Prova d'Esame – 06/02/06 – Soluzione

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale:

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z \sin 3z}{(z+4)^3}\, dz$$

essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza di equazione $|z-2i| = 9$;

Soluzione. *Dalla formula di Cauchy*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

posto $z_0 = -4$, $n = 2$ *segue che*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z \sin 3z}{(z+4)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2}\,(z \sin 3z)''_{z_0} = \pi i(6\cos 3z - 9z \sin 3z)_{z_0} = \pi i(6\cos 12 - 36 \sin 12)$$

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Laurent, centrata in $z = 1$ la funzione

$$f(z) = (z-1)^2 e^{\frac{z}{z-1}}$$

Soluzione. *Ci si può ricondurre a serie note dopo alcuni semplici passaggi:*

$$f(z) = (z-1)^2 e^{\frac{(z-1)+1}{z-1}} = (z-1)^2 e \cdot e^{\frac{1}{z-1}}$$

quindi

$$f(z) = (z-1)^2 e \left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^2 + ...\right] =$$

$$= e\left[(z-1)^2 + (z-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}(z-1)^{-1} + \frac{1}{4!}(z-1)^{-2} + ...\right] = e \sum_{n=-\infty}^{2} \frac{(z-1)^n}{(2-n)!}$$

Esercizio 3

Calcolare la serie di Fourier della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x^2) & -2 \leq x < -1 \\ 1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}(1-x^2) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Soluzione. *Dalla definizione della funzione si vede che $T = 4$ quindi $\omega = \pi/2$. Poiché la funzione è pari ($f(x) = f(-x)$) si ha che $b_n = 0$ perció si devono calcolare i termini a_0 e a_k:*

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 1\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 (1-x^2)\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)_1^2\right] = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos k\frac{\pi}{2}x\,dx &= \int_0^1 \cos k\frac{\pi}{2}x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 (1-x^2)\cos k\frac{\pi}{2}x\,dx = \\ &= \left.\frac{\sin k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\right|_0^1 + \frac{1}{2}\int_1^2 (1-x^2)d\left(\frac{\sin k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\right) = \\ &= \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} + \frac{1}{2}\left[\left.(1-x^2)\frac{\sin k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\right|_1^2 + \int_1^2 2x\frac{\sin k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\,dx\right] = \\ &= \frac{2}{k\pi}\left\{\sin(k\pi/2) + \int_1^2 x\,d\left(-\frac{\cos k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\right)\right\} = \\ &= \frac{2}{k\pi}\left\{\sin(k\pi/2) + \left[-x\frac{\cos k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{\cos k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\,dx\right\} = \\ &= \frac{2}{k\pi}\left\{\sin(k\pi/2) + \frac{-2\cos k\pi + \cos k\frac{\pi}{2}}{k\pi/2} + \frac{\sin k\pi - \sin k\frac{\pi}{2}}{k\pi/2}\right\} = \\ &= \frac{2}{k\pi}\left[1 - \frac{2}{k\pi}\right]\sin(k\pi/2) + \frac{4}{(k\pi)^2}\left[\cos k\frac{\pi}{2} - 2(-1)^k\right] \end{aligned}$$

La serie di Fourier è quindi:

$$f(x) \simeq \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{k\pi}\left[1 - \frac{2}{k\pi}\right]\sin(k\pi/2) + \frac{4}{(k\pi)^2}\left[\cos k\frac{\pi}{2} - 2(-1)^k\right]\right\}\cos\frac{k\pi}{2}x$$

Esercizio 4

Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale:

$$y'' - 4y' - 5y = H(2x+1) - H(2x-1)$$

Soluzione. *Passando nel dominio di Fourier, si ha:*

$$(i\omega)^2 Y(\omega) - 4(i\omega)Y(\omega) - 5Y(\omega) = \mathcal{F}\{H(2x+1) - H(2x-1)\}$$

da cui, esplicitando $Y(\omega)$:

$$Y(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 - 4(i\omega) - 5}\mathcal{F}\{H(2x+1) - H(2x-1)\}$$

e, tornando nel dominio del tempo:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(i\omega)^2 - 4(i\omega) - 5}\right\} * [H(2x+1) - H(2x-1)]$$

Si deve antitrasformare il termine:

$$\frac{1}{(i\omega)^2 - 4(i\omega) - 5} = \frac{1}{(i\omega - 5)(i\omega + 1)} = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(5 - i\omega)} + \frac{1}{(1 + i\omega)}\right]$$

ottenendo

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(i\omega)^2 - 4(i\omega) - 5}\right\} = -\frac{1}{6}\left[e^{5x}H(-x) + e^{-x}H(x)\right]$$

La soluzione sarà quindi data da:

$$y(t) = -\frac{1}{6}\left[e^{5x}H(-x) + e^{-x}H(x)\right] * [H(2x+1) - H(2x-1)]$$

che diviene:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{6}\int_{-1/2}^{1/2}\left[e^{5(x-\tau)}H(\tau - x) + e^{\tau - x}H(x - \tau)\right]d\tau = \\ &= -\frac{1}{6}e^{5x}\left[\int_{-1/2}^{1/2} e^{-5\tau}H(\tau - x)\,d\tau\right] - \frac{1}{6}\left[\int_{-1/2}^{1/2} e^{\tau}H(x - \tau)\,d\tau\right] \end{aligned}$$

Valutando accuratamente gli estremi di integrazione, il primo dei due integrali diviene:

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{-5\tau}H(\tau - x)\,d\tau = \begin{cases} -\frac{1}{5}\left(e^{-5/2} - e^{5/2}\right) & \textit{per } x < -1/2 \\ -\frac{1}{5}\left(e^{-5/2} - e^{5x}\right) & \textit{per } -1/2 \le x < 1/2 \\ 0 & \textit{per } x \ge 1/2 \end{cases}$$

Analogamente, il secondo integrale:

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{\tau} H(x-\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & per\ x < -1/2 \\ \left(e^{x} - e^{-1/2}\right) & per\ -1/2 \le x < 1/2 \\ \left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right) & per\ x \ge 1/2 \end{cases}$$

Sostituendo:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}\left(e^{5(x-1/2)} - e^{5(x+1/2)}\right) & per\ x < -1/2 \\ \frac{1}{30}\left(e^{5(x-1/2)} - 1\right) - \frac{1}{6}\left(1 - e^{-(x+1/2)}\right) & per\ -1/2 \le x < 1/2 \\ -\frac{1}{6}\left(e^{-(x-1/2)} - e^{-(x+1/2)}\right) & per\ x \ge 1/2 \end{cases}$$

Esercizio 5

Calcolare le seguenti due trasformate:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)}\right\} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)}\right\}$$

Soluzione. *La prima delle due antitrasformate può essere calcolata semplicemente eseguendo una scomposizione in fratti semplici, ad esempio tramite le formule notevoli per il calcolo dei coefficienti:*

$$\begin{aligned} \frac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{s+1} = \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Antitrasformando:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)}\right\} = \left[te^{t} + e^{-t} - 1\right] H(t)$$

La seconda antitrasformata ha, rispetto alla prima, solo un termine moltiplicativo $e^{-\pi s}$. L'antitrasformata può essere valutata partendo dalla prima ed utilizzando il terorema di traslazione nel tempo, ottenendo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)}\right\} = \left[(t-\pi)e^{t-\pi} + e^{-t+\pi} - 1\right] H(t-\pi)$$