Prova d'Esame – 20/02/06 – Soluzione

Esercizio 1

Calcolare
$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{(z-2i)^2}{z^2-2z+2}\, dz$$
essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza con centro l'origine e raggio $r = 1$ prima ed $r = 2$ poi.

Soluzione. *I punti singolari sono* $z = 1 \pm i$, *in quanto* $z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 = (z-1-i)(z-1+i)$.

Se $r = 1$, $I = 0$, *in quanto nessuno dei punti singolari cade all'interno di* $\mathcal{C}$.

Se $r = 2$, *ambedue i punti singolari cadono all'interno di* $\mathcal{C}$ *e pertanto* $I = 2\pi i\,[(Res f)\,(1+i) + (Res f)\,(1-i)]$

$$(Res f)\,(1+i) = \lim_{z\to 1+i} \frac{(z-2i)^2(z-1-i)}{(z-1-i)(z-1+i)} = \frac{(1-i)^2}{2i} = \frac{-2i}{2i} = -1$$

$$(Res f)\,(1-i) = \lim_{z\to 1-i} \frac{(z-2i)^2(z-1+i)}{(z-1-i)(z-1+i)} = \frac{(1-3i)^2}{-2i} = \frac{-8-6i}{-2i} = 3-4i$$

Di conseguenza $I = 2\pi i[-1+3-4i] = 4\pi[2+i]$.

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Laurent, centrata in $z = -1$, la funzione
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \sin\frac{\pi}{2}(z-1)$$
Indicare inoltre il valore di a_{-1}.

Soluzione. *In pochi passaggi*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z+1)^2}\sin\frac{\pi}{2}(z-1) = \frac{1}{(z+1)^2}\left[\sin\frac{\pi}{2}(z+1)\cos(-\pi) - \cos\frac{\pi}{2}(z+1)\sin(-\pi)\right] = \\
&= -\frac{1}{(z+1)^2}\sin\frac{\pi}{2}(z+1) = \\
&= -\frac{1}{(z+1)^2}\left\{\frac{\pi}{2}(z+1) - \frac{1}{3!}\left[\frac{\pi}{2}(z+1)\right]^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left[\frac{\pi}{2}(z+1)\right]^{2n+1} + \ldots\right\} = \\
&= -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(z+1) + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}(z+1)^{2n-1} + \ldots\right\} = \\
&= -\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}(z+1)^{2n-1}
\end{aligned}$$

Dove $a_{-1} = -\frac{\pi}{2}$

Esercizio 3

Determinare la serie di Fourier della funzione:

$$f(x) = |\sin x| + |\cos x|, \qquad \text{per } -1 \leq x < 1.$$

Soluzione. *La funzione è periodica con periodo $T = 2$. Per esteso, è possibile scrivere:*

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x + \cos x, & \textit{per } -1 \leq x < 0; \\ \sin x + \cos x, & \textit{per } 0 \leq x < 1; \end{cases}$$

La funzione è chiaramente una funzione pari, per cui si può dedurre che $b_n = 0$ per ogni n, mentre per calcolare a_0 e gli a_n sarà possibile utilizzare le formule semplificate:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

In questo caso risulta:

$$a_0 = \int_0^1 \sin x + \cos x\,dx = 1 + \sin 1 - \cos 1$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 \sin x\cos n\pi x\,dx + 2\int_0^1 \cos x\cos n\pi x\,dx = \\
&= \int_0^1 (\sin(1+n\pi)x + \sin(1-n\pi)x)\,dx + \\
&+ \int_0^1 (\cos(1+n\pi)x + \cos(1-n\pi)x)\,dx = \\
&= \frac{1}{1+n\pi}\left(1 + (-1)^n\sin 1 - (-1)^n\cos 1\right) + \frac{1}{1-n\pi}\left(1 + (-1)^n\sin 1 - (-1)^n\cos 1\right) = \\
&= \frac{2}{1-n^2\pi^2}\left(1 + (-1)^n\sin 1 - (-1)^n\cos 1\right)
\end{aligned}$$

In definitiva:

$$f(x) = 1 + \sin 1 - \cos 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{1-n^2\pi^2}\left(1 + (-1)^n\sin 1 - (-1)^n\cos 1\right)\cos n\pi x$$

Esercizio 4

Calcolare $\mathcal{F}\left\{e^{-3|x|}\cos 2x\right\}$ e $\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-4ik}\left[\frac{1}{9+(k+2)^2}+\frac{1}{9+(k-2)^2}\right]\right\}$.

Soluzione. *La trasformata di Fourier si può eseguire facilmente ricorrendo alla properietà di modulazione, per cui:*

$$\mathcal{F}\{f(x)\cos k_0 x\} = \frac{1}{2}[F(k-k_0)+F(k+k_0)]$$

e, aggiungendo che

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\alpha|x|}\right\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

si ottiene che:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-3|x|}\cos 2x\right\} = \frac{3}{9+(k-2)^2}+\frac{3}{9+(k+2)^2}$$

Per quel che riguarda l'antitrasformata, ha esattamente la stessa forma della trasformata appena calcolata, fuorché per un esponenziale che non rappresenta altro che una traslazione nel tempo. Si ottiene quindi, meccanicamente, che:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-4ik}\left[\frac{1}{9+(k+2)^2}+\frac{1}{9+(k-2)^2}\right]\right\} = \frac{e^{-3|x-4|}}{3}\cos\left[2(x-4)\right]$$

Esercizio 5

Calcolare $\mathcal{L}\{f(t)\}$, essendo

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{per } 0 \le t < 2; \\ 2, & \text{per } 2 \le t < 4. \end{cases}$$

e $f(t+4) = f(t)$.

Calcolare inoltre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+\sqrt{2})^2}\right\}$.

Soluzione. *La funzione $f(t)$ è periodica di periodo $T=4$. La trasformata di Laplace può essere condotta tramite l'utilizzo della formula:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nT}^{nT+T} f(t)e^{-st}\,dt$$

Nell'ultimo passaggio si è semplicemente scomposto l'ntegrale in infiniti contributi idi intervalli di lunghezza pari a T. Effettuando ora la sostituzione *di variabile di integrazione $\tau = t - nT$, $t = \tau + nT$, $dt = d\tau$, si avranno i nuovi estremi di integrazione per τ, $0 \le \tau < T$, così:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^T f(\tau + nT) e^{-s(\tau+nT)}\, d\tau = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT}\right] \cdot \left[\int_0^T f(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau\right]$$

dove l'ultimo passaggio si è effettuato per isolare i termini che dipendono da n, da quelli che non ne dipendono (si è utilizzato il fatto che $f(t)$ fosse periodica di periodo T. Eliminando la sommatoria, che corrisponde ad una serie geometrica, si ha:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1+e^{-sT}} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau$$

L'integrale è banale:

$$\int_0^4 f(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau = \int_0^2 \tau e^{-s\tau}\, d\tau + \int_2^4 2e^{-s\tau}\, d\tau = \frac{1 - e^{-2s} - 2se^{-4s}}{s^2}$$

Per cui:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(1 - e^{-2s} - 2se^{-4s}}{s^2\,(1+e^{-sT})}$$

Per quel che riguarda l'antitrasformata, si può decomporre in fratti semplici:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+\sqrt{2})^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+\sqrt{2}} + \frac{D}{(s+\sqrt{2})^2}\right\}$$

Il valore delle costanti si ricava semplicemente:

$$A = \frac{d}{ds}\frac{1}{(s+\sqrt{2})^2}\bigg|_{s=0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = \frac{1}{(s+\sqrt{2})^2}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{d}{ds}\frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D = \frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Antitrasformando:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{-\sqrt{2}}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}} + \frac{1}{(s+\sqrt{2})^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{2} + (t+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}\right) H(t)$$