tfrac{i}{6}(1 + ie^{i5\pi/6})e^{i2\pi/3} \end{aligned}$$

Per cui $f'(0) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{i}{6}[(1 + ie^{i\pi/6})e^{-i2\pi/3} + (1 + ie^{i5\pi/6})e^{i2\pi/3}]$.

Esercizio 2

Si ricavi la $f(x)$ tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) e^{-|\tau|} \, d\tau = \frac{4}{3} e^{-|t|} - \frac{2}{3} e^{-2|t|}$$

Soluzione. *Secondo la formula di convoluzione:*

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = F(\omega)G(\omega)$$

e ricordandosi che

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

ottengo che:

$$F(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}$$

che tramite la propietà di riscalamento si può antitrasformare ottenendo:

$$f(x) = e^{-2|t|}$$

Esercizio 3

Si ricavi la $f(x)$ tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-|\tau|^2/2}\,d\tau = e^{-|t|^2/4}$$

Soluzione. *Secondo la formula di convoluzione:*

$$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = F(\omega)G(\omega)$$

e ricordandosi che

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|^2}\} = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$$

ottengo che:

$$F(\omega) = \sqrt{2}e^{-\omega^2/2}$$

che tramite la propietà di riscalamento si può antitrasformare ottenendo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-|t|^2/2}$$

Esercizio 4

Si ricavi la serie di Fourier in forma complessa di una funzione $f(x) = A(1-t/T)$ per $t \in [0, T]$, e $f(t+T) = f(t)$.

Soluzione. *La formula è la seguente: per* $n \geq 0$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$$

e $c_{-n} = c_n*$.
Nel nostro caso:

$$c_0 = \frac{A}{T}\int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right)dt = \frac{A}{2}$$

mentre

$$c_n = \frac{A}{T}\int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right)e^{-in\omega t}\,dt = -i\frac{A}{2n\pi}$$

Per cui, considerando che la forma di c_n *per* $n > 0$ *verifica già che* $c_{-n} = c_n*$ *estendendo il dominio di* n *a tutti gli interi diversi da zero,*

$$f(x) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} -i\frac{A}{2n\pi}e^{in\omega t}$$

Esercizio 5

Data $F(s) = \frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$ determinare $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

Soluzione. *Scomponendo in frazioni semplici si ha:*

$$F(s) = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} - \frac{7}{(s-2)^3}$$

quindi

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + 4te^{2t} - 7e^{2t}\frac{t^2}{2!}$$

Esercizio 6

Data $F(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ determinare $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

Soluzione. *Dopo alcuni semplici artifici si ha:*

$$F(s) = \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} + 2/\sqrt{3}\frac{1/2\cdot\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

quindi

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}/2\cdot t) + 1/\sqrt{3}\cdot e^{-t/2}\sin(\sqrt{3}/2\cdot t)$$

Esercizio 7

Data $F(s) = \frac{2s+1}{s(s^2+1)}$ determinare $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

Soluzione. *Scomponendo in frazioni semplici si ha:*

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$$

quindi

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = 1 - \cos t + 2\sin t$$

Esercizio 8

Data $f(t) = \frac{t \sin at}{2a}$ determinare $F(s)$.

Soluzione. *Ricordando la formula della derivata in s:*

$$\frac{d^k}{ds^k} F(s) = (-1)^k \mathcal{L}(t^k f(t))$$

si ha

$$\mathcal{L}(t^k f(t)) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)$$

nel nostro caso

$$1/2a \cdot \mathcal{L}(t \sin(at)) = 1/2a \cdot (-1) \frac{d}{ds} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$$