Esercizio 1

Calcolare la trasformata di Laplace di

$$f(t) = t \sin t - \int_0^t x^3 e^{-2(t-x)}\, dx$$

Soluzione. *Si antitrasforma separatamente il primo ed il secondo addendo. Ricordando che*

$$\mathcal{L}(t\, f(t)) = (-1)\frac{d}{ds}F(s)$$

in questo caso si ottiene per il primo addendo:

$$\mathcal{L}(t \sin t) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

Per quel che riguarda il secondo addentdo invece, ricordando che

$$\mathcal{L}\left(f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy\right) = F(\omega)G(\omega)$$

in questo caso

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t x^3 e^{-2(t-x)}\, dx\right) = \mathcal{L}\left(t^3 * e^{-2t}\right) = \frac{3!}{s^4}\frac{1}{s+2} = \frac{6}{s^4(s+2)}$$

In definitiva la trasformata di $\mathcal{L}(f(t))$ è:

$$L(s) = \frac{2s}{(1+s^2)^2} - \frac{6}{s^4(s+2)}$$

Esercizio 2

Calcolare l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4s+8}\frac{e^{-s}}{s^2-4}$$

Soluzione. s^2+4s+8 *non ha radici reali quindi si puscrivere come*

$$s^2+4s+8 = (s+2)^2+4$$

mentre

$$s^2-4 = (s+2)(s-2)$$

$$F(s) = e^{-s}\left(\frac{As+B}{(s+2)^2+4} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-2}\right)$$

dove

$$C = R(-2) = \lim_{s\to -2}\frac{s}{((s+2)^2+4)(s-2)} = \frac{1}{8}$$

$$D = R(2) = \lim_{s \to 2} \frac{s}{((s+2)^2+4)(s+2)} = \frac{1}{40}$$

ed eguagliando i due membri

$$s = (As+B)(s^2-4) + \frac{((s+2)^2+4)(s-2)}{8} + \frac{((s+2)^2+4)(s+2)}{40}$$

si ottiene

$$A = -3/20$$

$$B = -2/5$$

quindi

$$F(s) = e^{-s}\left(\frac{-\frac{3}{20}s - \frac{2}{5}}{(s+2)^2+4} + \frac{1/8}{s+2} + \frac{1/40}{s-2} \right)$$

Ordinando il primo fattore

$$-\frac{3}{20}\frac{s+\frac{40}{15}}{(s+2)^2+4} = -\frac{3}{20}\frac{s+2+\frac{10}{15}}{(s+2)^2+4} = -\frac{3}{20}\frac{s+2}{(s+2)^2+4} - \frac{3}{20}\frac{10/15}{(s+2)^2+4}$$

quindi

$$F(s) = e^{-s}\left(-\frac{3}{20}\frac{s+2}{(s+2)^2+4} - \frac{1}{20}\frac{2}{(s+2)^2+4} + \frac{1/8}{s+2} + \frac{1/40}{s-2} \right)$$

A questo punto è possibile antitrasformare i singoli termini:

$$-\frac{3}{20}e^{-2(t-1)}\cos[2(t-1)] - \frac{1}{20}e^{-2(t-1)}\sin[2(t-1)] + \frac{1}{8}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{40}e^{2(t-1)}$$

Nota: un altra possibilità più semplice per scomporre il termine corrispondente ai poli complessi coniugati è quello di scrivere il termine come:

$$2\alpha\frac{(s+2)}{(s+2)^2+4} - 2\beta\frac{2}{(s+2)^2+4}$$

e ottenere α e β come parte reale ed immaginaria rispettivamente del residuo del polo complesso a parte immaginaria positiva:

$$R(-2+2i) = \alpha + i\beta = -\frac{3}{40} + i\frac{1}{40}$$

giungendo al medesimo risultato.

Esercizio 3

Date

$$f(t) = te^{-2t}H(t)$$
$$g(t) = (t-1)H(t)$$

calcolare le trasformate di Laplace e la convoluzione utilizzando l'apposito teorema.

Soluzione. *La trasformata di $f(t)$ è:*

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

mentre la trasformata di $g(t) = tH(t) - H(t)$:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{1-s}{s^2}$$

e la convoluzione:

$$F(s)G(s) = \frac{1-s}{s^2(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2}$$

dove

$$A = R(0) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\frac{1-s}{(s+2)^2} = -1/2$$

$$B = \lim_{s\to 0} \frac{1-s}{(s+2)^2} = 1/4$$

$$C = R(-2) = \lim_{s\to -2} \frac{d}{ds}\frac{1-s}{s^2} = 1/2$$

$$D = \lim_{s\to -2} \frac{1-s}{s^2} = 3/4$$

sostituendo

$$F(s)G(s) = \frac{-1/2}{s} + \frac{1/4}{s^2} + \frac{1/2}{s+2} + \frac{3/4}{(s+2)^2}$$

A questo punto è possibile antitrasformare:

$$(f*g)(t) = \frac{1}{4}\left(2e^{-2t} + 3te^{-2t} - 2 + t\right)H(t)$$

Esercizio 4

Risolvere l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = -4te^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. *trasformando*

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) - 3Y(s) = -4\frac{1}{(s+1)^2}$$

ordinando

$$(s^2 + 2s - 3)Y(s) = -\frac{4}{(s+1)^2} + 1 = \frac{-4 + s^2 + 2s + 1}{(s+1)^2} = \frac{s^2 + 2s - 3}{(s+1)^2}$$

(cancellazione polo-zero)

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

antitrasformando

$$y(t) = te^{-t}$$

Esercizio 5

Risolvere col metodo di Fourier

$$y' - \alpha y = e^{-\alpha x}H(x)$$

Soluzione. *trasformando*

$$i\omega Y(\omega) - \alpha Y(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

da cui

$$Y(\omega) = -\frac{1}{(\alpha + i\omega)(\alpha - i\omega)} = -\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} = -\frac{1}{2\alpha}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

antitrasformando

$$y(x) = -1/(2\alpha)e^{-\alpha|x|}$$

Esercizio 6

Risolvere col metodo di Fourier

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(x-1)$$

Soluzione. *trasformando*

$$(i\omega)^2 Y(\omega) + 3i\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = e^{-i\omega}$$

da cui

$$Y(\omega) = -\frac{e^{-i\omega}}{\omega^2 - i3\omega - 2}$$

con poli $\omega = \frac{3i \pm i}{2}$

$$Y(\omega) = e^{-i\omega}\left(\frac{A}{\omega - 2i} + \frac{B}{\omega - i}\right)$$

$$A = R(2i) = \lim_{\omega \to 2i} \frac{-1}{\omega - i} = i$$

$$B = R(i) = \lim_{\omega \to i} \frac{-1}{\omega - 2i} = -i$$

quindi

$$Y(\omega) = e^{-i\omega}\left(\frac{i}{\omega - 2i} - \frac{i}{\omega - i}\right) = e^{-i\omega}\left(-\frac{1}{2 + i\omega} + \frac{1}{1 + i\omega}\right)$$

antitrasformando

$$y(x) = e^{-(x-1)} - e^{-2(x-1)}$$

Esercizio 7

Calcolare $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2})$ usando la formula di inversione complessa, quindi i residui.

Soluzione. $F(s) < M/R^k$ *quindi si puó scrivere*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+\infty} e^{st}F(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st}F(s)ds = \sum Res(e^{st}F(s))$$

dove i residui sono

$$Res(-1) = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2} e^{st}\frac{s}{(s-1)^2} = e^{-t}\frac{1 - 2t^2}{16}$$

$$Res(1) = \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} e^{st}\frac{s}{(s+1)^3} = e^{t}\frac{2t - 1}{16}$$