Università degli Studi di Cagliari
Dipartimento di Matematica

Dispense di Matematica Applicata

prof. Sebastiano Seatzu

(a cura degli ingg. Roberto Monni, Giuseppe Passino e Daniela Theis)

19 ottobre 2005

Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Elettronica

Indice

1 ANALISI COMPLESSA **5**

1.1 Numeri complessi e funzioni complesse 5
1.2 Funzioni complesse, limiti e continuità 19
1.3 Funzioni notevoli 25
1.4 Integrazione nel campo complesso 37
1.5 Formule integrali di Cauchy e conseguenze 48
1.5.1 Formula integrale per le derivate di ordine superiore. . 52
1.6 Funzioni analitiche e serie di Taylor 53
1.6.1 Funzioni analitiche e serie di Laurent 58
1.7 Residui e teorema dei residui 64
1.8 Teorema dei residui e calcolo di integrali 68
1.8.1 Integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ 68
1.8.2 Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta$ 71
1.8.3 Integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\}\, dx$ 73
1.8.4 Valore principale di Cauchy di integrali impropri 75
1.8.5 Integrali calcolabili mediante il teorema dei residui. . . 76

2 SERIE DI FOURIER **79**

2.1 Funzioni periodiche e polinomi trigonometrici 79
2.2 Serie di Fourier 86
2.3 Forma armonica della serie di Fourier 94
2.4 Forma complessa della serie di Fourier 96
2.5 Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie 99

3 TRASFORMATA DI FOURIER **101**

3.1 Proprietà della trasformata di Fourier 106
3.2 Convoluzione 114

4 TRASFORMATA DI LAPLACE **119**

4.1 Proprietà della trasformata di Laplace 128
4.2 Equazioni differenziali con coefficienti polinomiali 140

4.3 Convoluzione 148

Capitolo 1

Analisi Complessa

1.1 Numeri complessi e funzioni complesse

Questo capitolo è dedicato alle funzioni complesse, ossia alle funzioni che, in un assegnato dominio del campo complesso, assumono valori complessi. Allo scopo di evitare incomprensioni, dovute a lacune su questioni di base, vengono premesse definizioni e proprietà fondamentali sui numeri complessi.

Si definisce unità immaginaria la soluzione dell'equazione $\mathrm{i}^2+1=0$, ossia $\mathrm{i}^2=-1$. Ovviamente i non è un numero reale.

Per numero complesso si intende un qualsiasi numero del tipo $\alpha = a + \mathrm{i}b$, essendo a e b numeri reali. I numeri a e b sono definiti parte reale e immaginaria di α. Dunque $\mathrm{Re}(\alpha) = a$ e $\mathrm{Im}(\alpha) = b$. Ad esempio: $\mathrm{Re}(\sqrt{2} + 4\mathrm{i}) = \sqrt{2}$ e $\mathrm{Im}(\sqrt{2} + 4\mathrm{i}) = 4$.

Due numeri complessi sono uguali se e solo se sono uguali sia le parti reali sia quelle immaginarie. Ad esempio: $a+\mathrm{i}b = c+\mathrm{i}d$ se e solo se $a = c$ e $b = d$.

Di conseguenza la risoluzione di un'equazione nel campo complesso richiede che lo siano le parti reali e immaginarie. Ad esempio: $x^2+(x+y)\mathrm{i}-3 = 0$ implica la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

dunque $x = \pm\sqrt{3}$ e $y = \mp\sqrt{3}$.

Le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione sono definite di conseguenza, ossia

$$\begin{aligned} (a + \mathrm{i}b) \pm (c + \mathrm{i}d) &= a \pm c + \mathrm{i}(b \pm d) \\ (a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) &= ac - bd + \mathrm{i}(bc + ad). \end{aligned}$$

Il complesso coniugato di un numero $\alpha = a + ib$ è, per definizione, $\bar{\alpha} = a - ib$. Da notare che $\alpha\bar{\alpha} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, ossia che $\alpha\bar{\alpha}$ è reale anche se α è complesso.

Per ogni numero complesso $\alpha = a + ib$ si definisce modulo di α, in simboli $|\alpha|$, il numero reale non negativo $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$. Ovviamente $|\alpha| \geq 0$ con $|\alpha| = 0$ se e solo se $\alpha = 0$. Ad esempio: $|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

Se $\beta \neq 0$, si definisce come rapporto α/β il numero

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\mathrm{i}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$$

Come esempio si può considerare il rapporto tra $1 + 4\mathrm{i}$ e $2 - 3\mathrm{i}$:

$$\frac{1 + 4\mathrm{i}}{2 - 3\mathrm{i}} = \frac{(1 + 4\mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})}{(2 - 3\mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})} = -\frac{10}{13} + \frac{11}{13}\mathrm{i}.$$

I numeri complessi ammettono una semplice interpretazione geometrica. Con riferimento agli assi cartesiani, un numero $\alpha = a + ib$ può essere identificato come il punto di coordinate (a, b), ma anche come il vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ (Figura 1.1), essendo $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ i versori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ degli assi coordinati x e y rispettivamente.

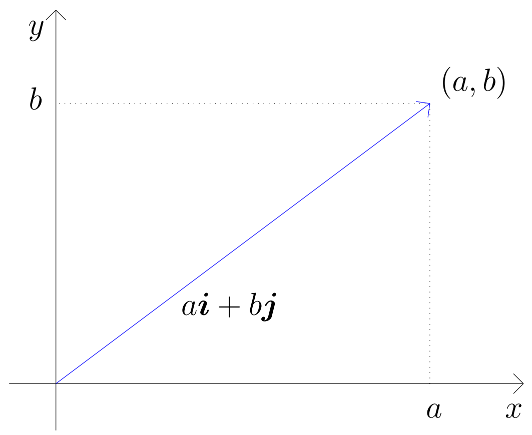


Figura 1.1

È utile notare che $\bar{\alpha}$ rappresenta un punto del piano in posizione simmetrica rispetto ad α, relativamente all'asse dell'ascisse, e che il modulo di α rappresenta la lunghezza euclidea del vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, ossia la distanza del punto (a, b) dall'origine.

La somma di due numeri complessi $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d)$, in virtù della loro interpretazione geometrica, può essere associata al vettore $(a + c)\boldsymbol{i} + (b + d)\boldsymbol{j}$, ottenibile da $(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) + (c\boldsymbol{i} + d\boldsymbol{j})$ mediante la regola del parallelogramma. È anche immediato osservare che

$$|(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d)| \leq |a + \mathrm{i}b| + |c + \mathrm{i}d|,$$

essendo

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Tale relazione corrisponde al fatto, ben noto dalla scuola Euclidea, che in un triangolo la lunghezza di qualsiasi lato è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due. Dalla precedente interpretazione segue che la distanza tra i punti $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$ è data da

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Esercizio 1.1 *Determinare il luogo dei punti z per cui $|z| = 1$. Si tratta evidentemente della circonferenza con centro l'origine e raggio 1, ossia dei punti (x, y) con $x^2 + y^2 = 1$. La relazione $|z| \leq 1$ indica invece il cerchio unitario, ossia l'insieme dei punti (x, y) del piano con $x^2 + y^2 \leq 1$.*

Esercizio 1.2 *Determinare i numeri complessi z tali che $|z - 2 + 4\mathrm{i}| < 3$. Si tratta dei punti interni al cerchio di centro $2 - 4\mathrm{i}$ e raggio 3.*

Esercizio 1.3 *Determinare z in modo che $|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z^2) = 4$. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, deve risultare $x^2 + y^2 + 2(x^2 - y^2) = 3x^2 - y^2 = 4$, per cui l'equazione rappresenta l'iperbole $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = \frac{4}{3}$.*

Esercizio 1.4 *Verificare la validità, nel campo complesso, della formula sul binomio di Newton*

$$(\alpha + \beta)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{n-j} \beta^j,$$

dove n è un numero naturale e

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n - j)!}$$

è il j-esimo coefficiente del binomio di Newton.

Dimostrazione. *Procedendo per induzione, è sufficiente osservare che la relazione è valida per $n = 1$ e che, supponendo sia valida per $n = 1, 2, \ldots, k$, è valida anche per $n = k + 1$. Per $n = 1$, è immediata, essendo (per definizione)*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Per n=k+1, essendo la formula valida per k, si ha

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^{k+1} &= (\alpha+\beta)^k(\alpha+\beta) = \left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\alpha^{k-j}\beta^j\right](\alpha+\beta)\\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\alpha^{(k+1)-j}\beta^j + \sum_{r=1}^{k+1}\binom{k}{r-1}\alpha^{(k+1)-r}\beta^r \qquad (r=j+1)\\
&= \binom{k}{0}\alpha^{k+1}\beta^0 + \sum_{j=1}^{k}\left[\binom{k}{j}+\binom{k}{j-1}\right]\alpha^{(k+1)-j}\beta^j + \binom{k}{k}\alpha^0\beta^{k+1}\\
&= \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\alpha^{(k+1)-j}\beta^j
\end{aligned}
$$

dato che

$$
\begin{aligned}
\binom{k}{j}+\binom{k}{j-1} &= \frac{k!}{j!(k-j)!}+\frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!}\\
&= \frac{k!}{j!(k-j+1)!}(k-j+1+j)\\
&= \frac{k!(k+1)}{j!((k+1)-j)!} = \binom{k+1}{j}.
\end{aligned}
$$

Il risultato è pertanto valido, anche nel campo complesso, qualunque sia il numero naturale n. □

Forma polare. Ad ogni numero $\alpha = a + \mathrm{i}b$, si può associare il punto (a, b) del piano complesso (Figura 1.2), a sua volta identificabile mediante le coordinate polari (ρ, θ), essendo $a = \rho\cos\theta$ e $b = \rho\sin\theta$.

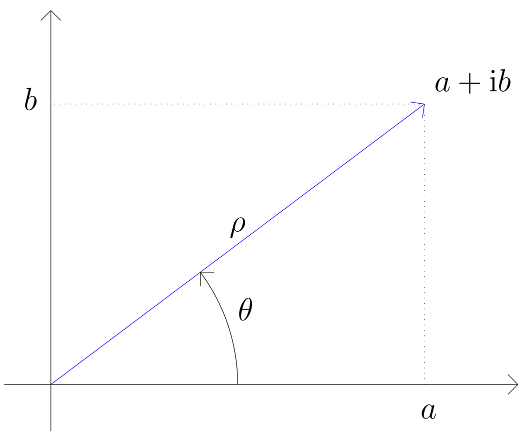


Figura 1.2

Di conseguenza $\alpha = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ è la rappresentazione polare di α, essendo ρ la lunghezza del vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ la misura in radianti della rotazione positiva (senso antiorario) necessaria per sovrapporre l'asse x al vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$. Le coordinate polari ρ e θ vengono rispettivamente definite modulo e argomento di α, essendo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan\frac{b}{a}$.[1] Come esempio si possono considerare:

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{i} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) \\ -1 + \mathrm{i} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi). \end{aligned}$$

Proprietà fondamentali:

1. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$;
2. se $\beta \neq 0$, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$;
3. $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$;
4. se r è un numero positivo, α e $r\alpha$ hanno lo stesso argomento.

Dimostrazione. Limitiamoci a dimostrare le proprietà 1. e 3. Posto $\alpha = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ e $\beta = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \rho r[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)] \\ &= \rho r[(\cos(\theta + \phi) + \mathrm{i}\sin(\theta + \phi))] \end{aligned}$$

per cui $|\alpha\beta| = \rho r$ e $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$. □

Esercizio 1.5 *Se* $\alpha = 2\mathrm{i}$ *e* $\beta = 3(1 + \mathrm{i})$,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

e

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Teorema 1.1 (Formula di de Moivre) *Per ogni intero n e ogni numero reale θ,*

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

[1] Se $a < 0$ al valore di θ si deve aggiungere π per via della periodicità della tangente.

Dimostrazione. La formula è ovviamente valida per $n = 1$. Per ogni intero positivo, in conseguenza della proprietà 3,

$$\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = n\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = n\theta$$

e di conseguenza il risultato è corretto, essendo $\rho = 1$. Per $n = -m$, con m intero positivo,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n &= \frac{1}{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + \mathrm{i}\sin m\theta}\\ &= \cos m\theta - \mathrm{i}\sin m\theta\end{aligned}$$

e dunque,

$$\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{-m} = -m\theta.$$

□

Esercizio 1.6 *Verificare l'identità trigonometrica di Lagrange*

$$\sum_{j=0}^{n}\cos j\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

nell'ipotesi che $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$.

Dimostrazione. Se $\alpha = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, *si ha* $\alpha^j = \cos j\theta + \mathrm{i}\sin j\theta$, *per cui* $\cos j\theta = \mathrm{Re}(\alpha^j)$ *e dunque*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\cos j\theta &= \mathrm{Re}\Big(\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\Big) = \mathrm{Re}\,\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \qquad (\alpha \neq 1)\\
&= \mathrm{Re}\,\frac{(1-\cos(n+1)\theta) - \mathrm{i}\sin(n+1)\theta}{(1-\cos\theta) - \mathrm{i}\sin\theta}\\
&= \frac{[1-\cos(n+1)\theta](1-\cos\theta) + \sin(n+1)\theta\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\\
&= \frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{(1-\cos\theta)\cos n\theta + \sin n\theta\sin\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos n\theta + 2\sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

□

Radici n-esime dell'unità. Sia n un intero positivo. Il numero z è una radice n-esima dell'unità se $z^n = 1$. Posto $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, per la formula di de Moivre deve dunque risultare

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = 1,$$

ossia $\rho = 1$ e $n\theta = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. In conseguenza della periodicità di $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$, si ottengono n radici distinte dell'unità ponendo

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Per qualunque altro valore intero di k si ottengono radici già ottenute di z_k. Ragionando allo stesso modo è immediato dimostrare che se $\alpha = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$ le sue radici n-esime sono

$$\beta_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right),$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ad esempio:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1} &= \cos\frac{2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)\\ &= \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}\end{aligned}$$

Esercizio 1.7 *Determinare le radici quarte di* $1 - \mathrm{i}$.
Poiché $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right)$,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1 - \mathrm{i}} &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right)\\ &= 2^{1/8}\left[\cos\left(\frac{7}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Le definizioni e le principali proprietà sugli insiemi dei numeri reali possono formalmente estendersi al campo complesso senza particolari difficoltà. Questo vale in particolare per le seguenti definizioni:

Punto interno: un numero α di un insieme S è un punto interno ad S se esiste un cerchio centrato in α contenente soltanto punti di S.

Punto di frontiera: un numero α di un insieme S è un punto di frontiera per S se ogni cerchio centrato in α contiene punti di S e punti non di S.

Insieme aperto: S è un insieme aperto se tutti i sui punti sono interni.

Frontiera: la frontiera di S è l'insieme dei punti di frontiera di S.

Punto di accumulazione: un numero α è un punto di accumulazione per un insieme S se ogni intorno di α contiene punti di S.

Un insieme S di numeri complessi è **limitato** se esiste un cerchio di diametro finito che lo contiene. Si definisce **compatto** un insieme chiuso e limitato.

Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstrass) *Un insieme infinito e compatto possiede almeno un punto di accumulazione.*

Insieme chiuso: S è un insieme chiuso se tutti i suoi punti di accumulazione appartengono ad S.

Limite: Il numero L è il limite di una successione $\{z_n\}$ se per ogni numero positivo ϵ esiste un $n(\epsilon)$ tale che per ogni $n > n(\epsilon)$

$$|z_n - L| < \epsilon$$

Se un tale numero non esiste, si dice che $\{z_n\}$ diverge.

Proprietà: Sia $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ per ogni intero positivo n e $L = a + \mathrm{i}b$. Allora $\lim_{n\to+\infty} z_n = L$, se e solo se $x_n \to a$ e $y_n \to b$. In parole z_n converge se e solo se convergono la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Ad esempio:

$$z_n = \frac{3}{n} + \frac{n+1}{n+2}\mathrm{i} \to \mathrm{i}$$

in quanto

$$\frac{3}{n} \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{n+1}{n+2} \to 1.$$

Al contrario, la successione $z_n = \cos n + \mathrm{i}\sin n$ diverge, in quanto non esistono i limiti di $\cos n$ e $\sin n$ per $n \to +\infty$.

Proprietà: Siano $z_n \to L$ e $w_n \to K$, allora

1. $z_n + w_n \to L + K$;
2. $\alpha z_n \to \alpha L$, per ogni numero α;
3. $z_n w_n \to LK$;
4. $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{L}{K}$, se $w_n \neq 0$ per ogni n e $K \neq 0$

Successione di Cauchy. Una successione $\{z_n\}$ è di Cauchy se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intero positivo $n(\epsilon)$ tale che $|z_n - z_m| < \epsilon$, qualunque siano $n > n(\epsilon)$ e $m > n(\epsilon)$.

Teorema 1.3 *Una successione $\{z_n\}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Esercizio 1.8 *Sia $\{z_n\} = \frac{1}{2}(z_{n-1} + z_{n-2})$ per $n \geq 3$, con z_1 e z_2 valori complessi assegnati. Dimostrare che $\{z_n\}$ è una successione di Cauchy. Osserviamo preliminarmente che*

$$\begin{aligned}
|z_3 - z_2| &= \frac{1}{2}|z_2 - z_1| \\
|z_4 - z_3| &= \frac{1}{2}|z_3 - z_2| = \frac{1}{2^2}|z_2 - z_1| \\
&\vdots \\
|z_n - z_{n-1}| &= \frac{1}{2^{n-2}}|z_2 - z_1|, \qquad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, posto $n = m + p$,

$$\begin{aligned}
|z_n - z_m| = |z_{m+p} - z_m| &= |(z_{m+p} - z_{m+p-1}) + (z_{m+p-1} - z_{m+p-2}) + \cdots + (z_{m+1} - z_m)| \\
&\leq |z_{m+p} - z_{m+p-1}| + |z_{m+p-1} - z_{m+p-2}| + \cdots + |z_{m+1} - z_m| \\
&= \left(\frac{1}{2^{m+p-2}} + \frac{1}{2^{m+p-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}}\right)|z_2 - z_1| \\
&= \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-2}} + \cdots + 1\right)|z_2 - z_1| \\
&= \frac{1}{2^{m-1}}\frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}}|z_2 - z_1| < \frac{1}{2^{m-2}}|z_2 - z_1|,
\end{aligned}$$

che, ovviamente, converge a zero per $m \to +\infty$.

Serie di numeri complessi. Se $\{z_n\}$ è una successione di numeri complessi, con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

si indica una serie a termini complessi. Come nel campo reale

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

indica la n-esima somma parziale della serie e $\{S_n\}$ è la successione delle somme parziali. La serie converge/diverge a seconda che la successione sia convergente o divergente in $\mathbb{C}$.

Per le serie a termini complessi valgono i seguenti teoremi:

Teorema 1.4 *Se $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, valgono i seguenti risultati:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge se e solo se convergono le serie a termini reali*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n;$$

2. *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge a* x *e* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \to y$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n \to x + \mathrm{i}y$.

Teorema 1.5 *Condizione necessaria perché la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *sia convergente è che* $z_n \to 0$.

Teorema 1.6 *Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della serie è che la successione delle sue somme parziali sia di Cauchy, ossia che prefissato* $\epsilon > 0$, *esista un* $n(\epsilon)$ *tale che, qualunque siano* $n > n(\epsilon)$ *e l'intero positivo* p, *risulti*

$$|z_{n+p} + z_{n+p-1} + \cdots + z_{n+1}| < \epsilon.$$

Teorema 1.7 (Criterio della assoluta sommabilità) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *converge, anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge. Questo significa che nel campo complesso, come in quello reale, l'assoluta sommabilità di una serie implica la semplice sommabilità. Ovviamente non vale l'inverso.*

Ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=\ln 2$$

mentre la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

Teorema 1.8 (Criterio del rapporto) *Se $z_n \neq 0$ per ogni n e se*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=r,$$

allora:

1. *la serie è assolutamente convergente e di conseguenza anche semplicemente se $0<r<1$;*

2. *la serie è assolutamente divergente per $r>1$.*

Da notare che se $r=1$ la serie può essere convergente ma anche divergente. Ad esempio la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ è convergente, mentre $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ è divergente.

Esercizio 1.9 *Dimostrare che*

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$$

se $|z|<1$ e che essa diverge per $z\geq 1$. Posto $S_n=1+z+\cdots+z^{n-1}$ e osservato che $zS_n=z+z^2+\cdots+z^n$, sottraendo membro a membro si ha che $(1-z)S_n=1-z^n$, da cui, se $z\neq 1$,

$$S_n=\frac{1-z^n}{1-z}.$$

Pertanto, se $|z|<1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-z}$. Per $z=1$, $S_n=n$ e dunque $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$. Se $|z|>1$, si ha $|z|^n\to\infty$ e pertanto la successione S_n non converge.

Serie di potenze a termini complessi. Per serie di potenze a termini complessi, centrate in z_0, si intende una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

dove $z_0,a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ sono numeri complessi noti. I numeri $\{a_n\}$ rappresentano i coefficienti della serie. La serie ovviamente converge ad a_0 per $z=z_0$. Per motivi di continuità c'è da aspettarsi che la serie converga anche per z sufficientemente vicino a z_0, come evidenziato dal seguente teorema.

Teorema 1.9 *Se la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge per* $z_1 \neq z_0$*, allora essa converge assolutamente per ogni* z *che dista da* z_0 *meno di* z_1*, ossia per ogni* z *tale che* $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ *(Figura 1.3).*

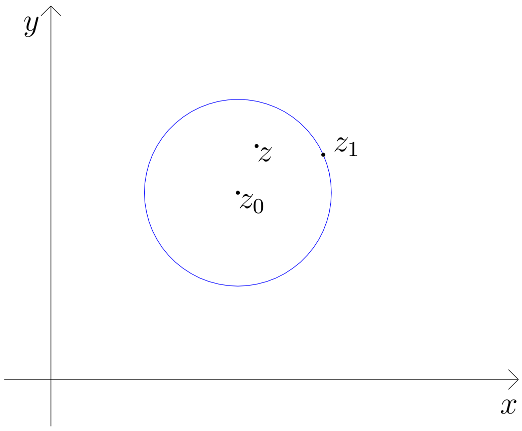


Figura 1.3

Dimostrazione. Poiché $z_1 \neq z_0$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ è convergente, per n sufficientemente grande, diciamo $n > N$, $|a_n(z_1-z_0)^n| < 1$. Di conseguenza, per $n > N$,

$$\begin{aligned} |a_n(z-z_0)|^n &= |a_n(z-z_0)^n| \frac{|z_1-z_0|^n}{|z_1-z_0|^n} \\ &= \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n |a_n(z_1-z_0)^n| < \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n . \end{aligned}$$

Pertanto la serie $\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ converge in quanto

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

con $r = \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1.$ $\square$

Il precedente teorema suggerisce l'idea del raggio di convergenza, ossia dell'esistenza di un numero positivo R tale che la serie è convergente per ogni z con $|z - z_0| < R$ e divergente per $|z - z_0| > R$. Da notare che per $|z - z_0| = R$ la serie può essere convergente oppure divergente. Se $R = \infty$ la serie è convergente nell'intero piano e se $R = 0$ lo è soltanto in z_0. Per la valutazione di R i criteri più usati sono i seguenti:

Criterio del rapporto:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Criterio della radice:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Esercizio 1.10 *Determinare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} 2^n (z - 1 + 2\mathrm{i})^n.$$

Si tratta di una serie di potenze centrata in $1 - 2\mathrm{i}$. *Per il criterio del rapporto*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^n}{n+1}\frac{n+2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} \to \frac{1}{2},$$

per $n \to \infty$. *Di conseguenza la serie è assolutamente convergente in tutti i punti del cerchio di centro* $1-2\mathrm{i}$ *e raggio* $1/2$, *ossia per tutti i valori* z *con* $|z-1+2\mathrm{i}| < \frac{1}{2}$.

Il precedente criterio del rapporto è una diretta conseguenza dell'analogo criterio per le serie numeriche. Infatti la serie di potenze può essere pensata nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ con $z_n = a_n(z - z_0)^n$. L'applicazione del criterio del rapporto per la sua assoluta convergenza richiede che

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|a_{n+1}||z - z_0|}{|a_n|} < 1$$

ossia che

$$|z - z_0| < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Proprietà: Supponiamo che una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ abbia raggio di convergenza R. Questo comporta che per ogni numero z con $|z - z_0| < R$ resta definita una funzione

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Si può facilmente dimostrare che tale funzione è differenziabile e che

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$$

ossia che la sua derivata è ottenibile derivando la serie termine a termine. Va altresì notato che le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, la seconda delle quali è ottenuta dalla prima per derivazione termine a termine, hanno lo stesso raggio di convergenza. L'iterazione della suddetta proprietà implica che

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$$

e che la nuova serie ha anch'essa raggio di convergenza R. Dall'ultima relazione deriva infine che

$$f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot a_k$$

ossia che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(ricordare che $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ e $0! = 1$). I coefficienti $\{a_k\}$, per la loro evidente coincidenza con quelli dello sviluppo di Taylor di una funzione, sono definiti coefficienti di Taylor della f e la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

è definita serie di Taylor della f, con centro in z_0.

Esercizio 1.11 *Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(z+3\mathrm{i})^n.$$

Il raggio di convergenza è dato da

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^n}\frac{2^{n+1}}{n+2} = 2.$$

Il dominio di convergenza è dunque costituito dal cerchio di centro $-3\mathrm{i}$ *e raggio* 2 $(|z+3\mathrm{i}| < 2)$.

Esercizio 1.12 *Stabilire se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2\mathrm{i})^n$$

può convergere in $z = 0$ *e non in* $z = \mathrm{i}$. *Questo fatto non può verificarsi perché la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\mathrm{i})^n$ *è assolutamente convergente nel caso lo sia* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-2\mathrm{i})^n$. *A questo scopo basta osservare che*

$$|a_n(-1)^n| = |a_n| < |a_n(-2\mathrm{i})^n| < |a_n|2^n.$$

1.2 Funzioni complesse, limiti e continuità

Per funzione complessa si intende una funzione f che, ad ogni numero complesso di un insieme S assegna un numero complesso. In simboli $f : S \to \mathbb{C}$. S è dominio di f e $f(S)$ il suo codominio. Nel caso in cui il dominio di f non sia esplicitamente indicato, lo si definisce come il più ampio insieme di $\mathbb{C}$ nel quale essa è definita.

Per esempio $f(z) = z^n$, con n intero positivo, è definita su tutto $\mathbb{C}$; $f(z) = z^{-n}$, con n intero positivo, è definita per ogni z complesso $\neq 0$ e $f(z) = \dfrac{z^2+3z+2}{z^2+1}$ è definita per ogni $z \neq \pm\mathrm{i}$.

La definizione di limite per una funzione complessa è del tutto analoga a quella introdotta per le funzioni reali, con l'avvertenza che la distanza tra numeri complessi nel piano sostituisce quella di distanza tra numeri reali sulla retta.

Limite. Se $f : S \to \mathbb{C}$ è una funzione complessa e z_0 un punto di accumulazione di S, diciamo che

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l$$

se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta(\epsilon)$ tale che $|f(z) - l| < \epsilon$ per ogni $z \in S$ con $|z-z_0| < \delta(\epsilon)$. In altre parole l è il limite di $f(z)$ per $z \to z_0$ se la distanza tra $f(z)$ e l può essere resa arbitrariamente piccola prendendo z sufficientemente vicino a z_0.

Proprietà immediate: Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ e $\lim_{z\to z_0} g(z) = k$, allora:

- $\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = l \pm k$
- $\lim_{z\to z_0} \alpha f(z) = \alpha l$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$
- $\lim_{z\to z_0} f(z) \cdot g(z) = lk$
- $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{l}{k}$ se $k \neq 0$

Continuità. Una funzione $f : S \to \mathbb{C}$ è continua in z_0 se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Essa è continua in S se lo è in ogni punto di S.

Ogni polinomio $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ è continuo per qualunque $z \in \mathbb{C}$ e ogni funzione razionale (quoziente di due polinomi) è continua tranne negli zeri del denominatore.

Come nel campo reale, le combinazioni lineari di funzioni continue e i prodotti di funzioni continue generano funzioni continue. Il rapporto di funzioni continue è una funzione continua, tranne nei punti in cui si azzera il denominatore. Una serie di potenze, centrata in z_0 ed avente R come raggio di convergenza, rappresenta una funzione continua nel cerchio con centro z_0 e raggio R. Se f è una funzione continua in S e $\{z_n\}$ è una qualsiasi successione di numeri complessi convergente a z_0, $f(z_n) \to f(z_0)$ per $n \to \infty$.

Funzione limitata. Una funzione $f : S \to \mathbb{C}$ è limitata in un dominio $\Omega \subset S$ se esiste un numero L tale che $|f(z)| \leq L$ per ogni $z \in \Omega$.

Teorema 1.10 (Weierstrass) *Ogni funzione continua in un compatto Ω è limitata. Di conseguenza essa assume massimo e minimo, ossia esistono due numeri z_1 e z_2 tali che, qualunque sia $z \in \Omega$,*

$$|f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|.$$

Differenziabilità (Condizioni di Cauchy-Riemann). Una funzione f è detta differenziabile in z_0 se esiste finito il

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Se questo avviene, il valore del limite viene indicato con $f'(z_0)$ e rappresenta la derivata della f in z_0.

È del tutto equivalente dire che la f è differenziabile in z_0 e che $f'(z_0)$ è il valore della sua derivata se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Spesso $f'(z_0)$ viene definito come

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

La differenza sostanziale rispetto a quanto avviene nel campo reale, dove la variabile x può tendere a x_0 unicamente sulla retta, è che ora z può tendere a z_0 secondo una qualsiasi curva del piano.

Vediamo alcuni esempi:

1. $f(z) = z^2$ è differenziabile in $1+\mathrm{i}$ e $f'(1+\mathrm{i}) = 2(1+\mathrm{i})$; infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{[(1+\mathrm{i})+h]^2-(1+\mathrm{i})^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+\mathrm{i})h+h^2}{h} = 2(1+\mathrm{i}).$$

2. $f(z) = \bar{z}$ non è differenziabile in $z = \mathrm{i}$, in quanto il limite dipende dalla traiettoria con cui $z \to \mathrm{i}$; infatti se la $z \to \mathrm{i}$ lungo l'asse immaginario (Figura 1.4) ossia assumendo i valori $\alpha\mathrm{i}$ con $\alpha \to 1$, risulta

$$\frac{f(z)-f(\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = \frac{f(\alpha\mathrm{i})-f(\mathrm{i})}{\alpha\mathrm{i}-\mathrm{i}} = \frac{-\alpha\mathrm{i}-(-\mathrm{i})}{(\alpha-1)\mathrm{i}} = \frac{(1-\alpha)\mathrm{i}}{(\alpha-1)\mathrm{i}} = -1.$$

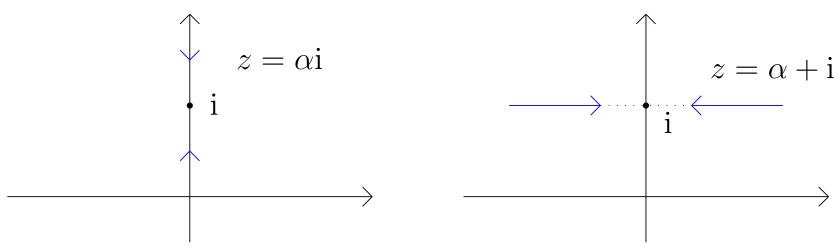


Figura 1.4

Se $z \to \mathrm{i}$ orizzontalmente, ossia assumendo valori del tipo $z = \alpha + \mathrm{i}$ con $\alpha \to 0$, il rapporto incrementale diventa

$$\frac{f(z)-f(\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = \frac{\alpha-\mathrm{i}-(-\mathrm{i})}{\alpha+\mathrm{i}-\mathrm{i}} = 1.$$

Il limite dunque non esiste perché procedendo lungo l'asse delle ordinate si ottiene -1 e parallelamente all'asse delle ascisse si ottiene 1.

3. $f(z) = |z|^2$ è differenziabile in $z = 0$ e $f'(0) = 0$, ma non lo è in qualsiasi punto $z \neq 0$.

   Per dimostrare che $f'(0) = 0$, basta osservare che

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = 0$$

   in quanto $|z|^2/z = z\bar{z}/z = \bar{z}$.

   Per dimostrare che la f non è differenziabile in $z_0 \neq 0$, posto $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ e $z = x + \mathrm{i}y$ facciamo tendere $z \to z_0$ secondo le due traiettorie $z = x_0 + \mathrm{i}y$, $y \to y_0$, e $z = x + \mathrm{i}y_0$, con $x \to x_0$. La prima è dunque verticale e la seconda orizzontale.

   Lungo la prima traiettoria:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|x_0 + \mathrm{i}y|^2 - |x_0 + \mathrm{i}y_0|^2}{\mathrm{i}(y - y_0)} = \frac{(y - y_0)(y + y_0)}{\mathrm{i}(y - y_0)} = -\mathrm{i}(y + y_0)$$

   che converge a $-2\mathrm{i}y_0$ per $y \to y_0$.

   Lungo la seconda traiettoria

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|x + \mathrm{i}y_0|^2 - |x_0 + \mathrm{i}y_0|^2}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = (x + x_0)$$

   che converge a $2x_0$ per $x \to x_0$.

   Resta così dimostrata la non derivabilità di $|z|^2$ in qualunque punto $z \neq 0$.

Analiticità. Una funzione complessa f è analitica in z_0 se esiste un intorno di z_0, in ogni punto del quale la f è differenziabile.

Ad esempio la funzione z^2 è analitica per ogni valore di z (in breve è analitica nel piano); mentre $|z|^2$ non lo è mai in quanto è unicamente differenziabile in $z = 0$, punto nel quale non è analitica perché non esiste un aperto centrato in z_0 in ogni punto del quale sia differenziabile.

Condizioni di Cauchy-Riemann. Le condizioni di Cauchy-Riemann forniscono un criterio di importanza fondamentale per stabilire l'analiticità di una funzione complessa. Per la sua applicazione si devono preliminarmente identificare le parti reale e immaginaria della $f(z)$, ossia si deve esprimere $f(z)$ nella forma $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.

Alcuni esempi:

1. Se $f(z) = z^2$, essendo $f(z) = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$, $u(x,y) = x^2-y^2$ e $v(x,y) = 2xy$;
2. se $f(z) = |z|$, $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $v(x,y) = 0$;
3. se $f(z) = z + 2\bar{z}$, $u(x,y) = 3x$ e $v(x,y) = -y$.

Teorema 1.11 (Equazioni di Cauchy-Riemann) *Sia f continua in un cerchio $|z - z_0| < r$ con centro $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ e raggio r. Supponiamo inoltre che f sia differenziabile in z_0. Sotto tali ipotesi valgono le seguenti equazioni per le funzioni u e v:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}.$$

In altri termini, le equazioni di Cauchy-Riemann danno delle condizioni necessarie per la differenziabilità di una funzione continua in un punto.

Dimostrazione. Poiché la $f(z)$ è differenziabile in z_0, esiste in $\mathbb{C}$ il numero

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Posto $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$, il rapporto incrementale può essere scritto nel modo seguente

$$\begin{aligned} &\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \\ &= \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + \mathrm{i}v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0,y_0) + \mathrm{i}v(x_0,y_0)]}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0,y_0)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} + \mathrm{i}\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}. \end{aligned}$$

Poiché $f'(z_0)$ esiste, il rapporto incrementale deve convergere allo stesso valore indipendentemente dalla traiettoria lungo la quale $\Delta z \to 0$, dunque per $\Delta x \to 0$ e $\Delta y = 0$, come per $\Delta x = 0$ e $\Delta y \to 0$.

1° **caso**

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + \mathrm{i}\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

2° **caso**

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\mathrm{i}\Delta y} + \mathrm{i}\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\mathrm{i}\Delta y} \right] \\ &= -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad (1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Da cui, eguagliando le parti reali e immaginarie, seguono le equazioni di Cauchy-Riemann. □

Esercizio 1.13 *Verificare, nei tre esempi indicati precedentemente, se sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann.*

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$ *(sono soddisfatte)*

2. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ *(non soddisfatte)*

3. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ *(non soddisfatte)*

Teorema 1.12 (Condizione sufficiente per la differenziabilità) *Se u e v sono funzioni continue in (x_0, y_0) con le derivate parziali, anch'esse continue e soddisfacenti le equazioni di Cauchy-Riemann, la funzione complessa $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ è ivi differenziabile.*

Dominio. Un insieme D è definito un dominio se:

a. ad ogni punto di D si può associare un cerchio aperto contenuto in D;

b. ogni coppia di punti di D può essere congiunta con una curva regolare a tratti [2], interamente contenuta in D.

Una funzione è analitica in un dominio D, se lo è in tutti punti di D. Alcuni esempi:

[2] Una curva è regolare se è dotata di tangente in tutti i suoi punti interni; è regolare a tratti se non lo è unicamente in un numero finito di punti.

1. La funzione $f(z) = z^3$ è analitica in tutti i punti del piano; infatti $f(z) = (x + \mathrm{i}y)^3 = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)$ implica che, qualunque sia $z = x + \mathrm{i}y$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3(x^2 - y^2)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -6xy$ ossia che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann e che, inoltre, le derivate parziali sono ovunque continue.

2. La funzione $f(z) = |z| + \mathrm{i}z$ non è analitica, infatti $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - y + \mathrm{i}x$ implica che le funzioni $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - y$ e $v(x, y) = x$ non soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Regole di differenziazione. Se f e g sono funzioni differenziabili in z_0, per esse valgono regole di derivazione del tutto analoghe a quelle valide nel campo reale. In particolare:

1. $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$
2. $(\alpha f)'(z_0) = \alpha f'(z_0)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g'(z_0))^2}$, se $g'(z_0) \neq 0$

1.3 Funzioni notevoli

Funzione esponenziale. Le serie di potenze consentono di estendere al campo complesso la funzione esponenziale. Ricordiamo che nel campo reale, per un valore di x, vale il seguente sviluppo in serie di potenze:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nel campo complesso la funzione esponenziale viene definita per estensione analitica, ossia definendo e^z, con $z = x + \mathrm{i}y$, nel modo seguente:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il criterio del rapporto consente di verificare immediatamente che la serie è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ in quanto

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0 \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

È immediato osservare che la funzione esponenziale è infinitamente derivabile e che

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

esattamente come campo reale.

Proprietà della funzione esponenziale:

1. $e^0 = 1$ (per definizione)

2. se $g(z)$ è differenziabile, $e^{g(z)}$ è differenziabile e $\dfrac{d}{dz}e^{g(z)} = g'(z)e^{g(z)}$

3. $e^{z+w} = e^z e^w$, per ogni coppia di numeri complessi z e w

4. $e^z \neq 0$, per ogni z

5. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

6. $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

7. $|e^z| = e^x$, per ogni y, in quanto$|e^{\mathrm{i}y}| = 1$ qualunque sia $y \in \mathbb{R}$

8. $e^z = 1$ se e solo se $z = 2n\pi\mathrm{i}$, con n intero.

Funzioni $\sin z$ e $\cos z$. Cominciamo con il ricordare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono i seguenti sviluppi in serie:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}$$

Da tali sviluppi deriva, come notato da Eulero, che le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ posseggono globalmente tutti i termini dello sviluppo di e^x. Più precisamente

Eulero ha osservato che, sostituendo x con $\mathrm{i}x$ nello sviluppo di e^x, risulta

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} = 1 + \mathrm{i}x + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}x)^4}{4!} + \cdots \\
&= 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \mathrm{i}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos x + \mathrm{i}\sin x.
\end{aligned}$$

Per ogni x reale vale dunque l'importante formula di Eulero

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

dalla quale discende immediatamente che

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Formula di Eulero nel campo complesso. Se $\cos z$ e $\sin z$ vengono estese al campo complesso mediante gli sviluppi in serie validi nel campo reale si perviene alle seguenti definizioni:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

È immediato osservare che sono ambedue derivabili e che

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z.$$

Come nel campo reale $\sin z$ e $\cos z$ sono rispettivamente dispari e pari, ossia $\sin(-z) = -\sin z$ e $\cos(-z) = \cos z$, in quanto le potenze di z che compaiono negli sviluppi di $\sin z$ e $\cos z$ sono rispettivamente dispari e pari.

Come conseguenza dei precedenti sviluppi si ha che anche nel campo complesso vale la famosa relazione di Eulero

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

dalla quale, ricordando che $\cos z$ è pari e $\sin z$ è dispari, segue che

$$\cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

esattamente come campo reale. Da tali definizioni discende l'estensione di ben note proprietà trigonometriche al campo complesso, come le seguenti:

$$\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$$

$$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w.$$

Proprietà:

1. $\sin z$ e $\cos z$ non sono limitate se $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

   Infatti per $z = \mathrm{i}y$ con $y \neq 0$, $\sin \mathrm{i}y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{-y} - e^{y})$ in modulo tende a $+\infty$ per $y \to \pm\infty$. La stessa conclusione vale anche per $\cos \mathrm{i}y$.

2. $\cos \mathrm{i}y = \cosh y = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ e $\sin \mathrm{i}y = \mathrm{i}\sinh y = \mathrm{i}\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

   Basta infatti osservare che:

$$\begin{aligned}\cos \mathrm{i}y &= \frac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)} + e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y \text{ (per definizione)}\\ \sin \mathrm{i}y &= \frac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)} - e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \mathrm{i}\sinh y \text{ (per definizione)}\end{aligned}$$

3. $\sin z = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y$
   $\cos z = \cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y$

   Dalla definizione delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$, posto $z = x + \mathrm{i}y$, deriva che

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{\mathrm{i}x-y} - e^{-\mathrm{i}x+y}}{2\mathrm{i}}\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}[e^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) - e^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)] \quad \text{(formula di Eulero)}\\ &= -\mathrm{i}(\cos x)\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} + (\sin x)\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\\ &= \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y.\end{aligned}$$

   Analogamente

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} = \frac{e^{\mathrm{i}x-y} + e^{-\mathrm{i}x+y}}{2}\\ &= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + e^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)]\\ &= (\cos x)\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - \mathrm{i}(\sin x)\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\\ &= \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y.\end{aligned}$$

4. $\sin z$ e $\cos z$ sono periodiche di periodo 2π, ossia $\sin(z + 2n\pi) = \sin z$ e $\cos(z + 2n\pi) = \cos z$, per ogni intero n.

È sufficiente osservare che, per la 3. e tenuto conto della periodicità nel campo reale:

$$\begin{aligned}\sin(z+2n\pi) &= \sin[(x+2n\pi)+\mathrm{i}y] \\ &= \sin(x+2n\pi)\cosh y + \mathrm{i}\cos(x+2n\pi)\sinh y \\ &= \sin x\cosh y + \mathrm{i}\cos x\sinh y = \sin(x+\mathrm{i}y) = \sin z.\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\cos(z+2n\pi) &= \cos[(x+2n\pi)+\mathrm{i}y] \\ &= \cos(x+2n\pi)\cosh y - \mathrm{i}\sin(x+2n\pi)\sinh y \\ &= \cos x\cosh y - \mathrm{i}\sin x\sinh y = \cos(x+\mathrm{i}y) = \cos z.\end{aligned}$$

5. $\sin z = 0$ se e solo se $z = n\pi$, con n intero.

   Per la 3. $\sin z = \sin x\cosh y + \mathrm{i}\cos x\sinh y = 0$ se e solo se $\sin x\cosh y = 0$ e $\cos x\sinh y = 0$. Poiché nel campo reale $\cosh y \neq 0$, deve essere $\sin x = 0$, ossia $x = n\pi$, con n intero. In tal caso $\cos x = \cos n\pi = (-1)^n$, per cui deve essere $\sinh y = 0$, ossia $y = 0$ e dunque $z = n\pi$.

6. $\cos z = 0$ se e solo se $z = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, con n intero, ossia se e solo se z è un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$.

   La dimostrazione è del tutto analoga al caso precedente.

Esercizio 1.14 *Dimostrare la validità delle seguenti proprietà:*

1. e^z *è analitica nell'intero piano e* $\frac{d}{dz}e^z = e^z$*;*
2. $e^z e^w = e^{z+w}$*;*
3. $e^z \neq 0$*, qualunque sia* z*;*
4. $e^{-z} = 1/e^z$*, qualunque sia* z*;*
5. $e^z/e^w = e^{z-w}$*, qualunque siano* z *e* w*;*
6. $|e^{\mathrm{i}x}| = 1$*, per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*
7. $e^z = 1$ *se e solo se* $z = 2n\pi\mathrm{i}$ *con* n *intero;*
8. $e^z = e^w$ *se e solo se* $z = w + 2n\pi\mathrm{i}$ *con* n *intero.*

Dimostrazione.

1. $e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ *con* $u(x,y) = e^x \cos y$ *e* $v(x,y) = e^x \sin y$. *Pertanto* u *e* v *sono ovunque continue e derivabili con continuità.*

   Valgono inoltre le condizioni di Cauchy-Riemann, in quanto $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ *e* $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y$.

   Di conseguenza e^z *è analitica e* $\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial}{\partial x}[u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)] = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = e^z$.

2. $$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{x+\mathrm{i}y}e^{a+\mathrm{i}b} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)e^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b) \\ &= e^{x+a}[(\cos y \cos b - \sin y \sin b) + \mathrm{i}(\sin y \cos b + \cos y \sin b)] \\ &= e^{x+a}[\cos(y+b) + \mathrm{i}\sin(y+b)] = e^{x+a}e^{\mathrm{i}(y+b)} = e^{(x+\mathrm{i}y)+(a+\mathrm{i}b)} = e^{z+w} \end{aligned}$$

3. $e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = 0$, *se e solo se* $\cos y = 0$ *e* $\sin y = 0$, *il che è impossibile se* x *e* y *sono numeri reali.*

4. $e^{-z} = 1/e^z$, *in quanto* $e^z e^{-z} = e^0 = 1$.

5. $e^z/e^w = e^z e^{-w} = e^{z-w}$.

6. $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, *e dunque* $|e^{\mathrm{i}x}| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

7. $e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = 1$ *se e solo se* $|e^z| = |e^x| = 1$, *dunque* $x = 0$, *e* $\cos y = 1$ *e* $\sin y = 0$, *ossia se e solo se* $x = 0$ *e* $y = 2n\pi\mathrm{i}$.

8. $e^z = e^w$ *implica che* $e^{z-w} = 1$ *e dunque che* $z - w = 2n\pi\mathrm{i}$ *con* n *intero.*

$\square$

Esercizio 1.15 *Mostrare che ogni radice n-esima dell'unità è esprimibile nella forma* $e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}$, *con* $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Basta ricordare che $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$ *e utilizzare la formula di Eulero.*

Altre definizioni.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z},$$

ovviamente nell'ipotesi che sia $z \neq 0$.

Altre proprietà:

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$
3. $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$
4. $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$
5. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$
6. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$
7. $\sin(z + 2n\pi) = \sin z$ e $\cos(z + 2n\pi) = \cos z$,per qualsiasi intero n.

Esercizio 1.16 *Dimostrare che* $\cosh z$ *e* $\sinh z$ *sono analitiche.*
$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2}[e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) + e^{-x}(\cos y - \mathrm{i}\sin y)] = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$
essendo

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos y = \cosh x \cos y$$
$$v(x,y) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\sin y = \sinh x \sin y$$

u e v sono continue e inoltre le derivate parziali soddisfano con continuità le condizioni di Cauchy-Riemann, in quanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sinh x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cosh x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\cosh z$ *è dunque ovunque analitica. In modo del tutto analogo si dimostra l'analiticità, per tutti i numeri complessi, di* $\sinh z$.

Esercizio 1.17 *Dimostrare che* e^{z^2} *è analitica nell'intero piano complesso.*

Si tratta di esprimere e^{z^2} *nella forma* $u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$*, verificare che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann e che le derivate parziali di u e v sono funzioni continue.*

$$e^{z^2} = e^{(x+\mathrm{i}y)^2} = e^{(x^2-y^2)+2\mathrm{i}xy} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \mathrm{i}\sin 2xy) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

essendo $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ *e* $v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$*. Pertanto*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy - y\sin 2xy) = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{x^2-y^2}(y\cos 2xy + x\sin 2xy) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ossia sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann, qualunque siano x e y. La e^{z^2} *è dunque ovunque analitica, dato che le derivate sono tutte ovunque continue.*

Esercizio 1.18 *Dimostrare che la funzione* $e^{\frac{1}{z}}$ *soddisfa con continuità le condizioni di Cauchy-Riemann per ogni* $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= e^{\frac{1}{x+\mathrm{i}y}} = e^{\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}} \\ &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}(\cos\frac{y}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\sin\frac{y}{x^2+y^2}) \\ &= u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \end{aligned}$$

con $u(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}$ *e* $v(x,y) = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\frac{y}{x^2+y^2}$. *Inoltre*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\sin\frac{y}{x^2+y^2}) \\ &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}[(y^2-x^2)\cos\frac{y}{x^2+y^2} + 2xy\sin\frac{y}{x^2+y^2}] = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}[2xy\cos\frac{y}{x^2+y^2} + (x^2-y^2)\sin\frac{y}{x^2+y^2}] = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

per cui la funzione è analitica tranne in $z = 0$.

La funzione logaritmo nel piano complesso. La relazione base nella definizione del logaritmo nel campo reale è la seguente:

$$y = \ln x \qquad \text{se e solo se} \qquad x = e^y.$$

Questa relazione può essere utilizzata per estendere la definizione nel campo complesso ove, per evidenziare che l'argomento del logaritmo è complesso, è preferibile scrivere $\log z$ in luogo di $\ln z$.

Si dice dunque che

$$w = \log z \qquad \text{se e solo se} \qquad z = e^w,$$

relazione che permette di ottenere una formula risolutiva per il calcolo di $\log z$. A tale scopo, posto $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ (forma polare di z), si considera l'equazione $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta} = e^w = e^{u+\mathrm{i}v} = e^u e^{\mathrm{i}v}$ nelle incognite u e v.

Da essa deriva che $|z| = \rho = e^u$, ossia che $u = \ln\rho$, con $\rho > 0$.

Per il calcolo di v si osserva che deve risultare $e^{\mathrm{i}v} = e^{\mathrm{i}\theta}$, ossia $v = \theta + 2n\pi$, con n intero.

Di conseguenza, ricordando che $\rho = |z|$ e $\theta = \arg z$,

$$w = \log z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2n\pi),\ n \text{ intero}.$$

Poiché $\arg(z)$ contiene implicitamente tutti i numeri del tipo $\theta + 2n\pi$, spesso, per semplicità, si scrive

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg(z).$$

Alcuni esempi:

- $$\log(\mathrm{i}) = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$
- $$\log(-2) = \ln|2| + \mathrm{i}\arg(-2) = \ln 2 + (2n+1)\pi\mathrm{i}$$
- $$\log(1-\mathrm{i}) = \ln|\sqrt{2}| + \mathrm{i}\left(\frac{7}{4}\pi + 2n\pi\right)$$

Logaritmo principale. Poiché $\log z$ assume infiniti valori, essa non è propriamente una funzione. La si può comunque considerare tale assumendo come definizione la sua parte principale, cioè la funzione

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg(z), \quad \text{con } 0 \leq \arg(z) < 2\pi.$$

Negli esempi precedenti si porrà dunque

- $$\log(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$$
- $$\log(-2) = \ln 2 + \pi\mathrm{i}$$
- $$\log(1-\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi\mathrm{i}$$

Avvertenza. In molti settori per definire il logaritmo principale si pone la limitazione $-\pi < \arg(z) \leq \pi$, in luogo di $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.

Proprietà: Indicati con z e w due qualsiasi numeri complessi:

1. $e^{\log z} = z$ e $\log e^z = z + 2n\pi\mathrm{i}$, n intero;
2. $\log(zw) = \log z + \log w$;
3. $\log(z/w) = \log z - \log w$;
4. qualunque sia il numero razionale r, $\log(z^r) = r\log z$;
5. indicato con $\mathcal{D}$ il piano complesso privato del semiasse reale non positivo (Figura 1.5), privo cioè dei punti del tipo $x \leq 0$ e $y = 0$, il $\log z$ è analitico in $\mathcal{D}$ e $\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$.

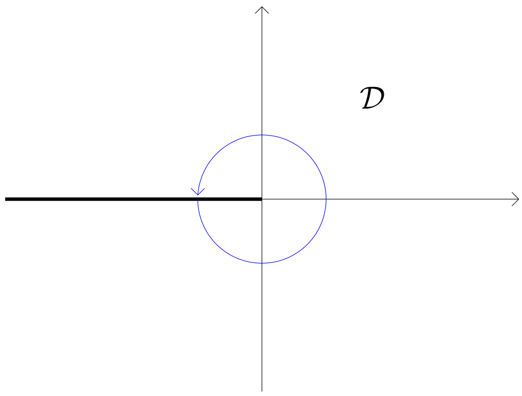


Figura 1.5

Dimostrazione.

1. $e^{\log z} = e^{\ln|z| + \mathrm{i}\arg(z)} = e^{\ln|z|}e^{\mathrm{i}\arg(z)} = |z|e^{\mathrm{i}\arg(z)}$, forma polare di z.

2. $\log(zw) = \ln|zw| + \mathrm{i}\arg(zw) = \ln|z||w| + \mathrm{i}\arg(zw) = \ln|z| + \ln|w| + \mathrm{i}[\arg z + \arg w)] = \log z + \log w$.

3. $\log(z/w) = \ln|z/w| + \mathrm{i}\arg(z/w) = \ln|z| - \ln|w| + \mathrm{i}[\arg z - \arg w)] = \log z - \log w$.

4. Notiamo dapprima che $|z^r| = |z|^r$ e $\arg(z^r) = r\arg(z)$.

   Pertanto

$$\begin{aligned}\log(z^r) &= \ln|z^r| + \mathrm{i}\arg(z^r) = r\ln|z| + \mathrm{i}r\arg(z)\\ &= r[\ln|z| + \mathrm{i}\arg(z)] = r\log z.\end{aligned}$$

5. Sia $w = \log z$, con $z \in \mathcal{D}$. Allora $z = e^w$ e per la derivazione composta $\frac{dz}{dz} = 1 = e^w\frac{dw}{dz}$, da cui, essendo $\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}\log z$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\log z &= e^{-w} = e^{-\log z} = e^{-\ln|z| - \mathrm{i}\arg(z)}\\ &= e^{\ln\frac{1}{|z|} + \mathrm{i}\arg(\frac{1}{z})} = \frac{1}{|z|}e^{\mathrm{i}\arg(\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

□

Esercizio 1.19 *Calcolare* $\log[(2+2\mathrm{i})^{35}]$.

Essendo $2+2\mathrm{i} = 2(1+\mathrm{i}) = 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ *(forma polare) e* $(2+2\mathrm{i})^{35} = (2\sqrt{2})^{35}e^{\mathrm{i}\frac{35}{4}\pi}$,

$$\log[(2+2\mathrm{i})^{35}] = 35\left(\ln 2\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 1.20 *Verificare che* $\log\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \log(1-\mathrm{i}) - \log(1+\mathrm{i})$.

Essendo $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}$, *si ottiene*

$$\log\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \ln|-\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(-\mathrm{i}) = \frac{3}{2}\pi\mathrm{i},$$

e da $\log(1-\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\arg(1-\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi\mathrm{i}$, *e* $\log(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$,

$$\log(1-\mathrm{i}) - \log(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi\mathrm{i} - \ln\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi\mathrm{i} = \log\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

Potenze della forma z^w. Consideriamo ora le funzioni del tipo z^w, dove w è un qualsiasi numero complesso e z è un generico numero complesso diverso da 0.

Ricordiamo preliminarmente che $z^0 = 1$ e che $z^n = \overbrace{z\cdots z}^{n \text{ volte}}$, prodotto di n fattori uguali a z nel caso n sia un intero positivo. Se z è un intero negativo

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}}.$$

Ad esempio:

$$(1+\mathrm{i})^{-4} = \frac{1}{(1+\mathrm{i})^4} = \frac{1}{(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^4} = \frac{1}{4e^{\mathrm{i}\pi}} = -\frac{1}{4}.$$

Nel caso in cui $w = \frac{1}{n}$, n intero positivo, $z^{\frac{1}{n}}$ può essere facilmente calcolato facendo ricorso alle radici n-esime dell'unità. Se $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ (forma polare)

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Se w del tipo $\frac{1}{n}$ con n intero negativo

$$z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{z^{-\frac{1}{n}}}.$$

Pertanto se w è un numero razionale del tipo $w = \frac{m}{n}$, con m, n interi,

$$z^w = (z^{\frac{1}{n}})^m = (z^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Esempio. Calcolare $z^w = (2-2\mathrm{i})^{\frac{3}{5}}$.

$$(2-2\mathrm{i})^3 = 8(1-\mathrm{i})^3 = -16(1+\mathrm{i}) = 16\sqrt{2}e^{(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi)\mathrm{i}}$$

$$\begin{aligned}(2-2\mathrm{i})^{\frac{3}{5}} &= (16\sqrt{2})^{\frac{1}{5}} e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5})\mathrm{i}} \\ &= (16\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right], \ k = 0, 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

Siamo ora in grado, utilizzando le funzioni esponenziale e logaritmo nel campo complesso, di definire z^w per ogni numero complesso $z \neq 0$ e ogni numero complesso w. A tale scopo ricordiamo che, se x è un numero reale positivo e y un qualsiasi numero reale,

$$x^y = e^{y \ln x}.$$

Usando tale relazione come modello, z^w viene definita mediante l'equazione

$$z^w = e^{w \log z}, \quad z \neq 0.$$

Poiché $\log z$ ha infiniti valori, lo stesso vale evidentemente per z^w.

Ad esempio.

$$\begin{aligned} 2^{\mathrm{i}} &= e^{\mathrm{i} \log 2} = e^{\mathrm{i}(\ln 2 + \mathrm{i} \arg 2)} \\ &= e^{\mathrm{i}(\ln 2 + 2n\pi \mathrm{i})} = e^{-2n\pi + \mathrm{i} \ln 2} \\ &= e^{-2n\pi}[\cos(\ln 2) + \mathrm{i} \sin(\ln 2)] \end{aligned}$$

per ogni intero n.

Altro esempio:

$$\begin{aligned} (1-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}} &= e^{(1+\mathrm{i}) \log(1-\mathrm{i})} = e^{(1+\mathrm{i})[\ln|1-\mathrm{i}| + \mathrm{i} \arg(1-\mathrm{i})]} \\ &= e^{(1+\mathrm{i})[\ln \sqrt{2} + \mathrm{i}(\frac{7}{4}\pi + 2n\pi)]} \\ &= e^{\ln \sqrt{2} - (\frac{7}{4}\pi + 2n\pi) + \mathrm{i}(\ln \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi + 2n\pi)} \\ &= e^{\ln \sqrt{2} - (\frac{7}{4}\pi + 2n\pi)} \left[\cos\left(\ln \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi\right) + \mathrm{i} \sin\left(\ln \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi\right)\right] \end{aligned}$$

per ogni intero n.

Poiché n può assumere un qualsiasi valore intero, ciascuna delle due potenze assume infiniti valori.

Proprietà: Qualunque sia il numero complesso $z \neq 0$ e qualunque siano i numeri complessi α e β, valgono le seguenti proprietà:

1. $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$;
2. $z^\alpha / z^\beta = z^{\alpha-\beta}$;
3. $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$.

Derivata di z^w. Indicato con $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti i punti del piano privato dell'origine e del seminasse reale negativo (Figura 1.5), si può dimostrare che la funzione z^w, qualunque siano $z \neq 0$ e w, è ivi analitica e

$$\frac{d}{dz} z^w = w P_r(z^{w-1}),$$

dove P_r indica il valore principale della potenza, ossia $e^{(w-1)P_r(\log z)}$, essendo $P_r(\log z) = \ln |z| + \mathrm{i} \arg(z)$.

Esercizio 1.21 *Determinare* $P_r(2^{3-\mathrm{i}})$.

$$\begin{aligned} 2^{3-\mathrm{i}} &= e^{(3-\mathrm{i})\log 2} = e^{(3-\mathrm{i})[\ln 2 + \mathrm{i}(\arg 2 + 2n\pi)]} = e^{(3-\mathrm{i})(\ln 2 + \mathrm{i}2n\pi)} \\ &= e^{3\ln 2 + 2n\pi - \mathrm{i}(\ln 2 - 6n\pi)} = e^{3\ln 2 + 2n\pi}[\cos(\ln 2) - \mathrm{i}\sin(\ln 2)] \\ &= 8e^{2n\pi}[\cos(\ln 2) - \mathrm{i}\sin(\ln 2)]. \\ P_r(2^{3-\mathrm{i}}) &= e^{3\ln 2}[\cos(\ln 2) - \mathrm{i}\sin(\ln 2)] = 8[\cos(\ln 2) - \mathrm{i}\sin(\ln 2)]. \end{aligned}$$

1.4 Integrazione nel campo complesso

Le differenze tra l'integrazione nel campo complesso e in quello reale sono molto più marcate rispetto a quelle esistenti sulla derivazione. Spesso quella nel campo complesso è molto più agevole rispetto quella nel campo reale, tanto è vero che molte volte si utilizza l'integrazione nel campo complesso per il calcolo di integrali nel campo reale. Cominciamo con il calcolo degli integrali di linea, ossia con il calcolo dell'integrale di una funzione complessa su una curva $\mathcal{C}$.

Supponiamo $\mathcal{C}$ definita nel piano da equazioni parametriche

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ a \leq t \leq b.$$

Diciamo che $\mathcal{C}$ è regolare se $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili in $[a, b]$, con derivate continue e simultaneamente non nulle. In questo caso

$$z'(t) = x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} \ , \qquad \boldsymbol{i} \text{ e } \boldsymbol{j} \text{ versori sugli assi } x \text{ e } y,$$

rappresenta la tangente alla curva in $(x(t), y(t))$, che risulta variabile con continuità. Si dice che $\mathcal{C}$ è regolare a tratti quando $x'(t)$ e $y'(t)$ sono funzioni continue tranne in un numero finito di punti. In questo caso la curva si compone di più funzioni regolari che si raccordano in alcuni punti nei quali non è definita la tangente. Poiché i numeri complessi sono identificabili con punti del piano, il generico punto $(x(t), y(t))$ può essere identificato con il numero complesso $x(t) + \mathrm{i}y(t)$. Per esempio il cerchio unitario con centro l'origine e raggio 1, $|z| = 1$, orientato in senso antiorario, può essere così rappresentato parametricamente:

$$z(t) = \cos t + \mathrm{i} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Come t cresce tra 0 e 2π il punto parte da $(1, 0)$ e percorre il cerchio, in senso antiorario, fino a ritornare nel punto di partenza. Se una curva è definita parametricamente dalla relazione $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ per $a \leq t \leq b$, $z(t)$ si muove lungo la curva, secondo una specifica direzione, al variare di t tra a e b (Figura 1.6).

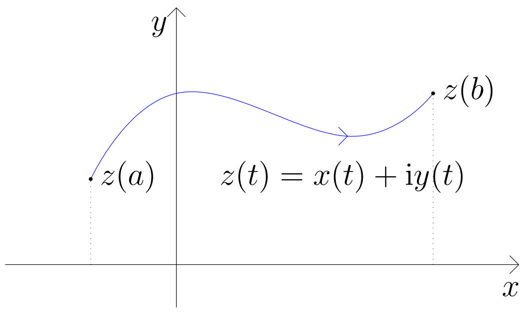


Figura 1.6

Integrale lungo la curva $\mathcal{C}$. Sia $f(z)$ una funzione complessa di variabile complessa. Supponiamo che $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ descrive una curva $\mathcal{C}$ al variare di $a \leq t \leq b$. Suddividiamo $[a, b]$ inserendovi un insieme di punti

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

e indichiamo con $z_j = z(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, i corrispondenti punti sulla curva. In ogni intervallino $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, prendiamo un punto τ_j e consideriamo la somma

$$\sum_{j=1}^{n} f(\hat{z}_j)(z_j - z_{j-1}), \qquad \text{dove } \hat{z}_j = z(\tau_j),\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Facciamo tendere $n \to \infty$, nell'ipotesi che conseguentemente $|t_j - t_{j-1}| \to 0$. Se la somma considerata converge ad L, qualunque sia la scelta dei punti τ_j operata, si dice che L è l'integrale di linea della f su $\mathcal{C}$ e si scrive

$$L = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

Teorema 1.13 *Se la f è continua su $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ è regolare a tratti, l'integrale della f su $\mathcal{C}$ esiste.*

Proprietà:

1. Se -$\mathcal{C}$ indica la curva ottenuta da $\mathcal{C}$ invertendone l'orientazione
$$\int_{-\mathcal{C}} f(z)dz = -\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$

2. qualunque sia il numero reale α,
$$\int_{\mathcal{C}} [\alpha f(z)]dz = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$

3. se f e g sono entrambi integrabili su $\mathcal{C}$,
$$\int_{\mathcal{C}} [f(z) + g(z)]dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}} g(z)dz$$

4. se $\mathcal{C}$ è una curva regolare rappresentata parametricamente da $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, e f è una funzione continua su $\mathcal{C}$.
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Esercizio 1.22 *Calcolare* $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$*, essendo*

1. $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ *e* $\mathcal{C}$ *il segmento di retta che unisce i punti* 1 *e* $2 + \mathrm{i}$.

   L'equazione della retta su cui giace il segmento è $z(t) = t+1+\mathrm{i}t$, $0 \leq t \leq 1$. *Pertanto*
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_0^1 (t+1)z'(t)dt = \int_0^1 (t+1)(1+\mathrm{i})dt = \frac{3}{2}(1+\mathrm{i}).$$

2. $f(z) = \sin(2z)$ *e* $\mathcal{C}$ *il segmento che unisce* $-\mathrm{i}$ *con* $-4\mathrm{i}$.

   Poiché $z(t) = -\mathrm{i}t$, $1 \leq t \leq 4$,
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \sin(2z)dz &= \int_1^4 \sin(-2t\mathrm{i})(-\mathrm{i})dt = \mathrm{i}\int_1^4 \sin(2t\mathrm{i})dt = \mathrm{i}\int_1^4 \mathrm{i}\sinh 2t dt \\ &= -\frac{1}{2}\cosh 2t\Big|_1^4 = \frac{1}{2}(\cosh 2 - \cosh 8).\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $f(z)$ e $F(z)$ siano funzioni analitiche in un dominio $\mathcal{D}$ con $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \mathcal{D}$. $F(z)$ è allora definita una primitiva (anti derivata) di $f(z)$. È evidente che se $F(z)$ è una primitiva lo è anche

$F(z)+\alpha$, qualunque sia il numero complesso α. Sotto le suddette ipotesi, se $\mathcal{C}$ è una curva regolare z contenuta in un dominio $\mathcal{D}$ con estremi z_1 e z_2

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Tale integrale è evidentemente nullo se la curva è chiusa. In analogia con il caso reale, $F(z)$ viene generalmente indicata nella forma

$$F(z) = \int f(z)dz.$$

Esempi:

- $\int (6z - 4\cos z)dz = 3z^2 - 4\sin z + c$
- $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c \ , \ n \neq -1$
- $\int \alpha^z dz = \frac{\alpha^z}{\ln \alpha} + c \ , \ \alpha > 0$
- $\int \cosh z dz = \sinh z + c$
- $\int \tan z dz = -\ln \cos z + c$
- $\int e^{\alpha z} \sin bz dz = \frac{e^{\alpha z}(\alpha \sin bz - b\cos bz)}{\alpha^2 + b^2} + c$

Nell'integrazione complessa riveste un'importanza basilare un teorema di Cauchy (talvolta detto di Cauchy-Goursat), la cui introduzione necessita di alcune definizioni preliminari. Una curva $\mathcal{C}$ è detta semplice se non si interseca, ossia se $\mathcal{C}(t') = \mathcal{C}(t'')$ solo se $t' = t''$. Una curva semplice è chiusa se $\mathcal{C}(t') = \mathcal{C}(t'')$ solo se $t' = a$ e $t'' = b$, nell'ipotesi che la curva venga descritta da $x = x(t)$ e $y = y(t)$ per $a \leq t \leq b$. Un dominio $\mathcal{D}$ è semplicemente connesso se una qualsiasi curva chiusa ivi contenuta possiede unicamente punti di $\mathcal{D}$. Questo implica che $\mathcal{D}$ non contiene "buchi" (Figura 1.7). Diversamente il dominio è definito molteplicemente connesso (Figura 1.8).

Teorema 1.14 (Cauchy o Cauchy-Goursat) *Se f è una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ è una qualsiasi curva chiusa ivi contenuta,*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0.$$

Molto spesso, per meglio evidenziare che $\mathcal{C}$ è una curva chiusa, si scrive

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz \qquad \textit{in luogo di} \qquad \int_{\mathcal{C}} f(z)dz.$$

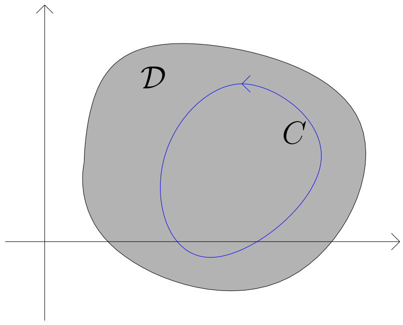


Figura 1.7

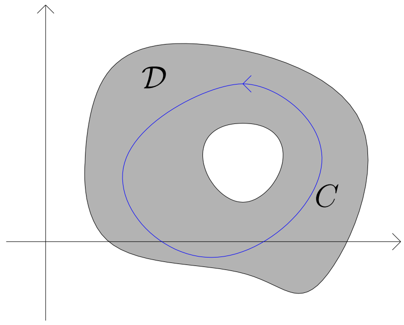


Figura 1.8

Esercizio 1.23

1. *Verificare, in modo diretto, che*

$$\oint_{\mathcal{C}} (z+2)dz = 0$$

essendo $\mathcal{C}$ l'ellisse definita da $x(\theta) = 4\cos\theta$ e $y(\theta) = 3\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Poiché $z+2$ è analitica in tutto il piano complesso e $\mathcal{C}$ è una curva chiusa, l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy. Calcoliamo ora l'integrale in modo diretto

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} (z+2)dz &= \int_0^{2\pi} [(4\cos\theta+2)+\mathrm{i}3\sin\theta](-4\sin\theta+\mathrm{i}3\cos\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \{[-16\cos\theta\sin\theta - 9\sin\theta\cos\theta] \\ &\qquad\qquad + \mathrm{i}[3\cos\theta(4\cos\theta+2) - 12\sin^2\theta]\}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{25}{2}\sin 2\theta + \mathrm{i}(12\cos 2\theta + 6\cos\theta)\right] d\theta \\ &= \left[-\frac{25}{4}\cos 2\theta + 6\mathrm{i}(\sin 2\theta + \sin\theta)\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

2. *Dimostrare che*

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{z^2} dz = 0$$

essendo $\mathcal{C}$ il cerchio di centro l'origine e raggio 1. Il risultato è vero per il teorema di Cauchy, in quanto e^{z^2} (come abbiamo già visto) è analitica sul piano complesso e $\mathcal{C}$ è una curva chiusa.

3. *Dopo aver osservato che*

$$\oint_{\mathcal{C}} e^z dz = 0, \qquad |z| = 1$$

dimostrare che

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta+\sin\theta)d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)d\theta = 0.$$

Per il teorema di Cauchy

$$\oint_{\mathcal{C}} e^z dz = 0, \qquad z = e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \qquad 0 \le \theta < 2\pi.$$

Di conseguenza, ricordando la formula di Eulero,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+\mathrm{i}\sin(\sin\theta)](-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\{-[\cos(\sin\theta)\sin\theta+\sin(\sin\theta)\cos\theta] \\
&\qquad\qquad + \mathrm{i}[\cos(\sin\theta)\cos\theta-\sin(\sin\theta)\sin\theta]\}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[-\sin(\sin\theta+\theta)+\mathrm{i}\cos(\sin\theta+\theta)]d\theta = 0
\end{aligned}$$

e il risultato è verificato, dovendo separatamente annullarsi la parte reale e quella immaginaria.

4. *Calcolare* $\oint_{\mathcal{C}}(2z+\bar{z})dz$*, essendo* $|z|=1$*. Poiché la funzione non è analitica, non è affatto detto che l'integrale sia nullo. Calcoliamolo in modo diretto:*

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}}(2z+\bar{z})dz &= \int_0^{2\pi}(2e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta})e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}d\theta \\
&= \mathrm{i}\int_0^{2\pi}[2(\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)+1]d\theta \\
&= 2\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

5. *Calcolare*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{(z+\mathrm{i})^2\cos z}dz$$

essendo $\mathcal{C}$ *il cerchio di centro l'origine e raggio* α *con* $0<\alpha<1$*. La funzione integranda è analitica, in quanto rapporto di funzioni analitiche, tranne negli zeri del denominatore ossia in* $z=-\mathrm{i}$ *e* $z_k=(2k-1)\frac{\pi}{2}$*, con* k *intero. In particolare è analitica nel cerchio* $\mathcal{C}$ *e pertanto, per il teorema di Cauchy, l'integrale è nullo.*

Teorema 1.15 (Deformazione del dominio) *Sia* $f(z)$ *una funzione analitica in un dominio* $\mathcal{D}$ *limitato da due curve semplici chiuse* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *(Figura 1.9). Come conseguenza del Teorema di Cauchy*

$$\oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)dz.$$

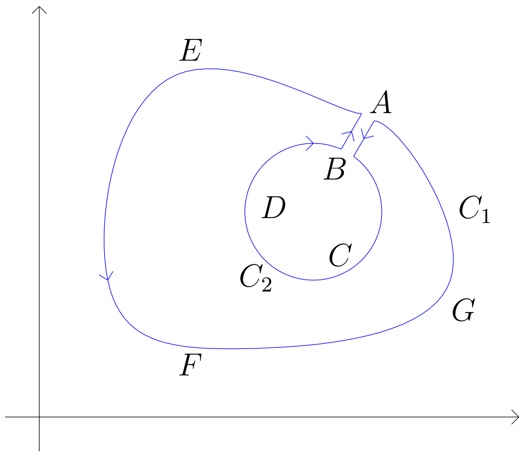


Figura 1.9

Dimostrazione. Si uniscano le due curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ con un taglio lineare AB. Resta così definito un dominio chiuso e limitato definito dalla traiettoria ABCDBAEFGA chiusa, percorsa in senso antiorario a partire da A. Poiché all'interno del dominio da essa limitata la funzione è analitica, per ipotesi, e il dominio è semplicemente connesso, per il teorema di Cauchy

$$\int_{ABCDBAEFGA} f(z)dz =$$
$$= \int_{AB} f(z)dz + \int_{BCDB} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz + \int_{AEFGA} f(z)dz = 0.$$

Da cui, essendo $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$, in quanto la stessa funzione viene integrata sulla stessa traiettoria percorsa prima in un verso e poi in quello opposto, si ha che

$$\int_{AEFGA} f(z)dz = -\int_{BCDB} f(z)dz \text{ , ossia } \oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)dz.$$

Per la conclusione finale basta osservare che la curva AEFGA che rappresenta $\mathcal{C}_1$ viene percorsa in senso antiorario e la BCDB in senso orario, per cui essa rappresenta $-\mathcal{C}_2$. □

Esercizio 1.24 *Calcolare*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\alpha}$$

dove $\mathcal{C}$ è una qualsiasi curva semplice chiusa e α è: ***(a)*** *esterno a $\mathcal{C}$;* ***(b)*** *interno a $\mathcal{C}$.*

*Nel caso **(a)** l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy, in quanto* $\frac{1}{z-\alpha}$ *è analitica nel dominio semplicemente connesso* $\mathcal{D}$ *delimitato da* $\mathcal{C}$ *sulla stessa curva chiusa.*

*Nel caso **(b)**, indicato con* Γ *un cerchio di centro* α *e raggio* $\epsilon > 0$ *contenuto in* $\mathcal{C}$ *(Figura 1.10), per il teorema sulla deformazione del dominio*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\alpha} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-\alpha}.$$

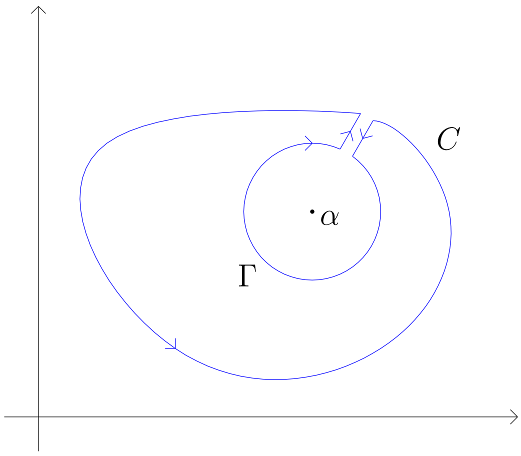


Figura 1.10

Questo secondo integrale può essere facilmente calcolato in modo diretto, in quanto lungo la frontiera di Γ, $z = \alpha + \epsilon e^{\mathrm{i}\theta}$ *con* $0 \leq \theta \leq 2\pi$*. Pertanto*

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\epsilon e^{\mathrm{i}\theta} d\theta}{\epsilon e^{\mathrm{i}\theta}} = 2\pi\mathrm{i}$$

e dunque $\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi\mathrm{i}.$

Il risultato precedente si può facilmente generalizzare al calcolo di

$$I_n = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-\alpha)^n} \ , \ n = 2, 3, \ldots$$

Come nel caso precedente, $I_n = 0$ se α è esterno al dominio definito da $\mathcal{C}$ e, se α è interno a $\mathcal{C}$, può essere calcolato nel modo seguente

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-\alpha)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\epsilon e^{\mathrm{i}\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{\mathrm{i}}{\epsilon^{n-1}} \left. \frac{e^{\mathrm{i}(1-n)\theta}}{\mathrm{i}(1-n)} \right|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \left[\frac{e^{\mathrm{i}(1-n)2\pi} - 1}{1-n} \right] = 0 \ , \ n = 2, 3, \ldots\end{aligned}$$

Si può pertanto affermare che:

1. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-\alpha)^n} = 0$ se α è esterno a $\mathcal{C}$;

2. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-\alpha)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{se } n=2,3,\dots \end{cases}$ se α è interno a $\mathcal{C}$.

Teorema 1.16 (Generalizzazione del teorema di deformazione del dominio) *Sia $f(z)$ analitica in una regione del piano delimitata dalle curve chiuse, semplici e che non si intersecano $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ interne a $\mathcal{C}$ (Figura 1.11). Sotto tali condizioni*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{\mathcal{C}_n} f(z)dz.$$

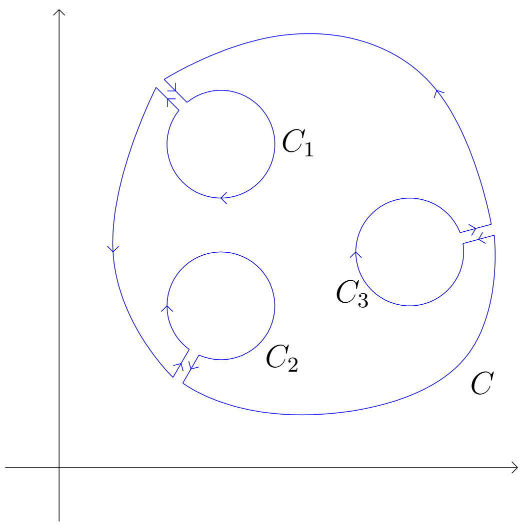


Figura 1.11

Esercizio 1.25 *Calcolare $\oint_{\mathcal{C}} \bar{z}^2 dz$ lungo i cerchi $|z| = 1$ e $|z-1| = 1$. Non è detto che l'integrale sia nullo, in quanto la funzione non è analitica, come è immediato osservare, verificando che non sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann.*

Nel primo caso, essendo $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{z}^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{-2\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}\theta} d\theta = \mathrm{i}\left.\frac{e^{-\mathrm{i}\theta}}{-\mathrm{i}}\right|_0^{2\pi} = -\left. e^{-\mathrm{i}\theta}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Nel secondo caso, $z = 1 + e^{\mathrm{i}\theta}$ *e pertanto*

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \bar{z}^2 dz &= \int_0^{2\pi} (1 + e^{-\mathrm{i}\theta})^2 \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (1 + e^{-2\mathrm{i}\theta} + 2e^{-\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} d\theta \\ &= \mathrm{i}\int_0^{2\pi} (e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta} + 2) d\theta = 2\mathrm{i}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + 1) d\theta = 2\mathrm{i}\left[\sin\theta + \theta\right]_0^{2\pi} = 4\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.26 *Calcolare* $\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-2}$ *lungo **(a)** il cerchio* $|z-2| = 4$*, **(b)** il cerchio* $|z-1| = 5$*, **(c)** il quadrato con i vertici* $2 \pm 2\mathrm{i}$, $-2 \pm 2\mathrm{i}$.

Per quanto già osservato, essendo $\frac{1}{z-2}$ *analitica tranne in 2, punto interno a ciascuna delle tre curve, si avrà in entrambi i casi*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-2} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Un'altra fondamentale conseguenza del teorema di Cauchy è la cosiddetta indipendenza dell'integrale dal cammino di integrazione.

Teorema 1.17 (Indipendenza dal percorso) *Sia* $f(z)$ *analitica in un dominio* $\mathcal{D}$ *semplicemente connesso. Indicati con* a *e* b *due punti qualsiasi di* $\mathcal{D}$ *(Figura 1.12), il valore di* $\int_a^b f(z)dz$ *è del tutto indipendente dal percorso seguito per unire* a *con* b.

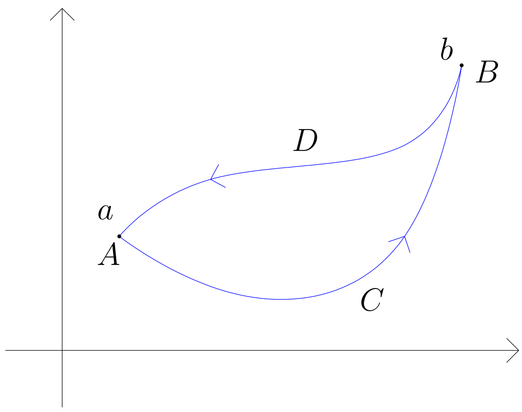


Figura 1.12

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ la curva chiusa formata dalle curve ACB e BDA che uniscono rispettivamente a con b e viceversa b con a.

Per il teorema di Cauchy

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{ACB} f(z)dz + \int_{BDA} f(z)dz = 0$$

e pertanto, osservato che $\int_{BDA} f(z)dz = -\int_{ADB} f(z)dz$ in conseguenza dell'inversione del verso di percorrenza della curva,

$$\int_{ACB} f(z)dz = \int_{ADB} f(z)dz.$$

Il risultato è dunque del tutto indipendente dal percorso. □

Esercizio 1.27 *Indicata con $\mathcal{C}$ la cubica $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ che congiunge i punti $(1, 1)$ e $(2, 3)$, calcolare*

$$\oint_{\mathcal{C}} (12z^2 - 4\mathrm{i}z)dz.$$

Poiché il valore dell'integrale è indipendente dal percorso, per semplicità, possiamo calcolare l'integrale lungo il segmento lineare che unisce gli estremi della curva, ossia procedendo lungo la retta di equazione $z = t + \mathrm{i}(2t - 1)$, $1 \le t \le 2$. Si ottiene così

$$\int_{1+\mathrm{i}}^{2+3\mathrm{i}} (12z^2 - 4\mathrm{i}z)dz = \left[4z^3 - 2\mathrm{i}z^2\right]_{1+\mathrm{i}}^{2+3\mathrm{i}} = -156 + 38\mathrm{i}.$$

Naturalmente si perviene allo stesso risultato calcolando

$$\begin{aligned} & 4\int_1^2 \{3[t + \mathrm{i}(2t-1)]^2 - \mathrm{i}[t + \mathrm{i}(2t-1)]\}(1 + 2\mathrm{i})dt \\ &= 4(1 + 2\mathrm{i})\int_1^2 [(-9t^2 + 14t - 4) + \mathrm{i}(12t^2 - 7t)]dt \\ &= 4(1 + 2\mathrm{i})\left[\left(-3t^3 + 7t^2 - 4t) + \mathrm{i}(4t^3 - \frac{7}{2}t^2\right)\right]_1^2 \\ &= (1 + 2\mathrm{i})(-16 + \mathrm{i}70) = -156 + 38\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.28 *Calcolare*

$$\int_{\mathcal{C}} (z^2 + 1)^2 dz$$

lungo l'arco di cicloide $x = \alpha(\theta - \sin\theta)$, $y = \alpha(1 - \cos\theta)$, α numero positivo, compreso tra il punto in cui $\theta = 0$ e il punto in cui $\theta = 2\pi$.

Osservato che $z_1 = x(0) + \mathrm{i}y(0) = 0$ e $z_2 = x(2\pi) + \mathrm{i}y(2\pi) = 2\pi\alpha$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (z^2 + 1)^2 dz &= \int_{z_1}^{z_2} (z^2 + 1)^2 dz = \int_0^{2\pi\alpha} (z^4 + 2z^2 + 1)dz = \left[\frac{z^5}{5} + \frac{2}{3}z^3 + z\right]_0^{2\pi\alpha} \\ &= \frac{1}{15}(96\pi^5\alpha^5 + 80\pi^3\alpha^3 + 30\pi\alpha). \end{aligned}$$

Esercizio 1.29 *Dopo aver osservato che* $\int_C e^{-2z}dz$ *è indipendente dalla traiettoria che unisce i punti* $1-\pi\mathrm{i}$ *e* $2+3\pi\mathrm{i}$, *calcolarne il valore.*

Il risultato non dipende dalla traiettoria, ma solo dai punti estremi, in quanto e^{-2z} *è ovunque analitica. Di conseguenza, unendo i due punti in linea retta,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} e^{-2z}dz &= \int_{1-\pi\mathrm{i}}^{2+3\pi\mathrm{i}} e^{-2z}dz = -\frac{1}{2}e^{-2z}\Big|_{1-\pi\mathrm{i}}^{2+3\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\left[e^{-2(1-\pi\mathrm{i})} - e^{-2(2+3\pi\mathrm{i})}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{-2}(e^{2\pi\mathrm{i}} - e^{-2}e^{-6\pi\mathrm{i}}) = \frac{1}{2}e^{-2}(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

1.5 Formule integrali di Cauchy e conseguenze

Le formule integrali di Cauchy rendono evidenti alcune fondamentali differenze tra le funzioni complesse e quelle reali. La prima formula integrale di Cauchy dimostra, in particolare, che il valore in un punto z_0 di una funzione analitica dipende unicamente dai valori che essa assume in una qualsiasi curva chiusa semplice C che circonda z_0. Questo consente di ridurre il calcolo dell'integrale della $f(z)$ su C alla valutazione della f in z_0.

Teorema 1.18 (Formula integrale di Cauchy) *Sia* f *una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso* $\mathcal{D}$. *Supponiamo inoltre che* z_0 *sia un punto interno a* $\mathcal{D}$ *e che* C *sia una curva chiusa semplice contenuta in* $\mathcal{D}$ *avente* z_0 *al suo interno. Sotto tali ipotesi*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Dimostrazione. In conseguenza del teorema di deformazione del dominio, indicata con $\widehat{C}$ una circonferenza con centro z_0 e raggio r contenuta in C (Figura 1.13), si può affermare che

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{\widehat{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Pertanto, essendo $z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$,

$$\oint_{\widehat{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\,d\theta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,d\theta,$$

ossia

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,d\theta,$$

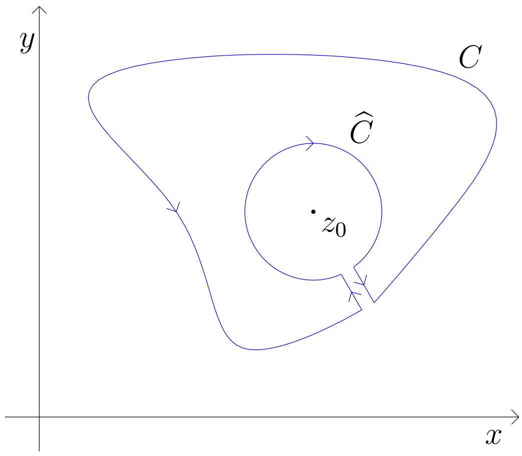


Figura 1.13

da cui, tenendo conto della continuità della f su $\widehat{C}$,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{r\to 0} \mathrm{i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,d\theta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(z_0)\,d\theta = 2\pi\mathrm{i}\cdot f(z_0).$$

$\square$

Esercizio 1.30 *Calcolare, mediante la formula integrale di Cauchy,*

$$I = \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz,$$

essendo C una curva chiusa semplice con $z = 1$ e $z = 2$ al suo interno.

Poiché $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$,

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2}\,dz - \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1}\,dz, \quad \textit{(formula di Cauchy)} \\ &= 2\pi\mathrm{i}(\sin 4\pi + \cos 4\pi) - 2\pi\mathrm{i}(\sin \pi + \cos \pi) = 4\pi\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Estensione della formula di Cauchy al caso dei domini multiconnessi. Supponiamo che il dominio $\mathcal{D}$ sia molteplicemente connesso, come nella Figura 1.14. Allora, indicati con $\widehat{C}$ una curva chiusa semplice interamente contenuta in $\mathcal{D}$ e con C l'intera frontiera di $\mathcal{D}$ percorsa in modo da lasciare sempre $\mathcal{D}$ alla sinistra, risulta

$$\left(\oint_{C_1} - \oint_{C_2} - \oint_{C_3}\right) \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \oint_{\widehat{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0,$$

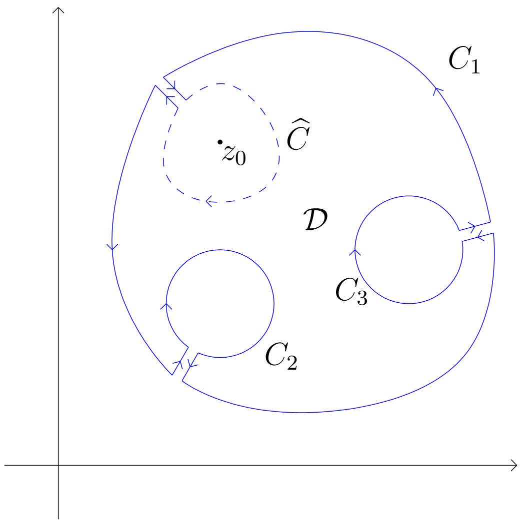


Figura 1.14

da cui, per la formula integrale di Cauchy,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{\widehat{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi \mathrm{i} \cdot f(z_0).$$

Di conseguenza, per i domini multiconnessi vale la seguente estensione della formula di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

dove C è il percorso complessivo $C_1 - C_2 - C_3$, orientato in modo da lasciare sempre alla sinistra il dominio $\mathcal{D}$.

Esempio 1.1 *Il caso particolare dell'anello. Supponiamo che $\mathcal{D}$ sia il dominio compreso tra due cerchi di raggio R ed r rispettivamente. In questo caso*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\mathcal{C}_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \oint_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \right]$$

dove $\mathcal{C}_R$ e $\mathcal{C}_r$ indicano due circonferenze con centro z_0 e raggi rispettivamente R ed r, ambedue percorse in senso antiorario. Di conseguenza il calcolo dell'integrale di $\frac{f(z)}{z-z_0}$ lungo la frontiera $\mathcal{C}_R - \mathcal{C}_r$ del dominio $\mathcal{D}$ limitato dalle due circonferenze e percorso in senso antiorario, nel caso $f(z)$ sia analitica e $z_0 \in \mathcal{D}$ è semplicemente $2\pi i f(z_0)$.

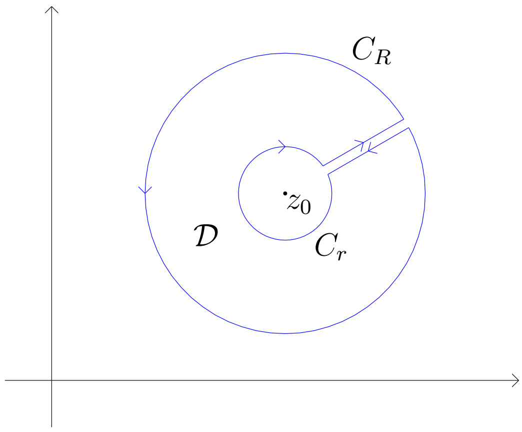


Figura 1.15

Esercizio 1.31

1. *Calcolare* $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{z^2}}{z+i}\,dz$.
2. *Calcolare* $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz$ *lungo un rettangolo con vertici in:*
   (a) $2 \pm i$, $-2 \pm i$;
   (b) $2 \pm i$, $\pm i$.
3. *Verificare che* $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin(t)$, *essendo* $\mathcal{C}$ *la circonferenza* $|z| = 2$ *e* t *un qualsiasi numero positivo.*

(1) Si presentano due casi a seconda che $-i$ *sia esterno o interno a* $\mathcal{C}$. *Nel primo caso l'inteegrale è nullo per il teorema di Cauchy. Nel secondo caso vale* $2\pi i e^{(-i)^2} = 2\pi e^{-1} i$.

(2) Caso (2a). Poiché $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$, *osservato che* ± 1 *cadono entrambi all'interno del rettangolo,*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\left[\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z-1}\,dz - \oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z+1}\,dz\right] = \pi i[\cos(\pi) - \cos(-\pi)] = 0.$$

Caso (2b). Essendo -1 *esterno al rettangolo, in base alla formula precedente,*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z-1}\,dz = \pi i \cos(\pi) = -\pi i.$$

(3) Poiché $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$ *e ambedue i numeri* $\pm i$ *sono interni a* $\mathcal{C}$*,*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{2i}\left[\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}}{z-i}\, dz - \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}}{z+i}\, dz\right] = 2\pi i \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = 2\pi i \sin(t)$$

e dunque il risultato è esatto.

1.5.1 Formula integrale per le derivate di ordine superiore.

Procedendo per induzione, la formula integrale di Cauchy può essere estesa alle derivate di ordine superiore nel modo seguente: se f è analitica in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$ e z_0 è interno a $\mathcal{D}$, f è indefinitamente derivabile in z_0 e inoltre, per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \tag{1.1}$$

dove $\mathcal{C}$ è una qualsiasi curva chiusa contenuta in $\mathcal{D}$ e contenente z_0 al suo interno.

Esercizio 1.32 *Calcolare:*

1. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\, dz$*, dove* $\mathcal{C}$ *è la circonferenza* $|z| = \frac{\pi}{3}$*;*
2. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z^2)}{(z+1)^3}\, dz$*, essendo* $\mathcal{C}$ *una curva chiusa semplice non passante per* -1*;*
3. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{2z\cos(hz)}{(z-2+4i)^2}\, dz$*, essendo* $\mathcal{C}$ *una curva chiusa semplice non passante per* $2-4i$*.*

(1) Poiché e^{2z} *è ovunque analitica e* -1 *è interno al cerchio* $\mathcal{C}$*, per la formula integrale relativa alla derivata terza,*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\, dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3} e^{2z}\right]_{z=-1} = \frac{2\pi i}{6} 8e^{-2} = \frac{8}{3}\pi e^{-2} i.$$

(2) Se -1 *non cade all'interno di* $\mathcal{C}$ *, l'integrale è nullo dato che* $\frac{\sin(z^2)}{(z+1)^3}$ *risulterebbe analitica in* $\mathcal{C}$*. Se invece* $\mathcal{C}$ *include* -1*, per la formula integrale relativa alle derivate seconde* $(n = 2)$*,*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z^2)}{(z+1)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\sin(z^2)\right]_{z=-1} =$$
$$= \pi i \left[2\cos(z^2) - 4z^2 \sin(z^2)\right]_{z=-1} = 2\pi i(cos(1) - 2\sin(1)).$$

(3) Naturalmente l'integrale è nullo se $2-4i$ è esterno a $\mathcal{C}$. In caso contrario, si può applicare la formula integrale relativa alla derivata prima. Più precisamente, osservato che $\frac{d}{dz}(2z\cos(hz)) = 2(\cos(hz) + hz\sin(hz))$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{2z\cos(hz)}{(z-2+4i)^2}\,dz = 4\pi i[\cos(h(2-4i)) + h(2-4i)\sin(h(2-4i))]$$

Teorema 1.19 (Teorema di Liouville) *Supponiamo che $f(z)$ sia una funzione analitica nell'intero piano complesso e che la f sia ivi limitata, ossia che esista un numero L tale che $|f(z)| \leq L$ per ogni numero complesso z. Sotto tali ipotesi la funzione $f(z)$ è costante.*

La dimostrazione, che qui viene omessa, è basata sulla formula integrale di Cauchy. Il teorema 1.19 implicitamente stabilisce che una funzione non costante e analitica su tutto il piano complesso è non limitata. Di conseguenza funzioni come $\sin(z)$ e $\cos(z)$ non sono limitate nel piano complesso, anche se lo sono in quello reale.

Altra conseguenza quasi immediata è il seguente:

Teorema 1.20 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio $p(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$, con n positivo, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ complessi e $a_0 \neq 0$, possiede esattamente n zeri, ossia n numeri z_i, $i = 1, \ldots, n$, tali che $p(z_i) = 0$.*

La semplice dimostrazione si avvale del teorema 1.19.

Dimostrazione. Si può dimostrare per induzione. Per $n = 0$ è banale. Supponiamo che per un polinomio di grado $n-1$ sia vero. Un polinomio di grado n deve avere almeno uno zero: infatti, in caso contrario, la funzione $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ sarebbe analitica su tutto il piano e ivi limitata, dato che $|f(z)| \to 0$ per $|z| \to +\infty$, e questo contraddice il teorema di Liouville, in quanto la f non è costante. Sia z_n questo zero. Dividendo il polinomio $p(z)$ per $(z - z_n)$ si elimina lo zero, ottenendo un polinomio di grado $n-1$, che, per ipotesi, ha esattamente altri $n-1$ zeri $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Il numero di zeri è quindi esattamente pari ad n, ed il teorema è dimostrato. $\square$

1.6 Funzioni analitiche e serie di Taylor

Teorema 1.21 (Teorema di Taylor) *Sia f una funzione analitica in un cerchio $\mathcal{C}$ con centro in z_0. Sotto tali ipotesi, per ogni $z \in \mathcal{C}$, la f è sviluppabile* *nella serie di potenze*

$$
\begin{aligned}
f(z) \;=\; & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \\
& + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots .
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Dimostrazione. Per la formula integrale di Cauchy, indicato con $\mathcal{C}_1$ un cerchio interno a $\mathcal{C}$ e con z un qualsiasi punto interno a $\mathcal{C}_1$

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \tag{1.3}
$$

Poiché

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\left\{\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\right\} = \\
&= \frac{1}{w-z_0}\,\frac{\left[1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\right]+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \\
&= \frac{1}{w-z_0}\left\{1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2+\cdots+\right. \\
&\quad \left. +\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{(n-1)}+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\right\}
\end{aligned}
$$

per la formula integrale di Cauchy,

$$
\begin{aligned}
f(z) = & \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw + \frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw + \cdots + \\
& + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\,dw + R_n(z)
\end{aligned}
$$

dove

$$
R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw
$$

Si può ora osservare che qualunque sia $z \in \mathcal{C}_1$, $R_n(z) \to 0$ per $n \to \infty$, in quanto la f è limitata in $\mathcal{C}_1$ e $\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right) < 1$, dato che z è interno a $\mathcal{C}_1$ e w è sulla frontiera di $\mathcal{C}_1$.

Pertanto, per $n \to \infty$, $f(z)$ è rappresentabile come una serie di potenze del tipo

$$
f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \ldots
$$

dove, per le formule integrali di Cauchy,

$$a_0 = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w - z_0}\,dw \qquad \text{e}$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw \quad , \text{per } n = 1, 2, \ldots.$$

□

Esercizio 1.33

1. *Sviluppare in una serie di potenze centrata in $z_0 = 0$, la funzione $y = \log(1+z)$ nell'ipotesi che $\arg(\log(1)) = 0$;*
2. *determinare il raggio di convergenza della serie del punto 1;*
3. *sviluppare in una serie di Taylor, centrata in $z_0 = 0$, la funzione $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$*

(1)

$$\begin{array}{ll}
f(z) = \log(1+z), & f(0) = 1 \\
f'(z) = (1+z)^{-1}, & f'(0) = 1 \\
f''(z) = -(1+z)^{-2}, & f''(0) = -1 \\
f'''(z) = 2(1+z)^{-3}, & f'''(0) = 2 \\
\vdots & \\
f^{(n)}(z) = (-1)^n (n-1)!(1+z)^{-n}, & f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!
\end{array}$$

Pertanto, ricordando che

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots$$

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n + \ldots$$

(2) Per il criterio del rapporto, essendo $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{n+1}\frac{n}{z^n}\right| = |z| < 1$$

e pertanto il raggio di convergenza è 1.

(3) Sostituendo z con $-z$ nello sviluppo di $\log(1+z)$ si ottiene:

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots + \frac{(-1)^{2n-1}}{n}z^n + \ldots$$

Il cui raggio di convergenza è ugualmente 1. Sottraendo $\log(1-z)$ *da* $\log(1+z)$ *si ottiene:*

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

anche'essa convergente per $|z| < 1$.

Esercizio 1.34 *Sviluppare* $f(z) = \sin(z)$ *in una serie di Taylor centrata in* $z_0 = \pi/4$ *e determinare il suo raggio di convergenza.*

Si ha

$$\begin{array}{ll} f(z) = \sin(z), & f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'(z) = \cos(z), & f'(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f''(z) = -\sin(z), & f''(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'''(z) = -\cos(z), & f'''(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f''''(z) = \sin(z), & f''''(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \dots\right\} \end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto il raggio di convergenza della serie $R = +\infty$ *in quanto, qualunque sia il valore di* z,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-\pi/4)^{n+1}}{n+1!}\frac{n!}{(z-\pi/4)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z-\pi/4|}{n+1} = 0.$$

Ci sono dei casi nei quali lo sviluppo in serie di Taylor può essere ottenuto in modo diretto, facendo ricorso a sviluppi ben noti. Supponiamo, ad esempio, di voler determinare la serie di Taylor della funzione e^z centrata in i. La serie è evidentemente

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-i)^n \quad , \text{con } a_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!}.$$

Poiché $f(z) = e^z$ e $f^{(n)}(z) = e^z$, $a_n = \frac{e^i}{n!}$. Lo stesso risultato è ottenibile mediante il seguente artificio, basato sulla conoscenza dello sviluppo di $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$:

$$e^{z-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} \qquad \text{e dunque}$$

$$e^z = e^i e^{z-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^i}{n!}(z-i)^n \quad .$$

Sfruttando la stessa idea, ossia la conoscenza di sviluppi in serie noti, è talvolta immediato calcolare altri sviluppi in serie. Ad esempio, ricordando che $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, è immediato sviluppare in serie di Taylor centrata in i la funzione $\sin(z-i)^2$. Sarà infatti sufficiente scrivere

$$\sin(z-i)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[(z-i)^2\right]^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-i)^{4n+2}$$

Esercizio 1.35 *Sviluppare* $1/(1+z)$ *in una serie di Taylor centrata in* $-2i$.

La serie è evidentemente del tipo

$$\tfrac{1}{1+z} = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z+2i)^n \quad , a_n = \frac{f^{(n)}(-2i)}{n!}, \ n = 0, 1, \ldots$$

essendo $f(z) = 1/(1+z)$. *Osservato che* $f^{(n)}(z) = (-1)^n n!(1+z)^{-(n+1)}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{(1-2i)^{n+1}}$. *Di conseguenza*

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-2i)^{n+1}} (z+2i)^n.$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto ricordando lo sviluppo di $1/(1+z)$, *che rappresenta lo sviluppo di una serie geometrica con termine iniziale 1 e ragione* $-z$. *per cui* $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$. *Basta infatti adottare il seguente semplicissimo artifizio:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1+z+2i-2i} = \frac{1}{(z+2i)+(1-2i)} = \frac{1}{1-2i} \frac{1}{1+\frac{z+2i}{1-2i}} = \\ &= \frac{1}{1-2i} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z+2i}{1-2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-2i)^{n+1}} (z+2i)^n.\end{aligned}$$

Esercizio 1.36 *Sviluppare* $\sin(z)$ *in serie di Taylor con punto iniziale* $z_0 = \pi/4$.

Da

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \sin\left[\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right],\end{aligned}$$

ricordando gli sviluppi in serie di Taylor di $\sin(x)$ *e* $\cos(x)$, *con* $x = z - \pi/4$, *si* *ottiene*

$$
\begin{aligned}
sin(z) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)+\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)\right\}=\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right\}=\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\right.\\
&\left.+\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}+\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}+\dots\right\}.
\end{aligned}
$$

1.6.1 Funzioni analitiche e serie di Laurent

Per serie di Laurent, centrata in z_0, si intende una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{1.4}$$

Si tratta chiaramente di una generalizzazione della serie di potenze, in quanto si riduce ad una serie di potenze nel caso in cui $a_n = 0$ per $n = -1, -2, \dots$.

Teorema 1.22 (Teorema di Laurent) *Sia f una funzione analitica in un anello centrato in z_0, ossia in un dominio $\mathcal{D}$ delimitato da due cerchi concentrici $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ambedue con centro z_0 e raggi r_1 ed r_2 rispettivamente, con $r_1 > r_2$. Sotto tali ipotesi, qualunque sia z interno all'anello $\mathcal{D}$, vale il seguente sviluppo in serie:*

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad , \textit{ dove}\\
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \quad , n = 0, \pm1, \pm2, \dots
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

e $\mathcal{C}$ è un cerchio con centro z_0 e raggio $r_2 < r < r_1$.

La dimostrazione di basa sulla formula integrale di Cauchy, relativa all'anello $\mathcal{D}$ delimitato della frontiera $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

e sullo sviluppo di $\frac{1}{w-z}$ in opportune potenze che dipendono da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ rispettivamente.

Nel caso tutti gli a_n, $n = -1, -2, \ldots$ risultino nulli la serie di Laurent è più propriamente una serie di Taylor. Si dice inoltre che la f ha un polo semplice in z_0, se $a_{-1} \neq 0$ e tutti gli a_n con $n = -2, -3, \ldots$ sono nulli. Il polo è doppio se $a_{-2} \neq 0$ e $a_n = 0$ per $n = -3, -4, \ldots$. Più in generale, si dice che f ha un polo di ordine p se $a_{-p} \neq 0$ e $a_n = 0$ per $n = -(p+1), -(p+2), \ldots$. Si dice infine che f ha una singolarità essenziale se, qualunque sia l'interno negativo p, esiste una $n < p$ con $a_n \neq 0$.

Esercizio 1.37 *Classificare le singolarità delle seguenti funzioni, determinando altresì il raggio di convergenza delle relative serie:*

1. $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -2$;

2. $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$, $z = 1$;

3. $f(z) = \frac{z-\sin(z)}{z^3}$, $z = 0$;

4. $f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$, $z = -2$;

(1) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -2$.
Il polo (singolarità) da classificare è $z = -2$, *per cui lo sviluppo deve essere centrato in* $z = -2$. *Posto* $u = z + 2$, $f(z)$ *diventa*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \phi(u) = \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u}\frac{1}{1-u} = \\ &= \frac{2-u}{u}(1+u+u^2+\ldots) = \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \cdots = \\ &= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Di conseguenza $z = -2$ *è un polo semplice (singolarità di ordine 1). La serie converge per* $|z+2| < 1$, $z \neq -2$, *per cui il raggio di convergenza è* $R = 1$. *Procedendo in modo del tutto analogo si può dimostrare che anche* $z = -1$ *è un polo semplice.*

(2) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$, $z = 1$.

Posto $u = z - 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \phi(u) = \frac{e^{2(1+u)}}{u^2} = \frac{e^2}{u^2}e^{2u} = \\
&= \frac{e^2}{u^2}\left(1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \dots\right) = \\
&= \frac{e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + 2e^2 + 4e^2\left(\frac{2u}{3!} + \frac{(2u)^2}{4!} + \frac{(2u)^3}{5!} + \dots\right) = \\
&= \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + 2e^2 + 4e^2\left(\frac{2}{3!}(z-1) + \frac{2^2}{4!}(z-1)^2 + \right. \\
&\left. + \frac{2^3}{5!}(z-1)^3 + \dots + \frac{2^n}{(n+2)!}(z-1)^n + \dots\right)
\end{aligned}$$

La singolarità è del secondo ordine e, per il criterio del rapporto, la serie è convergente per ogni $z \neq 1$.

(3) $f(z) = \frac{z-\sin(z)}{z^3}$, $z = 0$.
Ricordando lo sviluppo in serie di Taylor di $\sin(z)$*,*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z - \sin(z)}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left\{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{z^3}\left\{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots\right\} = \\
&= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n-2} + \dots.
\end{aligned}$$

La serie è ovunque convergente, per cui si dice che la $f(z)$ ha in $z = 0$ una singolarità eliminabile.

(4) $f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$, $z = -2$.
Posto $u = z + 2$,

$$\begin{aligned}
f(z) &= (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = f(z) = (u-5)\sin\left(\frac{1}{u}\right) = \\
&= (u-5)\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^5} + \dots\right\} = \\
&= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!u^2} + \frac{5}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^4} - \frac{5}{5!u^5} + \dots = \\
&= 1 - 5(z+2)^{-1} - \frac{1}{3!}(z+2)^{-2} + \frac{5}{3!}(z+2)^{-3} + \\
&+ \frac{1}{5!}(z+2)^{-4} - \frac{1}{5!}(z+2)^{-5} + \dots
\end{aligned}$$

La funzione ha pertanto una singolarità essenziale in $z = -2$.

Esercizio 1.38 *Determinare e classificare le singolarità delle funzioni:*

1. $\frac{1}{2\sin(z)-1}$;
2. $\frac{z}{e^z-1}$;
3. $\frac{z}{e^{1/z}-1}$;
4. $e^{z/(z-2)}$;
5. $\tan(z)$, *in un intorno di* $z = \frac{\pi}{2}$.

L'osservazione di partenza è che il rapporto di funzioni analitiche è una funzione analitica, tranne nei punti in cui si azzera il denominatore.

(1) $2\sin(z) - 1 = 0$ *per* $z = z'_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ *e* $z = z''_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. *Il fatto che* $2\sin(z) - 1 = 0$ *ha uno zero semplice sia in* $z_k = z'_k$ *che in* $z_k = z''_k$ *fa pensare che i poli siano tutti semplici. Per poterlo affermare si deve dimostrare che nella serie di Laurent, centrata in* z_k, $Q_{-1} \neq 0$ *e* $Q_{-n} = 0$ *per* $n = 2, 3, \ldots$.

Che $Q_{-n} = 0$ *per* $n = 2, 3, \ldots$ *è immediato, dato che*

$$Q_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_k} (w - z_k)^{n-1} \frac{1}{2\sin(w) - 1}\, dw \quad , \text{ con } n = 2, 3, \ldots$$

e la funzione interpolante è analitica in ogni cerchio $\mathcal{C}_k$ *centrato in* z_k.

Per il calcolo di Q_{-1}, *basta osservare che*

$$Q_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_k} \frac{1}{2\sin(w) - 1}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_k} \frac{1}{w - z_k} \frac{w - z_k}{2\sin(w) - 1}\, dw = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

a seconda che sia $z_k = z'_k$ *oppure* $z_k = z''_k$, *in quanto:*

$$\lim_{w \to z_k} \frac{w - z_k}{2\sin(w) - 1} = \frac{1}{2\cos(z_k)} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) $e^z = 1$ *per* $e^{z_n} = e^{i\theta_k}$ *con* $\theta_k = 2k\pi$, *e dunque per* $z_k = 2k\pi i$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. *Tra questi,* $z = 0$ *è una singolarità eliminabile in quanto* $\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z-1} = 1$. *I punti* $z_k = 2k\pi i$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$ *sono invece poli semplici, come può essere verificato procedendo come nel caso precedente.*

(3) $e^{1/z} - 1 = 0$ *per* $\frac{1}{z_k} = 2k\pi i$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$, *per cui* $z_k = \frac{i}{2k\pi}$, *rappresenta un polo per ogni* $k = \pm1, \pm2, \ldots$, *e i poli sono tutti semplici. In* $z = 0$ *si ha una singolarità essenziale, e in* $z = +\infty$ *un polo del secondo ordine. Per* $z = +\infty$, *basta osservare che* $e^{1/z} - 1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$, *ossia che l'infinitesimo principale di* $\frac{e^{1/z}-1}{z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^4} + \ldots$ *è di ordine 2.*

(4) Ha una singolarità in $z = 2$. Il suo sviluppo, centrato in 2, è facilmente ottenibile da quello di $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, dopo aver osservato che

$$
\begin{aligned}
e^{z/(z-2)} &= e^{\frac{(z-2)+2}{z-2}} = ee^{2/(z-2)} = \\
&= e\left\{1 + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{z-2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{z-2}\right)^3 + \cdots\right\}.
\end{aligned}
$$

$z = 2$ è pertanto una singolarità essenziale e la serie converge per ogni $|z - 2| > 0$.

(5) $z = \pi/2$ rappresenta un polo semplice, in quanto nello sviluppo di Laurent $Q_{-n} = 0$ per $n \geq 2$ e

$$
Q_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \tan(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \tan(z)\, dz = -1.
$$

Esempio 1.2 *La funzione di Bessel $\mathcal{J}_n(z)$, per ogni intero n, può essere definita mediante l'equazione*

$$
e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_n(z) w^n \tag{1.6}
$$

nella quale il primo membro è la "funzione generatrice" e il secondo membro il suo sviluppo di Laurent con centro in $w = 0$. Di conseguenza, per la furmula integrale sui coefficienti di Laurent,

$$
\mathcal{J}_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}}\, dw \quad , \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1.7}
$$

dove $\mathcal{C}$ è un cerchio con centro l'origine. Assumendo, per comodità, $\mathcal{C}$ di raggio *unitario, ossia ponendo* $w = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, *risulta* $(dw = ie^{i\theta}\, d\theta)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_n(z) &= \frac{i}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{z}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)} e^{-in\theta}\, d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin(\theta)}(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))\, d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(z\sin(\theta)) + i\sin(z\sin(\theta)))(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))\, d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{[\cos(z\sin(\theta))\cos(n\theta) + \sin(z\sin(\theta))\sin(n\theta)] + \\
&+ i\,[\sin(z\sin(\theta))\cos(n\theta) - \cos(z\sin(\theta))\sin(n\theta)]\}\ d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(z\sin(\theta) - n\theta) + i\sin(z\sin(\theta) - n\theta)\}\ d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(z\sin(\theta) - n\theta)\, d\theta
\end{aligned}$$

perché il secondo integrale è nullo, trattandosi dell'integrale su di un intervallo di amipezza 2π, *di una funzione dispari e periodica di periodo* 2π.

Esercizio 1.39 *Sviluppare in serie di Laurent le seguenti funzioni:*

1. $e^{1/(z+i)}$, *con centro in* $z_0 = -i$;
2. $\frac{1}{z^2+1}$, *con centro in* $z_0 = i$;
3. $\frac{1}{z}\sin(4z)$, *con centro in* $z_0 = 0$.

(1) La funzione è analitica in ogni anello privato di $-i$ $(0 \leq |z+i| \leq +\infty)$. *Pertanto ricordando che* $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$, *la funzione* $e^{1/(z+i)}$ *può essere così sviluppata:*

$$e^{\frac{1}{z+i}} = 1 + \frac{1}{z+i} + \frac{1}{2!(z+i)^2} + \cdots + + \frac{1}{n!(z+i)^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+i)^{-n}$$

Il polo rappresenta pertanto una singolarità essenziale.

(2) Essendo

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) = -\frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\frac{1}{z+i}$$

con $\frac{1}{z+i}$ *analitica in* $z = i$*, basta sviluppare* $\frac{i}{2}\frac{1}{z+i}$ *in serie di Taylor centrata in* i*. Essendo* $\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-i)^n$ *con* $a_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!}$*,* $f(z) = \frac{1}{z+i}$*, è sufficiente osservare che* $f^n(z) = (-1)^n n!(z+i)^{-n}$*, da cui* $a_n = (-1)^n(2i)^{-n}$*, e pertanto:*

$$\frac{1}{z^2+i} = -\frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n.$$

(3) La funzione ha una singolarità eliminabile in $z = 0$*. Il suo sviluppo è immediatamente ottenibile da quello di* $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$*. Risulta infatti:*

$$\frac{\sin(4z)}{z} = \frac{1}{z}\left\{4z - \frac{(4z)^3}{3!} + \frac{(4z)^5}{5!} + \dots + (-1)^n\frac{(4z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n}.$$

1.7 Residui e teorema dei residui

Sia f una funzione analitica in un cerchio $\mathcal{C}$ privato del suo centro a. La f è allora sviluppabile in serie di Laurent con centro a, ossia è possibile scrivere

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q_n(z-a)^n,$$

dove

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad, n = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

Per $n = -1$,

$$Q_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz,$$

risultato formalmente ottenibile dallo sviluppo della f, integrando termine a termine e ricordando che

$$\oint_{\mathcal{C}}\frac{dz}{(z-a)^k} = \begin{cases} 2\pi i & \text{, per } k = 1; \\ 0 & \text{, per qualsiasi } k \text{ intero diverso da 1.} \end{cases}$$

Il coefficiente Q_{-1} viene definito il *residuo* della funzione f in $z = a$ (simbolicamente, $\operatorname{Res} f(a)$), dato che Q_{-1} è l'unico coefficiente della serie che non si annulla nella integrazione della f sulla circonferenza. Il suo calcolo è relativamente semplice, se è nota la molteplicità del polo in a. Se il polo è semplice, il valore di Q_{-1} può essere calcolato come segue:

$$Q_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{1.8}$$

Nel caso sia multiplo di ordine m, può essere utilizzata la formula seguente:

$$Q_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right]. \tag{1.9}$$

La seconda formula include la prima, dato che, per convenzione, $0! = 1$. Per la dimostrazione basta ricordare che, se $z = a$ è un polo di ordine m, tutti i coefficienti della serie di Laurent Q_{-n} con $n > m$ sono nulli. Sotto tale ipotesi la serie di Laurent è del tipo

$$\begin{aligned} f(z) = {} & Q_{-m} \frac{1}{(z-a)^m} + Q_{-m+1} \frac{1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + Q_{-1} \frac{1}{z-a} + Q_0 + \\ & + Q_1 (z-a) + \cdots + Q_n (z-a)^n + \ldots, \end{aligned}$$

da cui, moltiplicando per $(z-a)^m$ primo e secondo membro, risulta:

$$\begin{aligned} (z-a)^m f(z) = {} & Q_{-m} + Q_{-m+1}(z-a) + \cdots + Q_{-1}(z-a)^{m-1} + Q_0 (z-a)^m + \\ & + Q_1 (z-a)^{m+1} + \cdots + Q_n (z-a)^{n+m} + \ldots + \end{aligned}$$

Di conseguenza, derivando $m-1$ volte, termine a termine e passando al limite per $z \to a$

$$\lim_{z \to a} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right] = (m-1)!\, Q_{-1}$$

e dunque la formula indicata è esatta.

Esercizio 1.40 *Calcolare i residui nei poli delle seguenti funzioni:*

1. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$;
2. $f(z) = \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z^2+4)}$;
3. $f(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}$.

(1) I poli sono $z = 1$ (semplice) e $z = -1$ (doppio).

Residuo in $z = 1$,

$$Q_{-1} = \lim_{z \to 1} \left\{ (z-1) \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = \frac{1}{4}$$

Residuo in $z = -1$,

$$Q_{-1} = \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = \lim_{z \to -1} \left\{ -\frac{1}{(z-1)^2} \right\} = -\frac{1}{4}.$$

(2) I poli sono $z = -1$ (doppio) e $z = \pm 2i$ (ambedue semplici).

Residuo in $z = -1$,

$$\begin{aligned} Q_{-1} &= \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \frac{z}{(z+1)^2(z^2+4)} \right\} = \\ &= \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z(z-2)}{z^2+4} \right\} = -\frac{14}{25}. \end{aligned}$$

Residuo in $z = 2i$,

$$\begin{aligned} Q_{-1} &= \lim_{z \to 2i} \left\{ (z-2i) \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} \right\} = \\ &= \lim_{z \to 2i} \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z+2i)} = \frac{7+i}{25} \end{aligned}$$

Residuo in $z = -2i$,

$$\begin{aligned} Q_{-1} &= \lim_{z \to -2i} \left\{ (z+2i) \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} \right\} = \\ &= \lim_{z \to -2i} \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z-2i)} = \frac{7-i}{25} \end{aligned}$$

(3) I poli sono $z_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Essi costituiscono una infinità numerabile di poli doppi e tutti isolati.

Residuo in $z_k = k\pi$,

$$\begin{aligned} Q_{-1} &= \lim_{z \to k\pi} \frac{d}{dz} \left\{ (z-k\pi)^2 \frac{1}{\sin^2(z)} \right\} = \\ &= 2 \lim_{z \to k\pi} \frac{(z-k\pi)\sin(z) - (z-k\pi)^2\cos(z)}{\sin^3(z)} = \\ &= 2 \lim_{z \to k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin(z)} \lim_{z \to k\pi} \frac{\sin(z) - (z-k\pi)\cos(z)}{\sin^2(z)} = 2(-1)^k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Teorema 1.23 (Teorema dei residui) *Sia f una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ esclusi i punti $z_1, z_2, \ldots, z_m$ in ciascuno dei quali presenta una singolarità. Indicata allora con $\mathcal{C}$ una curva chiusa regolare contenente al suo interno $z_1, z_2, \ldots, z_m$, vale il seguente risultato:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} (\operatorname{Res} f)(z_j). \tag{1.10}$$

In altri termini, l'integrale della f su $\mathcal{C}$ è uguale a $2\pi i$ per la somma dei residui della f in $\mathcal{C}$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m$ m cerchi contenuti in $\mathcal{C}$ che non si intersecano, con la proprietà che il cerchio $\mathcal{C}_i$ contiene il polo z_i, $i = 1, \ldots, m$, e solo quello. Allora, per il teorema di deformazione del contorno sulle funzioni analitiche

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz + \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)\, dz + \cdots + \oint_{\mathcal{C}_m} f(z)\, dz$$

La conseguenza è allora immediata, dato che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_i} f(z)\, dz = (\operatorname{Res} f)(z_i).$$

□

Esercizio 1.41 *Calcolare i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\, dz$, *essendo $\mathcal{C}$ la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 2;*

2. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+4)}\, dz$, *essendo $\mathcal{C}$ una curva regolare che racchiude $z = 0, \pm 2i$;*

3. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{ze^z}\, dz$, *essendo $\mathcal{C}$ una curva regolare che include $z = 0$.*

(1) I poli, tutti interni a $\mathcal{C}$, sono $z = 0$ e $z = -1 \pm i$, dei quali il primo è doppio e gli altri due sono semplici.

Residuo in $z = 0$.

$$(\operatorname{Res} f)(0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z^2+2z+2}\right] = 0.$$

Residuo in $z = -1 + i$.

$$(\operatorname{Res} f)(-1+i) = \lim_{z\to -1+i} \frac{e^z}{z^2(z+1+i)} = \frac{1}{4}e^{-1+i} = \frac{1}{4e}(\cos(1) + i\sin(1)).$$

Residuo in $z = -1 - i$.

$$(\operatorname{Res} f)(-1-i) = \lim_{z\to -1-i} \frac{e^z}{z^2(z+1-i)} = \frac{1}{4}e^{-1-i} = \frac{1}{4e}(\cos(1) - i\sin(1)).$$

Di conseguenza, per il teorema dei residui,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{4e}(\cos(1)+i\sin(1))+\frac{1}{4e}(\cos(1)-i\sin(1))\right] = i\frac{\pi}{2e}\cos(1).$$

(2) Residuo in $z=0$*: il polo è semplice, in quanto* $\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z}=1$*. Pertanto*

$$(\operatorname{Res} f)(0) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z(z^2+4)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z^2+4)} = \frac{1}{4}.$$

Residuo in $z=\pm 2i$*: i poli sono ambedue semplici, per cui*

$$(\operatorname{Res} f)(2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{\sin(z)}{z^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{i}{16}\sin(2i);$$

$$(\operatorname{Res} f)(-2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{\sin(z)}{z^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{i}{16}\sin(2i).$$

Di conseguenza

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+4)}\,dz = i\frac{\pi}{4}(2+i\sin(2i)) = \frac{\pi}{4}(2i-\sin(2i)).$$

(3) Il polo $z=0$ *è semplice, per cui, essendo*

$$(\operatorname{Res} f)(0) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos(z)}{e^z} = 1,$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{ze^z}\,dz = 2\pi i.$$

1.8 Teorema dei residui e calcolo di integrali

1.8.1 Integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

La prima classe esaminata è quella degli integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1.11}$$

dove la $f(z)$, $z\in\mathbb{C}$, è analitica in tutti i punti del piano ad eccezione di un numero finito di punti $z_1, z_2, \ldots, z_n$, in ciascuno dei quali la f possiede un polo semplice o multiplo.

Sia $\mathcal{C}$ un percorso formato dal segmento di retta $-R, R$ e dalla semicirconferenza Γ con centro l'origine, raggio R e orientata in senso antiorario, con R

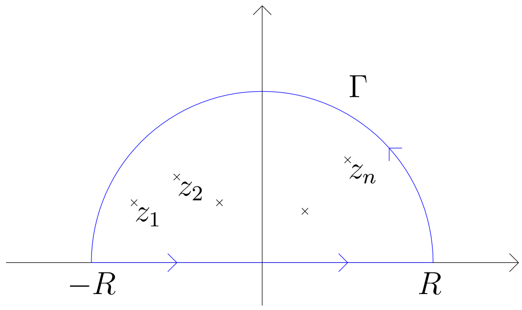


Figura 1.16

abbastanza grande da far sì che tutti i poli $z_1, z_2, \ldots, z_n$ risultino interni al dominio delimitato da $\mathcal{C}$ (figura 1.16). Supponiamo ora che per ogni $z \in \Gamma$ risulti $|f(z)| \leq \frac{L}{R^k}$, con L numero positivo qualunque e $k > 1$. Sotto tale ipotesi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{Res} f)(z_j).$$

Per la dimostrazione basta osservare che, per il teorema dei residui,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{Res} f)(z_j)$$

e che

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)|\, dz \leq \frac{L}{R^k} \int_{\Gamma} dz = \frac{\pi L}{R^{k-1}}$$

per cui

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0 \ \text{, dato che } k > 1.$$

Esercizio 1.42 *Calcolare i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\, dx;$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^4+16}\, dx;$
3. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx.$

(1) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ è analitica nel piano complesso ad eccezione dei quattro punti $\pm i$, $-1 \pm i$. Considero il contorno $\mathcal{C}$ formato dal segmento tra $-R$ e R, e

la semicirconferenza Γ di centro l'origine e raggio R sufficientemente grande da includere i due poli i e $-1+i$. In tal caso

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx + \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \\ &= 2\pi i[(\operatorname{Res} f)(i) + (\operatorname{Res} f)(-1+i)] = \\ &= 2\pi i\left(\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7}{50}\pi\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{7}{50}\pi,$$

in quanto l'integrale su Γ è nullo, essendo $\left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right| = O\left(\frac{1}{R^4}\right)$, ossia è un infinitesimo di quarto ordine rispetto ad $1/R$.

(2) $\frac{z\sin(2z)}{z^4+16}$ è analitica nel piano tranne che in $\sqrt{2}(1\pm i)$, $\sqrt{2}(-1\pm i)$ dove ha dei poli semplici. Inoltre sulla semicirconferenza Γ di raggio R, $|f(z)| = O\left(\frac{1}{R^3}\right)$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^4+16}\,dx &= 2\pi i[(\operatorname{Res} f)(\sqrt{2}(1+i)) + (\operatorname{Res} f)(\sqrt{2}(-1+i))] = \\ &= \frac{\pi}{4}e^{-2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2})\end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{z^6+1}$ è analitica tranne che in $z = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{3}{6}\pi}, e^{i\frac{5}{6}\pi}, e^{i\frac{7}{6}\pi}, e^{i\frac{9}{6}\pi}, e^{i\frac{11}{6}\pi}$, ciascuno dei quali è un polo semplice. La prima osservazione è che essendo $f(x)$ una funzione pari $[f(-x) = f(x)]$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$$

e dunque il risultato è noto una volta calcolato l'integrale della $f(x)$ sulla retta. La seconda osservazione è che, indicato con $\mathcal{C}$ il percorso formato dal segmento di retta compreso tra $-R$ ed R e con Γ la semicirconferenza con centro l'origine e raggio R includente i poli del semipiano superiore,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^6+1}\,dz = 0$$

dato che $|f(z)| \le \frac{1}{R^6}$ su Γ. Di conseguenza

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}2\pi i\left[(\operatorname{Res} f)(e^{i\frac{\pi}{6}}) + (\operatorname{Res} f)(e^{i\frac{3}{6}\pi}) + (\operatorname{Res} f)(e^{i\frac{5}{6}\pi})\right] = \frac{\pi}{3}$$

in quanto (per la regola di de L'Hospital)

$$(\operatorname{Res} f)(e^{i\frac{\pi}{6}}) = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{5}{6}\pi}$$

$$(\mathrm{Res}\, f)(e^{i\frac{3}{6}\pi}) = \lim_{z\to e^{i\frac{3}{6}\pi}} \left(z - e^{i\frac{3}{6}\pi}\right)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to e^{i\frac{3}{6}\pi}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{5}{2}\pi}$$

$$(\mathrm{Res}\, f)(e^{i\frac{5}{6}\pi}) = \lim_{z\to e^{i\frac{5}{6}\pi}} \left(z - e^{i\frac{5}{6}\pi}\right)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to e^{i\frac{5}{6}\pi}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{25}{6}\pi}$$

1.8.2 Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta$

Nel caso in cui si abbia a che fare con un integrale del tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta \tag{1.12}$$

il procedimento più usuale consiste nel ricondursi all'integrazione su un cerchio unitario $\mathcal{C}$ di una funzione ivi analitica, tranne in un numero finito di punti, in modo da poter far ricorso al teorema dei residui. Di solito si raggiunge lo scopo mediante la sostituzione

$$z = e^{i\theta} \quad , 0 \le \theta \le 2\pi,$$

ovverosia

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}; \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \\ dz &= ie^{i\theta} d\theta \quad \to \quad d\theta = -iz^{-1}dz \end{aligned} \tag{1.13}$$

Esercizio 1.43 *Calcolare i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\theta)}\, d\theta;$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(\theta) + \sin(\theta)}\, d\theta;$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)}\, d\theta;$

(1)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\theta)}\, d\theta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{1 + \frac{z+z^{-1}}{8}}(-iz^{-1})dz = -4i \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2+1}{z(z^2+8z+1)}\, dz$$

dove $\mathcal{C}$ è il cerchio unitario $|z| = 1$ orientato in senso antiorario. La funzione integranda $f(z)$ è analitica in tutto il piano, tranne che in $z = 0$, $-4 + \sqrt{15}$ e $-4 - \sqrt{15}$. Di questi $z = 0$ e $-4 + \sqrt{15}$ sono interni a $\mathcal{C}$ e $-4 - \sqrt{15}$ è esterno. Pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\theta)}\, d\theta = -4i(2\pi i)\left[(\operatorname{Res} f)(0) + (\operatorname{Res} f)(-4 + \sqrt{15})\right] = \\ = 2\pi \frac{4\sqrt{15} - 16}{\sqrt{15}}$$

in quanto

$$(\operatorname{Res} f)(0) = \lim_{z \to 0} (-4i) \frac{z^2 + 1}{z^2 + 8z + 1} = -4i$$

$$(\operatorname{Res} f)(-4 + \sqrt{15}) = \lim_{z \to -4+\sqrt{15}} (-4i) \frac{z^2 + 1}{z(z + 4 + \sqrt{15})} = \frac{16i}{\sqrt{15}}.$$

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(\theta) + \sin(\theta)}\, d\theta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{3 - (z + z^{-1}) + \frac{z - z^{-1}}{2i}} (-iz^{-1}) dz = \\ = \oint_{\mathcal{C}} \frac{2}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}\, dz.$$

L'ultima trasformazione è stata ottenuta moltiplicando numeratore e denominatore per $2iz$. La $f(z)$ è ovunque analitica tranne in $z = 2 - i$ e $(2 - i)/5$, che sono poli semplici. Di questi solo $(2 - i)/5$ è nel cerchio unitario e pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(\theta) + \sin(\theta)}\, d\theta = (2\pi i)(\operatorname{Res} f)\left(\frac{2 - i}{5}\right) = \pi,$$

in quanto

$$(\operatorname{Res} f)\left(\frac{2 - i}{5}\right) = \lim_{z \to \frac{2-i}{5}} \frac{2}{(1 - 2i)(z - (2 - i))} = \frac{1}{2i}.$$

(3)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)}\, d\theta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\frac{z^3 + z^{-3}}{2}}{5 - 2(z + z^{-1})} (-iz^{-1}) dz = \\ = -\frac{1}{2i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^6 + 1}{z^3(z - 2)(2z - 1)}\, dz.$$

La $f(z)$ ha un polo semplice in $z = 2$ e $z = 1/2$ e uno triplo in $z = 0$, dei quali $z = 2$ è esterno al cerchio unitario. Pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)}\, d\theta = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left[(\operatorname{Res} f)(0) + (\operatorname{Res} f)\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{12},$$

in quanto

$$(\mathrm{Res}\, f)(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3 \frac{z^6+1}{z^3(z-2)(2z-1)}\right\} = \frac{21}{8};$$

$$(\mathrm{Res}\, f)\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to 1/2}\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^6+1}{z^3(z-2)(2z-1)}\right\} = -\frac{65}{24}.$$

1.8.3 Integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\}\, dx$

Si considerano adesso gli integrali del tipo

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\, dx \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\, dx \end{aligned} \tag{1.14}$$

con α reale positivo. L'integrale è spesso calcolabile esattamente, nel caso esista una semicirconferenza Γ con centro l'origine e raggio R ($z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$) nella quale risulti $|f(z)| \le \frac{L}{R^k}$, essendo $k > 0$ e L una costante indipendente da R. La semplificazione dipende dal fatto che, qualunque sia $\alpha > 0$,

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{i\alpha z} f(z)\, dz = 0$$

Dimostrazione. Poiché Γ è definita dall'equazione $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma e^{i\alpha z} f(z)\, dz &= \int_0^\pi e^{i\alpha Re^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\, d\theta = \\ &= iR\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin(\theta)} e^{i\alpha R\cos(\theta)} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta}\, d\theta\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma e^{i\alpha z} f(z)\, dz\right| &\le R\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin(\theta)}\left|f(Re^i\theta)\right| d\theta \le \frac{L}{R^{k-1}}\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin(\theta)}\, d\theta \le \\ &\le \frac{2L}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}\theta}\, d\theta = \frac{\pi L}{\alpha R^k}\left(1 - e^{-\alpha R}\right).\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è sfruttato il fatto che $\sin(\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta)$ per $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Il risultato è dunque esatto dato che l'ultimo maggiorante converge a zero per $R \to +\infty$. □

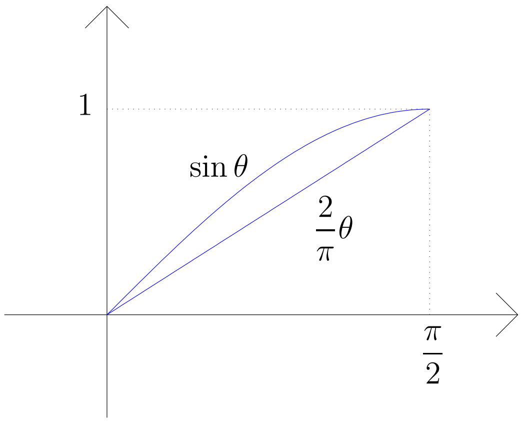


Figura 1.17

Osservazione 1.1 $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$ *per* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$*, in quanto* $y = \frac{2}{\pi}\theta$ *rappresenta il segmento di retta che unice il punto* $(0,0)$ *con* $(\frac{\pi}{2}, 1)$*. In altre parole essa rappresenta la corda relativa all'arco determinato dalla funzione* $\sin(\theta)$ *per* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$*, come mostrato in figura 1.17.*

Nel caso siano valide le suddette ipotesi, a ciascuno degli integrali in esame viene associato un integrale del tipo

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)e^{i\alpha z}\, dz \tag{1.15}$$

ottenuto con la semplice sostituzione di $f(x)$ con $f(z)$e di $\cos(\alpha x)$ o $\sin(\alpha x)$ con $e^{i\alpha z}$, essendo $\mathcal{C}$ il percorso da $-R$ a R, seguito dalla semicirconferenza Γ di equazione $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Esercizio 1.44 *Calcolare i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, dx;$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(\sqrt{3}x)}{x^2+16}\, dx.$

(1) All'integrale si associa l'integrale in campo complesso

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)e^{i\pi z}\, dz, \qquad f(z) = \frac{z}{z^2+2z+5}$$

e si osserva che $f(z)$ *soddisfa l'ipotesi richiesta* $|f(z)| \leq \frac{L}{R^k}$ *con* $k > 0$*, in quanto* $|f(z)| \to 0$ *per* $|z| \to +\infty$ *come* $\frac{1}{|z|}$ *(in breve* f *è un* $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$*). Inoltre* $f(z)$ *è* *ovunque analitica nel piano, ad eccezione dei punti $-1 \pm 2i$, in ciascuno dei quali possiede un polo semplice. Poiché soltanto $-1+2i$ è interno al percorso $\mathcal{C}$, per il teorema dei residui (tenuto conto del fatto che $\int_\Gamma f(z)e^{i\pi z}\,dz \to 0$ per $R \to +\infty$) possiamo affermare che*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\cos(\pi z)}{z^2+2z+5}\,dz + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\sin(\pi z)}{z^2+2z+5}\,dz =$$
$$= 2\pi i(\operatorname{Res} f)(-1+2i) = \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi},$$

da cui uguagliando parti reale ed immaginaria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi} \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx = -\pi e^{-2\pi}.$$

(2) Osservato che (su Γ) $\left|\frac{z}{z^2+16}\right| = O\left(\frac{1}{R}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ze^{i\sqrt{3}x}}{z^2+16}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\cos(\sqrt{3}z)}{z^2+16}\,dz + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\sin(\sqrt{3}z)}{z^2+16}\,dz =$$
$$= 2\pi i\left(\operatorname{Res} \frac{ze^{i\sqrt{3}z}}{z^2+16}\right)(4i) = \frac{1}{2}e^{-4\sqrt{3}}.$$

Di conseguenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(\sqrt{3}x)}{x^2+16}\,dx = \frac{1}{2}e^{-4\sqrt{3}} \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\sqrt{3}x)}{x^2+16}\,dx = 0.$$

1.8.4 Valore principale di Cauchy di integrali impropri

Sia $f(x)$ una funzione continua in $a \le x \le b$, tranne in un punto interno x_0 ($a < x_0 < b$). Supponiamo inoltre che, in senso proprio, non esista l'integrale della f in $[a,b]$. Questo non esclude che esista il

$$\lim_{\epsilon \to 0}\left[\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Se tale limite esiste finito, il suo valore viene definito valore principale di cauchy dell'integrale.

Esempio 1.3 *In senso proprio non esiste l'integrale*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$$

in quanto per $x \to 0$ $\frac{1}{x^3}$ è un infinito di ordine 3. Il suo valore principale tuttavia esiste ed è zero, essendo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x^3}\,dx+\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx\right]=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\epsilon}+\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\epsilon}^{1}\right\}=$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{-\frac{1}{2\epsilon^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\epsilon^2}\right\}=0$$

1.8.5 Integrali calcolabili mediante il teorema dei residui.

Esempio 1.4 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Prima di tutto osserviamo che la funzione integranda è pari, per cui, essendo

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx,$$

ci si può avvalere della tecnica descritta per per il calcolo di integrali del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(x)\,dx$. A tale scopo dobbiamo considerare la funzione integranda e^{iz}/z la quale presenta un polo in $z=0$. Per questo motivo il precedente contorno $\mathcal{C}$ va sostituito con quello $\widehat{\mathcal{C}}$ indicato nella figura 1.18.

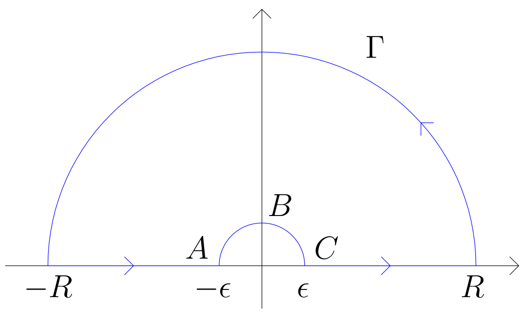


Figura 1.18

Non essendoci punti singolari all'interno di $\widehat{\mathcal{C}}$

$$\oint_{\widehat{\mathcal{C}}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_{ABC}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=0$$

da cui, osservato che $\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=-\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}\,dx$,

$$\int_{ABC}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=0$$

e dunque

$$2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = -\int_{ABC} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}\, dz.$$

Poiché, per quanto abbiamo già visto, l'integrale su Γ *tende a zero per* $R \to +\infty$, *per conoscere il risultato basta calcolare il primo integrale a destra dell'uguale per* $\epsilon \to 0$. *Essendo in* ABC, $z = \epsilon e^{i\theta}$ *con* $\pi \geq \theta \geq 0$.

$$-\int_{ABC} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = -\int_{\pi}^{0} \frac{e^{ie^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta}\, d\theta = i \int_{0}^{\pi} [\cos\left(\epsilon e^{i\theta}\right) + i \sin\left(\epsilon e^{i\theta}\right)]\, d\theta$$

e dunque

$$2i \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ i \int_{0}^{\pi} [\cos\left(\epsilon e^{i\theta}\right) + i \sin\left(\epsilon e^{i\theta}\right)]\, d\theta \right\} = \pi i,$$

ossia

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Esempio 1.5 *Calcolare*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx.$$

La funzione $\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ *è ovunque analitica, tranne in* $z = \pm i$. *Poiché* $\ln(z^2+1) = \ln(z+i) + \ln(z-i)$ *e i due poli sono uno nel semipiano superiore e uno in quello inferiore, è conveniente calcolare separatamente gli integrali di* $\frac{1}{z^2+1}\ln(z+i)$ *e di* $\frac{1}{z^2+1}\ln(z-i)$. *Per il calcolo del primo integrale consideriamo il contorno* $\mathcal{C}$ *formato dal segmento dell'asse reale compreso* $-R$ *e* R *e la semicirconferenza* Γ *di equazione* $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. *L'unico suo polo all'interno di* $\mathcal{C}$ *è* i, *nel quale il valore del residuo è*

$$\lim_{z \to i}(z-i)\frac{\ln(z+i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{\ln(2i)}{2i} = \frac{\ln(2) + \ln(i)}{2i} = \frac{\ln(2) + i\frac{\pi}{2}}{2i}$$

avendo assunto come valore del $\log(2i)$ *il suo valore principale. Di conseguenza*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\, dz = \int_{-R}^{0} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\, dx + \int_{0}^{R} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\, dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\, dz =$$
$$= \pi\left(\ln(2) + i\frac{\pi}{2}\right).$$

Per $R \to +\infty$ *l'integrale su* Γ *tende a zero, per cui esso può essere ignorato. Infine, sostituendo* z *con* $-z$ *nell'inegrale tra* $-R$ *e* 0,

$$\int_{0}^{R} \frac{\ln(i-x)}{x^2+1}\, dx + \int_{0}^{R} \frac{\ln(i+x)}{x^2+1}\, dx = \int_{0}^{R} \frac{\ln(i^2-x^2)}{x^2+1}\, dx =$$
$$= \int_{0}^{R} \frac{\ln(x^2+1) + \pi i}{x^2+1}\, dx = \int_{0}^{R} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx + \pi i[\arctan(x)]_0^R =$$
$$= \pi\ln(2) + i\frac{\pi^2}{2}.$$

Da cui, ricordando che $\lim_{R\to+\infty} \arctan(R) = \pi/2$, *segue che*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = \pi \ln(2).$$

Capitolo 2

Serie di Fourier

2.1 Funzioni periodiche e polinomi trigonometrici

Definizione 2.1 *Una funzione $f(x)$ definita in un dominio D è detta periodica di periodo T se, qualunque sia $x \in D$, $x+T$ appartiene a D ed inoltre $f(x) = f(x+T)$.*

In tal caso T è il periodo e $1/T$ è la frequenza della f. Se $f(x)$ è periodica con periodo T, lo è anche di periodo $2T$, $3T$, ... Per questo motivo, talvolta si preferisce precisare che T è il *periodo fondamentale.*

Esempio 2.1

- $\sin x$, $\cos x$ *sono periodiche di periodo* 2π*;*
- $\sin \omega x$, $\cos \omega x$, $\omega \neq 0$, *sono periodiche di periodo* $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Se k è un intero, anche $\sin k\omega x$ e $\cos k\omega x$ sono periodiche con periodo $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Spesso, in vari contesti applicativi, una funzione definita in un intervallo viene estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

può essere estesa per periodicità su $\mathbb{R}$, ponendo $f(x) = f(x+2)$.

Armoniche elementari. Le funzioni

1. $f(x) = a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\,,\quad k$ intero $,\ \omega \neq 0$

2. $g(x) = \rho_k \cos(k\omega x + \theta_k)\,,\quad k$ intero $,\ \rho > 0\,, \omega \neq 0\,, \theta_k \in \mathbb{R}$

dette **armoniche elementari**, sono periodiche di periodo $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Esse sono inoltre equivalenti, nel senso che, assegnate le costanti che caratterizzano una forma, è sempre possibile passare dalla (1) alla (2) e viceversa. Per esempio, assegnati ρ_k e θ_k, è immediato calcolare a_k e b_k . Infatti, essendo

$$\begin{aligned} g(x) &= \rho_k \cos(k\omega x + \theta_k) = \rho_k(\cos k\omega x \cos\theta_k - \sin k\omega x \sin\theta_k) \\ &= (\rho_k \cos\theta_k)\cos k\omega x - (\rho_k \sin\theta_k)\sin k\omega x \end{aligned},$$

basta porre $a_k = \rho_k \cos\theta_k$ e $b_k = -\rho_k \sin\theta_k$.

Viceversa, noti a_k e b_k, è immediato determinare ρ_k e θ_k. Infatti, essendo

$$\begin{cases} \rho_k \cos\theta_k = a_k \\ \rho_k \sin\theta_k = -b_k \end{cases},$$

si avrà $\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ e $\theta_k = \arctan\left(-\dfrac{b_k}{a_k}\right)$, $a_k \neq 0$. In particolare, se $b_k = 0$ si ha $\rho_k = |a_k|$ e $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ a seconda che sia $a_k > 0$ o $a_k < 0$, rispettivamente.

Polinomio trigonometrico di ordine n.

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

dove $a_0\,, a_k\,, b_k$ e $\omega \neq 0$ sono numeri reali.

T_n è una funzione periodica, in quanto combinazione lineare delle $2\,n+1$ funzioni elementari

$$1,\ \cos\omega x,\ \sin\omega x,\ \ldots,\ \cos n\omega x,\ \sin n\omega x,$$

tutte periodiche di periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Proprietà di ortogonalità. Le funzioni trigonometriche

$$1,\ \cos\omega x,\ \sin\omega x,\ \dots,\ \cos n\omega x,\ \sin n\omega x,$$

qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, sono mutuamente ortogonali in $[0,T]$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Dimostrazione. La funzione costante $f(x) = 1$ è ortogonale a tutte le altre, in quanto

$$\int_0^T 1 \cdot \cos k\omega x\,dx = \left.\frac{\sin k\omega x}{k\omega}\right|_0^T = \frac{1}{k\omega}\sin k\,\omega T = \frac{1}{k\omega}\sin k\,2\pi = 0$$

$$\int_0^T 1 \cdot \sin k\omega x\,dx = -\left.\frac{\cos k\omega x}{k\omega}\right|_0^T = -\frac{1}{k\omega}(\cos k2\pi - 1) = 0$$

per $k = 1, 2, \dots, n$. Inoltre, se $h \neq k$,

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos k\omega x \cos h\omega x\,dx &= \int_0^T \frac{1}{2}[\cos(k-h)\omega x + \cos(k+h)\omega x]\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-h)\omega x}{(k-h)\omega} + \frac{\sin(k+h)\omega x}{(k+h)\omega}\right]_0^T = 0,\end{aligned}$$

in quanto $\omega T = 2\pi$. Da notare che se $h = k$,

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos^2 k\omega x\,dx &= \int_0^T \frac{1}{2}[1 + \cos 2\,k\omega x]\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2\,k\omega x}{2\,k\omega}\right]_0^T = \frac{T}{2}.\end{aligned}$$

Pertanto i due risultati possono essere espressi nella forma seguente:

$$\int_0^T \cos k\omega x \cos h\omega x\,dx = \frac{T}{2}\,\delta_{hk},$$

essendo δ_{hk} il simbolo di Kronecker, così definito $\delta_{hk} = \begin{cases} 1, & h = k \\ 0, & h \neq k \end{cases}$.

Analogamente, se $h \neq k$,

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin k\omega x \sin h\omega x\,dx &= \int_0^T \frac{1}{2}[\cos(k-h)\omega x - \cos(k+h)\omega x]\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-h)\omega x}{(k-h)\omega} - \frac{\sin(k+h)\omega x}{(k+h)\omega}\right]_0^T = 0.\end{aligned}$$

e, se $h = k$,

$$\int_0^T \sin^2 k\omega x\, dx = \int_0^T \frac{1}{2}[1 - \cos 2\, k\omega x]\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2\, k\omega x}{2\, k\omega}\right]_0^T = \frac{T}{2}.$$

Pertanto, indipendentemente dall'essere h e k uguali o diversi,

$$\int_0^T \sin k\omega x \sin h\omega x\, dx = \frac{T}{2}\,\delta_{hk}.$$

Infine è immediato osservare che $\sin h\omega x$ e $\cos k\omega x$ sono ortogonali in $[0, T]$, qualunque sia la coppia di valori h, k. Infatti, se $h \neq k$,

$$\int_0^T \sin h\omega x \cos k\omega x\, dx = \int_0^T \frac{1}{2}[\sin(k-h)\omega x + \sin(k+h)\omega x]\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(k-h)\omega x}{(k-h)\omega} - \frac{\cos(k+h)\omega x}{(k+h)\omega}\right]_0^T = 0,$$

e inoltre, se $k = h$,

$$\int_0^T \sin h\omega x \cos h\omega x\, dx = \int_0^T \frac{\sin 2\, h\omega x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2\, h\omega x}{2\, h\omega}\right]_0^T = 0\,.$$

□

Proprietà sull'integrazione delle funzioni periodiche. Indicato con T il periodo di una funzione periodica e integrabile e con a un qualunque numero reale, vale la seguente proprietà:

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, esiste un intero n tale che $nT \leq$

$a < (n+1)T$. Pertanto, essendo $(n+1)\,T \leq a + T$,

$$
\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \int_a^{(n+1)T} f(x)\,dx + \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)\,dx \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\text{posto } x{=}y{+}T \text{ nel } 2^o \text{ int.}] \\
&= \int_a^{(n+1)T} f(x)\,dx + \int_{nT}^{a} f(y+T)\,dy \qquad [\text{per periodicità}] \\
&= \int_a^{(n+1)T} f(x)\,dx + \int_{nT}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{nT}^{(n+1)T} f(x)\,dx \qquad\qquad [\text{posto } \; x = z + nT] \\
&= \int_0^{T} f(z+nT)\,dz \qquad\qquad [\text{per periodicità}] \\
&= \int_0^{T} f(x)\,dx\,.
\end{aligned}
$$

□

Coefficienti di Fourier. Supponiamo che una funzione $f(x)$ sia approssimata in $[0,T]$ mediante un polinomio trigonometrico di ordine n

$$
f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\right)\,, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.
$$

È allora naturale richiedere che l'integrazione in $[0,T]$ della $f(x)$ per le funzioni di base $\{1,\ \cos\omega x,\ \sin\omega x,\ \ldots,\ \cos n\omega x,\ \sin n\omega x\}$ risulti sostanzialmente uguale all'integrazione della funzione approssimante per le stesse funzioni di base. Questo fatto, in conseguenza della ortogonalità delle funzioni di base, implica che:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T f(x)\,dx &\simeq a_0 \int_0^T 1\ dx = a_0\,T \\
\int_0^T f(x)\cos k\omega x\,dx &\simeq a_k \int_0^T \cos^2 k\omega x\,dx = a_k \frac{T}{2}, \quad k = 1,2,\ldots,n, \\
\int_0^T f(x)\sin k\omega x\,dx &\simeq b_k \int_0^T \sin^2 k\omega x\,dx = b_k \frac{T}{2}, \quad k = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

Poiché questa osservazione è dovuta a Fourier, i coefficienti

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx \\ a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos k\omega x\,dx, \quad k=1,2,\dots,n, \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin k\omega x\,dx, \quad k=1,2,\dots,n, \end{aligned}$$

vengono definiti **coefficienti di Fourier** della f.

Energia di un segnale. Supponendo che una funzione $f(x)$, al quadrato integrabile in $[0,T]$, rappresenti un segnale a valori reali o complessi, si definisce energia del segnale la norma della f così definita

$$\|f\| = \left(\int_0^T |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad |f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)},$$

dove $\overline{f(x)}$ indica il complesso coniugato di $f(x)$ se $f(x)$ è complessa, $f(x)$ stessa se $f(x)$ è reale.

Energia assegnata ad un polinomio trigonometrico. Indicato con T_n un polinomio trigonometrico, il quadrato della sua energia può essere agevolmente calcolato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \|T_n\|^2 &= \int_0^T [a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k\cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)]^2\,dx\,, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ &= \int_0^T [a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2\cos^2 k\omega x + b_k^2 \sin^2 k\omega x)]\,dx \\ &\qquad \text{[per l'ortogonalità delle funzioni di base]} \\ &= T[a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)]\,, \end{aligned}$$

essendo $\displaystyle\int_0^T \cos^2 k\omega x\,dx = \int_0^T \sin^2 k\omega x\,dx = \frac{T}{2}.$

Relazione tra l'energia di un segnale e l'energia del polinomio trigonometrico di migliore approssimazione. Indicato con T_n un polinomio trigonometrico che approssima una $f(x)$ in $[0,T]$, è interessante capire quale sia la distanza minima, in termini di energia, tra la f ed una sua approssimante trigonometrica. Interessa dunque minimizzare la funzione

$$I(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = \int_0^T [f(x) - T_n(x)]^2 \, dx$$

al variare dei coefficienti $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ di $T_n(x)$.

È possibile dimostrare che, grazie alla ortogonalità delle funzioni di base, tale minimo è determinato dai coefficienti di Fourier.

Dimostrazione. Per brevità, limitiamoci a dimostrare il risultato per $n = 1$. A tale scopo consideriamo la funzione

$$I(a_0, a_1, b_1) = \int_0^T [f(x) - (a_0 + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x)]^2 \, dx$$

e indichiamo con $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ e $\hat{b}_1$ i relativi coefficienti di Fourier

$$\begin{aligned}
\hat{a}_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx \\
\hat{a}_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \omega x \, dx \\
\hat{b}_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \omega x \, dx.
\end{aligned}$$

Per l'ortogonalità delle funzioni di base e la definizione di $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ e $\hat{b}_1$,

$$\begin{aligned}
I(a_0, a_1, b_1) = &\int_0^T f^2(x) \, dx + T \, a_0^2 + \frac{T}{2} \, (a_1^2 + b_1^2) + \\
&- 2 \left[a_0 \int_0^T f(x) \, dx + a_1 \int_0^T f(x) \cos \omega x \, dx + b_1 \int_0^T f(x) \sin \omega x \, dx \right] \\
= &\int_0^T f^2(x) \, dx + T \, a_0^2 + \frac{T}{2} \, (a_1^2 + b_1^2) - 2 \left[T a_0 \hat{a}_0 + \frac{T}{2} (a_1 \hat{a}_1 + b_1 \hat{b}_1) \right],
\end{aligned}$$

da cui, aggiungendo e togliendo $T\hat{a}_0^2$, $\frac{T}{2}\hat{a}_1^2$ e $\frac{T}{2}\hat{b}_1^2$,

$$\begin{aligned}
I(a_0, a_1, b_1) = &\int_0^T f^2(x) \, dx - T\hat{a}_0^2 + T(a_0 - \hat{a}_0)^2 - \frac{T}{2} \, \hat{a}_1^2 + \\
&+ \frac{T}{2} \, (a_1 - \hat{a}_1)^2 - \frac{T}{2} \, \hat{b}_1^2 + \frac{T}{2} \, (b_1 - \hat{b}_1)^2,
\end{aligned}$$

il cui minimo è ovviamente ottenuto per $a_0 = \hat{a}_0$, $a_1 = \hat{a}_1$ e $b_1 = \hat{b}_1$. □

Il quadrato dell'energia corrispondente alla differenza tra la $f(x)$ e la sua approssimante ottimale $\hat{T}_1(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cos \omega x + \hat{b}_1 \sin \omega x$ è dunque

$$I(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1) = \int_0^T f^2(x)\, dx - T\hat{a}_0^2 - \frac{T}{2}\,(\hat{a}_1^2 + \hat{b}_1^2)$$

Estendendo tali considerazioni al caso generale si ottiene che il minimo di $I(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ è ottenuto per $a_0 = \hat{a}_0$, $a_k = \hat{a}_k$ e $b_k = \hat{b}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. In altri termini, prefissato n, i coefficienti di Fourier identificano il polinomio trigonometrico che, in termini di energia, meglio approssima un segnale, esprimibile con una funzione al quadrato integrabile, in $[0, T]$.

L'estensione delle precedenti considerazioni permette inoltre di affermare che

$$I(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{b}_n) = \int_0^T f^2(x)\, dx - T\hat{a}_0^2 - \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{n} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2)$$

da cui, essendo $I(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{b}_n) \geq 0$, segue la **diseguaglianza di Bessel**

$$\hat{a}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2) \leq \frac{1}{T} \int_0^T f^2(x)\, dx.$$

Tale diseguaglianza esprime il fatto che l'energia associata al polinomio trigonometrico che meglio approssima un segnale è sempre inferiore a quella del segnale stesso.

Un'altra interessante osservazione è che

$$\|T_{n+1}\|^2 = \|T_n\|^2 + \frac{T}{2}\,(\hat{a}_{n+1}^2 + \hat{b}_{n+1}^2)\,,$$

ossia: l'energia dell'approssimante T_n è una funzione *monotonamente* crescente rispetto a n e limitata dall'energia del segnale.

2.2 Serie di Fourier

Definizione 2.2 *Sia f una funzione integrabile in $[-L, L]$. Allora ad essa è univocamente associabile la serie di Fourier*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\frac{\pi}{L}x + b_n \sin n\frac{\pi}{L}x \right)\,. \tag{2.1}$$

dove, per l'ortogonalità delle funzioni di base $\left\{1, \cos n\frac{\pi}{L}x, \sin n\frac{\pi}{L}x\right\}$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos n\frac{\pi}{L}x\,dx \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\frac{\pi}{L}x\,dx\,.
\end{aligned}
$$

Esempio 2.2 *Scrivere la serie di Fourier di* $f(x) = x$, $-\pi \le x \le \pi$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{4\pi}\left[x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = 0; \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ d\,\frac{\sin kx}{k} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\,\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0; \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ d\,\frac{\cos kx}{k} = \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[x\ \frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx = \frac{2}{k}(-1)^{k+1},
\end{aligned}
$$

in quanto $\cos k\pi = \cos(-k\pi) = (-1)^k$.

La serie di Fourier di x *su* $[-\pi, \pi]$ *è dunque la*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx.$$

Esempio 2.3 *Scrivere la serie di Fourier di* $f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3};\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\;d\,\frac{\sin kx}{k} =\\
&= \frac{1}{\pi}\left[x^2\,\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\;d\,\frac{\cos kx}{k^2}\,dx =\\
&= \frac{1}{\pi}\left[2x\;\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\,dx == \frac{4}{k^2}(-1)^k;\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\;d\,\frac{\cos kx}{k} =\\
&= \frac{1}{\pi}\left[x^2\,\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\;d\,\frac{\sin kx}{k^2}\,dx =\\
&= \frac{1}{\pi}\left[2x\;\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{k^2}\,dx == \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Pertanto, la serie di Fourier di x^2 *su* $[-\pi,\pi]$ *è*

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx.$$

Esempio 2.4 *Scrivere la serie di Fourier di* $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 1\\ 1, & 1 \le x < 2\\ 2, & 2 \le x < \pi\end{cases}$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_1^2 1\cdot\,dx + \int_2^{\pi} 2\cdot\,dx\right] =\\
&= \frac{1}{2\pi}\,[1 + 2(\pi-2)] = 1 - \frac{3}{2\pi};\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_1^2\cos kx\,dx + 2\int_2^{\pi}\cos kx\,dx\right] =\\
&= \frac{1}{k\pi}\,[(\sin 2k - \sin k) + 2(\sin k\pi - \sin 2k)] = -\frac{1}{k\pi}\sin k(2\cos k + 1);\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_1^2\sin kx\,dx + 2\int_2^{\pi}\sin kx\,dx\right] =\\
&= -\frac{1}{k\pi}\,[(\cos 2k - \cos k) + 2(\cos k\pi - \cos 2k)] =\\
&= -\frac{1}{k\pi}\left[-\cos 2k - \cos k + 2(-1)^k\right].
\end{aligned}$$

Di conseguenza, alla $f(x)$ possiamo associare la serie di Fourier

$$1-\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left\{[\sin k(\cos 2k+1)]\cos kx+\Big[2(-1)^k-\cos k-\cos 2k\Big]\sin kx\right\}.$$

Esempio 2.5 *Scrivere la serie di Fourier di* $f(x)=\begin{cases}0, & -3\le x<0\\ x, & 0\le x<3\end{cases}$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\frac{1}{6}\int_0^3 x\,dx=\frac{3}{4};\\
a_k &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{k\pi x}{3}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\cos\frac{k\pi x}{3}\,dx=\frac{3}{k^2\pi^2}\Big[(-1)^k-1\Big];\\
b_k &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sin\frac{k\pi x}{3}\,dx=-\frac{3}{k\pi}(-1)^k.
\end{aligned}$$

Pertanto, la serie di Fourier di $f(x)$ in $[-3,3]$ è

$$\frac{3}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{k^2\pi^2}\Big[(-1)^k-1\Big]\cos\frac{k\pi x}{3}-\frac{3}{k\pi}(-1)^k\sin\frac{k\pi x}{3}\right\}.$$

Funzioni pari e dispari. Sia f una funzione definita in un intervallo $[-L,L]$ $\forall L\in\mathbb{R}^+$. Allora, se per ogni $x\in[-L,L]$, risulta:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(-x) && \text{la funzione si dice } \textit{pari};\\
f(x) &= -f(-x) && \text{la funzione si dice } \textit{dispari};
\end{aligned}$$

Se per almeno un valore di x non vale nessuna delle due precedenti condizioni, la f non è né pari né dispari. Di conseguenza, la funzione dell'esempio 1) è dispari, quella dell'esempio 2) è pari, mentre quelle degli esempi 3) e 4) non sono né pari né dispari.

È importante notare che: *a*) se la funzione $f(x)$ è pari, allora $b_n=0$ per $n=1,2,\dots$ e la sua serie di Fourier si riduce alla serie di soli coseni

$$f(x)\simeq a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\frac{\pi}{L}x$$

dove

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx\,,\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos n\frac{\pi}{L}x\,dx\;;$$

Dimostrazione. Tenuto conto dell'ipotesi di parità

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2L}\left[\int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx\right] =$$

$$[\text{ posto } t = -x \text{ nel } 1^o \text{ int. e ricordando che } f(-t) = f(t)\,]$$

$$= \frac{1}{2L}\left[-\int_{L}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{L} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx\,.$$

Analogamente

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = \\ &= \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx\right] = \\ &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx\,. \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = \\ &= \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx\right] = 0\,. \end{aligned}$$

□

b) se la funzione $f(x)$ dispari, allora $a_0 = 0$ e $a_n = 0$ per $n = 1, 2, \ldots$ e la sua serie di Fourier si riduce alla serie di soli seni

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\frac{\pi}{L}x$$

dove

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin n\frac{\pi}{L}x\,dx\ .$$

Dimostrazione. Si dimostra in modo del tutto analogo, ossia decomponendo l'integrale tra $[-L, L]$ in uno tra $[-L, 0]$ ed un altro tra $[0, L]$, ponendo $t = -x$ nel 1^o integrale e ricordando che $f(-t) = -f(t)$. □

Osservazione 2.1 *Non è detto che il valore della f in un generico $x \in [-L, L]$ coincida con il valore della sua serie di Fourier in x. In altri termini, non necessariamente la serie di Fourier di una funzione risulta ad essa convergente in ogni punto. Ad esempio, la serie di Fourier di $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi]$ è $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin kx$, la quale assume il valore 0 in $x = \pm\pi$ mentre in tali punti $f(x) = \pm\pi$. Inoltre, mentre $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, non è affatto evidente che $\frac{\pi}{2}$ sia il valore della serie in tale punto.*

Allo scopo di discutere il problema della convergenza è bene premettere le seguenti definizioni di derivata destra e sinistra.

Definizione 2.3 *Se la $f(x)$ ammette limite destro in x_0, $f(x_0^+)$, si definisce* ***derivata destra*** *della f in x_0 il limite*

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_{0^+})}{h},$$

nell'ipotesi che esso esista e sia finito.

Analogamente, se la f ammette limite sinistro in x_0, $f(x_0^-)$, si definisce ***derivata sinistra*** *della f in x_0 il limite*

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_{0^-})}{-h},$$

nell'ipotesi che esso esista e sia finito.

Esempio 2.6 *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -\pi \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

In questo caso esistono derivata destra e sinistra in tutti i punti interni. Per $x \in (-\pi, \pi)\backslash\{0\}$ è evidente, mentre in $x = 0$ essendo $f(0^+) = 0$, $f(0^-) = 1$, risulta

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0\,, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + h - 1}{h} = 1.$$

Da notare che in $-\pi$ esiste la derivata destra e in π quella sinistra con $f'(-\pi^+) = 1$ e $f'(\pi^-) = 2\pi$.

Definizione 2.4 *La funzione f è continua a tratti in $[a, b]$ se valgono le seguenti proprietà:*

1) esistono finiti i limiti $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$;

2) f è continua in (a,b), tranne al più in un numero finito di punti;

3) in ogni punto x_0 in cui la f è discontinua esistono finite le derivate destra e sinistra.

Teorema 2.1 (Convergenza della serie di Fourier) *Sia f continua a tratti su $[-L,L]$. Allora:*

1) se la f è continua in $x_0 \in (-L,L)$, la serie di Fourier assume in x_0 il valore $f(x_0)$;

2) se $x_0 \in (-L,L)$ e la f è discontinua in x_0, la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{2}\left[f(x_{0^+}) + f(x_{0^-})\right];$$

3) se esistono finiti $f(-L^+)$ e $f(L^-)$, la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{2}\left[f(-L^+) + f(L^-)\right]$$

sia in $-L$ che in L.

La 1) consente, ad esempio, di affermare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. La 3) permette di dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Per convincersene è sufficiente osservare che

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2}\cos k\pi = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}.$$

Teorema 2.2 (Lemma di Riemann-Lebesgue.) *Sia f continua a tratti in $[-L,L]$ e ivi sviluppabile in serie di Fourier, allora*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L} f(x)\cos n\frac{\pi}{L}x\,dx = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\frac{\pi}{L}x\,dx = 0,$$

che stabiliscono la convergenza a zero dei coefficienti della serie.

Questioni rilevanti sulle serie di Fourier riguardano la sua integrazione e derivazione termine a termine. Come si evince dai due teoremi che seguono, la differenziabilità termine a termine è molto più problematica rispetto alla integrabilità.

Teorema 2.3 (Integrazione termine a termine) *Se la f è continua a tratti in $[-L, L]$ e ivi sviluppabile in serie di Fourier, essa è integrabile termine a termine, ossia*

$$\int_{-L}^{x} f(t)\,dt = a_0(x+L) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{ a_n \sin n\frac{\pi}{L}x - b_n\left[\cos n\frac{\pi}{L}x - \cos n\pi\right]\right\}.$$

Esempio 2.7 *Dall'esempio 2.2, la serie di Fourier di $f(x) = 2x$ in $[-\pi, \pi]$ è*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k}(-1)^{k+1}\sin kx\,.$$

Poiché f è continua in $[-\pi, \pi]$, in virtù del precedente Teorema si può scrivere

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{x} 2\,t\,dt = x^2 - \pi^2 = &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k}(-1)^{k+1}\int_{-\pi}^{x}\sin kt\,dt = \\ &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k}(-1)^{k+1}\left[-\frac{1}{k}(\cos kx - \cos k\pi)\right] = \\ &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^{k}\left[\cos kx - (-1)^k\right],\end{aligned}$$

da cui, ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, si ottiene, esattamente come nell'esempio 2.3 che

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx\,.$$

La differenziazione di una serie di Fourier si presenta in modo molto diverso. Infatti, differenziando termine a termine la serie di Fourier di x in $[-\pi, \pi]$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}2(-1)^{k+1}\cos kx\,,$$

la quale non converge per alcun valore di $x \in (-\pi, \pi)$ e tanto meno risulta $f'(x) = 1$.

Teorema 2.4 (Differenziazione termine a termine) *Se la f è continua in $[-L, L]$ con $f(-L) = f(L)$ e la f' è continua a tratti in $[-L, L]$, allora la serie di Fourier è derivabile termine a termine. Ossia, in ogni punto $x \in (-L, L)$ in cui la $f'(x)$ è continua,*

$$f'(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n\, a_n \sin n\frac{\pi}{L}x + n\, b_n \cos n\frac{\pi}{L}x \right] .$$

La serie di Fourier di $f(x) = x$ non è dunque derivabile termine a termine in quanto $f(-\pi) \neq f(\pi)$.

2.3 Forma armonica della serie di Fourier

Sia f una funzione periodica con periodo fondamentale $2L$, i cui valori sono assegnati in [-L,L). La sua serie di Fourier in tale intervallo è del tipo

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos \omega x + b_k \sin \omega x] , \qquad \omega = \frac{\pi}{L} . \tag{2.2}$$

Per vari motivi, in diversi contesti applicativi, è utile sostituire la forma precedente con la seguente

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega x + \delta_k). \tag{2.3}$$

definita *forma armonica.*

A tale scopo è sufficiente determinare c_k e δ_k in modo che, per ogni $k = 1, 2, \dots$, risulti

$$\begin{aligned} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x &= c_k \cos(k\omega x + \delta_k) \\ &= c_k \cos k\omega x \cos \delta_k - c_k \sin k\omega x \sin \delta_k . \end{aligned}$$

Ossia, ricavare c_k e δ_k dal sistema

$$\begin{cases} c_k \cos \delta_k = \ \ a_k \\ c_k \sin \delta_k = -b_k . \end{cases}$$

Da cui, supponendo $a_k = 0$, segue immediatamente che

$$\begin{cases} c_k = \sqrt{(a_k^2 + b_k^2)} \\ \delta_k = \arctan\left(-\dfrac{b_k}{a_k} \right) . \end{cases} \tag{2.4}$$

Definizione 2.5 *Se f è periodica con periodo fondamentale $2L$, per* ***forma armonica*** *della f si intende la (2.3) con i coefficienti c_k e gli angoli δ_k determinati dalla (2.4). In essa, il termine $c_k \cos(k\omega x + \delta_k)$ è denominato k-esima armonica della f, c_k ampiezza della k-esima armonica e δ_k k-esimo angolo di fase della f.*

Esiste una ovvia corrispondenza biunivoca tra la forma trigonometrica della serie di Fourier di una funzione periodica e la sua forma armonica, nel senso che assegnati gli a_0, a_k e b_k della forma trigonometrica si può passare a quella armonica e viceversa.

Esempio 2.8 *Sia f una funzione periodica con periodo fondamentale $T = 3$ così definita: $f(x) = x^2$ per $0 \leq x < 3$, $f(x+3) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*

In questo caso la funzione non è definita in un intervallo centrato nell'origine ma, essendo periodica, è sufficiente definirla in un qualsiasi intervallo di ampiezza 3. I coefficienti della sua serie di Fourier sono:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\,dx = 3\,, \qquad a_k = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 \cos k\frac{2\pi}{3}x\;dx = \frac{9}{k^2\pi^2} \qquad e$$
$$b_k = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 \sin k\frac{2\pi}{3}x\;dx = -\frac{9}{k\pi}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{3}, \\
c_k &= \sqrt{\frac{81}{k^4\pi^4} + \frac{81}{k^2\pi^2}} = \frac{9}{k^2\pi^2}\sqrt{1 + k^2\pi^2}, \\
\delta_k &= \arctan\left(-\frac{-9/k\pi}{9/k^2\pi^2}\right) = \arctan(k\pi).
\end{aligned}$$

La forma armonica della f è dunque

$$3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{k^2\pi^2}\sqrt{1 + k^2\pi^2}\cos\left(k\frac{2\pi}{3}x + \arctan(k\pi)\right).$$

Definizione 2.6 (Spettro delle ampiezze delle armoniche) *Per spettro delle ampiezze di una funzione periodica f si intende un grafico che, in corrispondenza dei valori delle armoniche $k\omega$, riporti (in ordinata) i valori $c_k/2$ per $k = 1, 2, \ldots,$ oltre al punto $(0, |a_0|)$. Tale grafico visualizza dunque il contributo delle varie frequenze al segnale.*

2.4 Forma complessa della serie di Fourier

Esiste un altro modo per rappresentare le serie di Fourier che, per quanto sia del tutto equivalente a quello già illustrato, risulta più adatto nell'analisi e controllo dei segnali digitali: la forma complessa.

Per la sua introduzione è essenziale ricordare la formula di Eulero

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\,\sin\phi\,, \quad \forall\phi \in \mathbb{R}\,,$$

dalla quale discende immediatamente che

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}\,.$$

L'utilizzo di queste rappresentazioni di $\cos\phi$ e $\sin\phi$, per ogni $\phi \in \mathbb{R}$, consente di passare immediatamente dalla forma trigonometrica della serie di Fourier di una funzione a quella complessa.

A tale scopo si supponga che

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x]\,, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$$

sia la serie di Fourier di una funzione di periodo $T = 2L$. Tale serie, tenuto conto delle rappresentazioni precedenti di $\cos\phi$ e $\sin\phi$, assume la forma

$$\begin{aligned} a_0 &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\,\frac{e^{ik\omega x} + e^{-ik\omega x}}{2} + b_k\,\frac{e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}}{2i}\right) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\,(a_k - i\,b_k)e^{ik\omega x} + \frac{1}{2}\,(a_k + i\,b_k)e^{-ik\omega x}\right]\,. \end{aligned}$$

Ponendo

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}\,(a_k - \mathrm{i}b_k) \;\text{ e }\; c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i\,b_k), \;\; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.5}$$

si ottiene

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[c_k e^{ik\omega x} + c_{-k}e^{-ik\omega x}]\,,$$

ossia, in forma più compatta,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}. \tag{2.6}$$

Da notare, perché spesso utile, che $c_{-k} = \overline{c_k}$, per $k = 1, 2, \ldots, n$.

Di conseguenza, ad ogni serie di Fourier, nella forma (2.1), si può associare la serie (2.6), i cui coefficienti sono calcolati mediante le (2.5). Viceversa, assegnata la (2.6), è immediato passare alla forma trigonometrica (2.1). Basta infatti osservare che, per la formula di Eulero,

$$\begin{aligned} e^{ik\omega x} &= \cos\omega x + i\,\sin\omega x\,, \quad \text{per } k = \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots \\ e^{ik\omega x} &= 1\,, \quad \text{per } k = 0 \end{aligned}$$

e che, come immediata conseguenza della (2.5),

$$a_0 = c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k} \ \text{ e } \ b_k = i\,(c_k - c_{-k})\,, \ k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{2.7}$$

Infine, ricordando l'espressione dei coefficienti a_0, a_k e b_k della serie di Fourier di una funzione f, $2L$-periodica, in $[-L, L]$ e la (2.5), è molto facile esprimere i c_k in funzione della f. Infatti, per la (2.5) e la formula di Eulero,

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

e, per $k = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} c_k = \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k) &= \frac{1}{2L}\left[\int_{-L}^{L} f(x)\cos k\omega x\,dx - i\int_{-L}^{L} f(x)\sin k\omega x\,dx\right] = \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)(\cos k\omega x - i\sin k\omega x)\,dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-ik\omega x}\,dx\,. \end{aligned}$$

Da quest'ultima espressione, ricordando che $c_{-k} = \overline{c_k}$, segue immediatamente che c_{-k} per $k = 1, 2, \ldots$, (ed equivalentemente c_k per $k = -1, -2, \ldots$) è così esprimibile:

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)(\cos k\omega x + i\sin k\omega x)\,dx \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{ik\omega x}\,dx\,. \end{aligned}$$

Definizione 2.7 *La serie*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

dove

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad e \qquad c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-ik\omega x}\,dx\,,$$

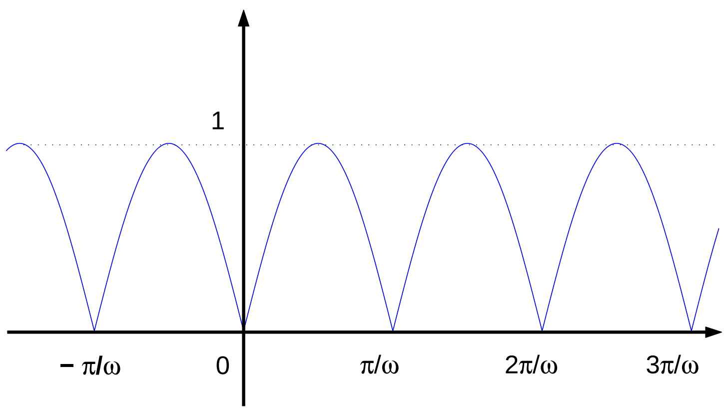
rappresenta la forma complessa della serie di Fourier di una funzione $2L$-periodica.

Teorema 2.5 (Convergenza della forma complessa della serie di Fourier) *Se f è una funzione $2L$-periodica, continua a tratti in $[-L, L]$, dotata di derivata destra e sinistra in ogni punto $x \in \mathbb{R}$, allora la forma complessa della sua serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$ soddisfa la seguente condizione di convergenza:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x} = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]\,.$$

Definizione 2.8 *Lo* ***spettro delle ampiezze*** *di una funzione $2L$-periodica rappresentata da una serie di Fourier in forma complessa è il grafico dei moduli $|c_k|$, per $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$, in funzione delle frequenze $k\omega$, ossia il grafico che visualizza i contributi al segnale delle sue armoniche.*

Esempio 2.9 *Indicato con ω un valore positivo, si consideri la funzione $\frac{\pi}{\omega}$-periodica $|\sin\omega x|$, il cui andamento è quello indicato nel grafico seguente: Per la (2.6),*



riportata nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{\omega}\right)$ ed osservato che $\frac{2\pi}{T} = 2\omega$, si ha

$$c_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} |\sin\omega x|\,dx = -\frac{\omega}{\pi}\left[\frac{\cos\omega x}{\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2}{\pi}.$$

Inoltre, per $k \neq 0$

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} |\sin \omega x| e^{-i2k\omega x}\, dx = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \omega x e^{-i2k\omega x}\, dx = \\
&= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\, e^{-2ik\omega x}\, dx = \\
&= \frac{\omega}{2\pi i} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left[e^{-i(2k-1)\omega x} - e^{-i(2k+1)\omega x} \right] dx = \\
&= \frac{\omega}{2\pi i} \left[-\frac{1}{i(2k-1)\omega}\, e^{-i(2k-1)\omega x} + \frac{1}{i(2k+1)\omega}\, e^{-i(2k+1)\omega x} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \\
&= \frac{\omega}{2\pi i} \left[-\frac{1}{i(2k-1)\omega} \left(e^{-i(2k-1)\pi} - 1 \right) + \frac{1}{i(2k+1)\omega} \left(e^{-i(2k+1)\pi} - 1 \right) \right]
\end{aligned}
$$

da cui, essendo $e^{-i(2k-1)\pi} = \cos(2k-1)\pi - i\sin(2k-1)\pi = -1$ e $e^{-i(2k+1)\pi} = \cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi = -1$,

$$
c_k = \frac{\omega}{2\pi\, i} \left[-\frac{-2}{i(2k-1)\omega} + \frac{-2}{i(2k+1)\omega} \right] = -\frac{2}{(4k^2-1)\pi}\, .
$$

La forma complessa della serie di Fourier della funzione data è dunque

$$
|\sin \omega x| \sim\; -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\, e^{2ik\omega x}.
$$

2.5 Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Si consideri l'equazione differenziale

$$
y'' + 8y = f(t)\, , \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi + 2t}{\pi}, & -\pi \le t < 0 \\ \dfrac{\pi - 2t}{\pi}, & 0 \le t < \pi \\ f(t + 2\pi), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}
$$

Essendo $f(t)$ una funzione pari e 2π-periodica, si può ipotizzare che anche la soluzione $y(t)$ sia pari e 2π-periodica. Inoltre, essendo l'equazione a coefficienti costanti, è ragionevole pensare che la sua serie di Fourier sia sufficientemente regolare da poter essere derivata termine a termine due volte. Sotto tali ipotesi, il primo membro dell'equazione è esprimibile come una serie trigonometrica i cui coefficienti possono essere determinati, una volta noti i coefficienti di Fourier della f .

Procedendo come al solito, si trova che

$$f(t) \simeq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k^2} \cos kt \,.$$

Pertanto, posto $y(t) \simeq a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt$ si ottiene

$$8\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2+8) a_k \cos kt = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k^2} \cos kt$$

da cui segue

$$a_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad (-k^2+8) a_k = \frac{4}{\pi^2} \, \frac{1-(-1)^k}{k^2} \,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Infine, osservato che a_k vale 0 per k pari e $1-(-1)^k = 2$ per k dispari, si può affermare che $y(t)$ è rappresentabile mediante la serie di Fourier

$$y(t) \simeq \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,k-1)^2 [8-(2k-1)^2]} \cos(2k-1)t \,.$$

Esercizio 2.1 *Risolvere l'equazione*

$$y'' + 0.02\, y' + 12\, y = f(t) \,,$$

dove $f(t) = t$, $-1 \le t < 1$, $f(t+2) = f(t)$.

Capitolo 3

Trasformata di Fourier

Lo sviluppo di una funzione mediante le serie di Fourier è perfetto per le funzioni periodiche. Le sole frequenze necessarie sono gli interi, oppure i multipli di $\dfrac{2\pi}{T}$ per le funzioni aventi periodo T.

Per le funzioni non periodiche, tutte le frequenze sono ammissibili e la serie deve essere sostituita da un integrale. I coefficienti a_k e b_k della forma trigonometrica e i c_k della forma complessa, che determinano le ampiezze di ogni armonica, diventano la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\{\, f\,\}(k)$, la quale risulta definita sull'intera retta $-\infty < k < \infty$. Essa dà una misura della densità di e^{ikx} nella funzione f.

Per effettuare tale passaggio, parlando in modo approssimativo, si deve considerare la formula per i coefficienti di Fourier e poi far tendere all'infinito l'ampiezza del periodo.

Indicata con $f_T(x)$ l'estensione periodica di una f definita in $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$, al tendere di T all'infinito, i coefficienti di Fourier di f_T devono approssimare (a meno di un eventuale fattore di scala) la trasformata di Fourier della f.

Naturalmente per tale estensione periodica si possono usare sia la forma trigonometrica che quella complessa. La forma complessa è tuttavia nettamente preferibile in questo ambito. Il motivo è la maggiore semplicità e compattezza delle formule più frequentemente usate.

Se il periodo è T, i coefficienti di Fourier di f_T sono

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(x)\, e^{-iKx}\, dx\,, \qquad \text{dove } K = k\frac{2\pi}{T}\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,.$$

Di conseguenza si può scrivere

$$f_T(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_K\, e^{iKx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\, e^{iKx} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T\, e^{-iKx}\, dx\right]\,.$$

Al crescere di T la f_T si raccorda con la f su intervalli sempre maggiori e la sommatoria si trasforma in un integrale.

Ogni addendo della sommatoria comporta la variazione di una unità per k e dunque di $\dfrac{2\pi}{T}$ per K, ossia $\Delta K = \dfrac{2\pi}{T}$. Da notare che, per $T \to \infty$, il fattore $\dfrac{1}{T} = \dfrac{\Delta K}{2\pi} \to 0$.

Di conseguenza, la somma precedente diventa un'integrale rispetto a K, ossia risulta:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iKx}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iKx} f(x)\, dx \right] dK\,.$$

Questa identità è di importanza fondamentale. L'integrale interno trasforma una $f(x)$ in una funzione di K e poi, mediante l'integrale esterno, restituisce la $f(x)$.

Naturalmente, qualora tornasse comodo, l'ordine delle due integrazioni potrebbe essere invertito, dato che sia x che K variano sull'intera retta. Inoltre le variabili di integrazione possono essere indicate con qualsiasi lettera, senza che si debbano introdurre altre modifiche (in particolare K può essere sostituita da k). Generalmente, la variabile per l'integrazione interna viene indicata con x oppure con t e quella esterna con k oppure con ω.

Indicato con $F(k)$ l'integrale entro parentesi quadre, si ha dunque

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, F(k)\, dk\,, \qquad \text{dove } F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, f(x)\, dx\,.$$

Definizione 3.1 *Per trasformata di Fourier di f si intende la funzione*

$$\mathcal{F}\{\, f \,\} = F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, f(x)\, dx\,,$$

definita nello spazio delle frequenze. Per trasformata inversa di Fourier di F si intende la funzione

$$\mathcal{F}^{-1}\{\, F \,\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, F(k)\, dk\,,$$

definita nello spazio ordinario.

Una **condizione sufficiente** per l'esistenza della trasformata di Fourier di f è che la f sia sviluppabile in serie di Fourier in un qualunque intervallo $[-L, L]$ e sia inoltre assolutamente integrabile sulla retta, ossia che esista finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx\,.$$

Nelle applicazioni si dice comunemente che la $\mathcal{F}\{\,f\,\}$ produce un'analisi dello spettro delle frequenze della f, o anche che la $\mathcal{F}\{\,f\,\}$ definisce in $\mathbb{R}$ la densità spettrale della f, mentre la $\mathcal{F}^{-1}\{\,F\,\}$ ricostruisce la f partendo dalla sua densità spettrale.

Nel seguito tornerà molto utile utilizzare la *funzione di Heaviside*, anche detta funzione gradino, che è così definita

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ 1\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

da cui segue ovviamente che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$,

$$H(x-a) = \begin{cases} 0\,, & x < a \\ 1\,, & x \geq a\,. \end{cases}$$

Pertanto la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

è esprimibile mediante la funzione di Heaviside nel modo seguente

$$f(x) = H(x+1) - H(x-1)\,.$$

Esempio 3.1 *Sia* $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}\,, & x \geq 0 \\ 0\,, & x < 0 \end{cases}$, *essendo* $a > 0$.

Tale funzione, spesso definita impulso con decadimento esponenziale, possiede trasformata di Fourier in quanto ha un solo punto di discontinuità ed è assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$.

Utilizzando la funzione di Heaviside si può anche scrivere

$$f(x) = H(x)\,e^{-ax}\,, \quad a > 0\,.$$

La sua trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\,f\,\} = F(k) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} H(x)\,e^{-ax}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)x}\,dx = \\ &= \left[\frac{e^{-(a+ik)x}}{-(a+ik)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+ik}\,, \end{aligned}$$

in quanto $e^{-(a+ik)x} = e^{-ax}(\cos kx + i \sin kx)$ *e* $e^{-ax} \to 0$ *per* $x \to \infty$.

Di conseguenza $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{a+ik}\right\} = H(x)\,e^{-ax}$, *per ogni* $a > 0$.

Definizione 3.2 (Ampiezza dello spettro) *Per ampiezza dello spettro di una funzione f si intende il grafico del $|F(k)|$, ossia del modulo della trasformata di Fourier della f.*

L'ampiezza dello spettro delle frequenze di $H(x)\,e^{-ax}$ è dunque il grafico della funzione $|F(k)| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+k^2}}$.

Esempio 3.2

1. $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, e^{-a|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-ik)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+ik)x}\, dx = \\ &= \left.\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(a+ik)x}}{-(a+ik)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} = \\ &= \frac{2a}{a^2+k^2} \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2a}{a^2+k^2}\right\} = e^{-a|x|} \qquad e \qquad |F(k)| = \frac{2a}{a^2+k^2}\ .$$

2. $f(x) = e^{-ax} H(x) - e^{ax} H(-x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ -e^{ax}, & x < 0 \end{cases}, \qquad a > 0$

$$\begin{aligned} F(k) &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-ikx} e^{ax}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ikx} e^{-ax}\, dx = \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-ik)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+ik)x}\, dx = \\ &= -\left.\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(a+ik)x}}{-(a+ik)}\right|_{0}^{\infty} = -\frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} = \\ &= -\frac{2ik}{a^2+k^2} \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{2ik}{a^2+k^2}\right\} = e^{-ax} H(x) - e^{ax} H(-x) \qquad e \qquad |F(k)| = \frac{2|k|}{a^2+k^2}\ .$$

3. $f(x) = e^{ax} H(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \qquad a > 0$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-ikx}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-ik)x}\, dx = -\left.\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik}\right|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-ik}.$$

4. $f(x) = c\,[H(x+a) - H(x-a)] = \begin{cases} c, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$

$$F(k) = c\int_{-a}^{a} e^{-ikx}\,dx = c\ \frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big|_{-a}^{a} = \frac{2c}{k}\,\frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2i} =$$
$$= \frac{2c}{k}\sin ak = 2ac\ \mathrm{sinc}(ak)\,, \qquad \textit{essendo}\ \ \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}\,,$$

da cui

$$\mathcal{F}^{-1}\{\,\mathrm{sinc}(ak)\,\} = \frac{1}{2a}\ [H(x+a) - H(x-a)] \quad e \quad |F(k)| = 2\,|ac| \left|\frac{\sin ak}{ak}\right|.$$

5. ***Delta di Dirac***.

Sia $H_a(x) = \dfrac{1}{2a}\ [H(x+a) - H(x-a)]\,$, *con* $a > 0$.

Essa rappresenta una funzione gradino, nulla per $|x| > a$ *e uguale a* $\dfrac{1}{2a}$ *per* $|x| \le a$ *. L'area da essa sottesa è dunque uguale ad* 1 *, per ogni* $a > 0$ *.*

Se $a \to 0^+$ *la* $H_a(x)$ *è sempre definita tranne che per* $x = 0$*, dove* $H_a(x) \to +\infty$ *. Di conseguenza, in senso proprio, tale limite non rappresenta una funzione ma un'entità propriamente definita in un contesto più generale, ossia nello spazio delle distribuzioni, dove è definita* δ *(delta) di Dirac. Ciò nonostante, essa viene spesso utilizzata in vari contesti applicativi ed in particolare nell'ingegneria elettrica. Sia dunque*

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2a}\ [H(x+a) - H(x-a)]$$

Poiché la δ *di Dirac non è una funzione, in senso proprio, non esiste la sua trasformata di Fourier. Essa può tuttavia essere introdotta mediante un artificio, la cui validità è comunque dimostrata nella teoria delle distribuzioni.*

Più precisamente, osservato che

$$\mathcal{F}\{\,H_a(x)\,\} = \frac{\sin x}{x}\,,$$

si definisce come trasformata di Fourier della $\delta(x)$ *il limite per* $a \to 0$ *della trasformata di Fourier della* $H_a(x)$*. Commutando dunque l'operazione di trasformazione con quella di passaggio al limite si pone, per definizione,*

$$\mathcal{F}\{\,\delta\,\} = \lim_{a\to 0} \mathcal{F}\{\,H_a(x)\,\} = \lim_{a\to 0} \frac{\sin ak}{ak} = 1\,, \qquad \forall k \in \mathbb{R}\,.$$

3.1 Proprietà della trasformata di Fourier

Linearità. Dalla definizione di trasformata, come conseguenza della linearità dell'operatore integrale, segue immediatamente che, se f_1 e f_2 sono dotate di trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}\left\{ c_1 f_1 + c_2 f_2 \right\} = c_1 \mathcal{F}\left\{ f_1 \right\} + c_2 \mathcal{F}\left\{ f_2 \right\} ,$$

per ogni coppia di numeri complessi c_1 , c_2 .

Traslazione nello spazio ordinario.

$$\mathcal{F}\left\{ f(x - x_0) \right\} = e^{-ikx_0} F(k)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{ f(x-x_0) \right\} = & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x-x_0)\, dx = \\ & \qquad\qquad [\text{posto } t = x - x_0 \ ] \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x_0+t)} f(t)\, dt = \\ & = e^{-ix_0 k}\, \mathcal{F}\left\{ f \right\} . \end{aligned}$$

La stessa proprietà implica che $\mathcal{F}^{-1}\left\{ e^{-ix_0 k} F(k) \right\} = f(x - x_0)$. □

Esempio 3.3

- $\mathcal{F}^{-1}\left\{ \dfrac{e^{2ik}}{5+ik} \right\} = H(x+2) e^{-5(x+2)}$, *in quanto* $\mathcal{F}^{-1}\left\{ \dfrac{1}{5+ik} \right\} = e^{-5x} H(x)$.
- $$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{ H(x-3)\, e^{-2x} \right\} & = \mathcal{F}\left\{ H(x-3)\, e^{-2(x-3)}\, e^{-6} \right\} = \\ & = e^{-6}\, \mathcal{F}\left\{ H(x-3)\, e^{-2(x-3)} \right\} = \\ & = e^{-6}\, e^{-3ik}\, \frac{1}{2+ik} = \frac{e^{-3(2+ik)}}{2+ik} . \end{aligned}$$
- $\mathcal{F}^{-1}\left\{ \dfrac{12}{k} e^{-5ik} \sin 2k \right\} = 24\ \mathcal{F}^{-1}\left\{ e^{-5ik} \dfrac{\sin 2k}{2\,k} \right\} = 6\,[H(x-3) - H(x-7)]$,

  essendo $\mathcal{F}^{-1}\left\{ \dfrac{\sin(2k)}{2\,k} \right\} = \dfrac{1}{4}\,[H(x+2) - H(x-2)]$.

Traslazione nello spazio delle frequenze.

$$\mathcal{F}\left\{\, e^{ik_0x} f(x) \,\right\} = F(k-k_0)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\, e^{ik_0x} f(x) \,\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{ik_0x} f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x} f(x)\, dx = F(k-k_0)\,.\end{aligned}$$

La stessa proprietà implica che $\mathcal{F}^{-1}\left\{\, F(k-k_0) \,\right\} = e^{ik_0x} f(x)\,.$ □

Esempio 3.4

- $$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{4\, e^{i(2k-6)}}{5-i(3-k)} \right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{4\, e^{2i(k-3)}}{5+i(k-3)} \right\} = 4\, e^{3ix} \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{e^{2ik}}{5+ik} \right\} =$$
  $$= 4\, e^{3ix} H(x+2)\, e^{-5(x+2)} = 4\, e^{-10} H(x+2)\, e^{-(5-3i)x}\,.$$
- $$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{e^{(20-4k)i}}{3-(5-k)i} \right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{e^{-4(k-5)i}}{3+(k-5)i} \right\} = e^{5ix} \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{e^{-4ik}}{3+ik} \right\} =$$
  $$= e^{5ix} H(x-4)\, e^{-3(x-4)} = e^{12} H(x-4)\, e^{-(3-5i)x}\,.$$

Variazione di scala.

$$\mathcal{F}\left\{\, f(ax) \,\right\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

Dimostrazione.

$a > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\, f(ax) \,\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(ax)\, dx = \\ &\qquad\qquad [\text{posto } t = ax\ ] \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\frac{k}{a}\,t} f(t)\, dt = \\ &= \frac{1}{|a|}\, F\left(\frac{k}{a}\right)\,.\end{aligned}$$

$$
a < 0, \quad a = -|a| \qquad \mathcal{F}\{\, f(ax)\,\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(ax)\,dx =
$$

[posto $t = ax$]

$$
= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\frac{k}{a}\,t} f(t)\,dt = \frac{1}{|a|}\,F\left(\frac{k}{a}\right).
$$

□

Esempio 3.5 *Dalla relazione* $\mathcal{F}\{\, H(x)e^{-x}\,\} = \frac{1}{1+ik}$*, segue immediatamente che* $\mathcal{F}\left\{\, H(x)e^{-4\,x}\,\right\} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+i\,\frac{k}{4}} = \frac{1}{4+ik}$*, come già visto per altra via.*

Osservazione 3.1 *Dalla proprietà di scala segue, ponendo* $a = -1$*, che*

$$
\mathcal{F}\{\, f(-x)\,\} = F(-k)\,.
$$

Quest'ultima viene comunemente definita proprietà di inversione temporale, perché spesso la variabile dello spazio ordinario è il tempo.

Esempio 3.6 *Da* $\mathcal{F}\{\, e^{-ax}H(x)\,\} = \frac{1}{a+ik}$*,* $a > 0$*, deriva immediatamente che* $\mathcal{F}\{\, e^{ax}H(-x)\,\} = \frac{1}{a-ik}$*, come già dimostrato in precedenza.*

Trasformata di Fourier di una Gaussiana. Consideriamo la funzione

$$
f(x) = e^{-x^2}\,.
$$

La sua trasformata di Fourier sarà

$$
F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-x^2}\,dx\,.
$$

Derivando si ottiene

$$
\begin{aligned}
F'(k) &= -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\left(x\,e^{-x^2}\right)dx = \\
&= \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\,de^{-x^2} = \\
&= \frac{i}{2}\left[e^{-ikx}e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\,e^{-x^2}\,dx = \\
&= -\frac{k}{2}\,F(k)\,.
\end{aligned}
$$

$F(k)$ soddisfa dunque l'equazione differenziale

$$F'(k) = -\frac{k}{2}\, F(k)$$

da cui segue immediatamente che

$$F(k) = c\, e^{-\frac{k^2}{4}}\,,$$

con $c = F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ (risultato noto).

In definitiva si può affermare che la trasformata di Fourier di una Gaussiana è ancora una Gaussiana, ossia che

$$\mathcal{F}\left\{\, e^{-x^2} \,\right\} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{k^2}{4}}\,.$$

Esercizio 3.1 *Dimostrare, mediante la proprietà di variazione di scala, che* $\mathcal{F}\left\{\, e^{-a\,x^2} \,\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{k^2}{4\,a}}$, $a > 0$.

Simmetria. Se $f(x) = \mathcal{F}\{\, g \,\}$, allora $\mathcal{F}\{\, f \,\} = 2\,\pi\, g(-k)$.

In altre parole, se la f può essere considerata come la trasformata di Fourier di una g, allora la trasformata della f è semplicemente $2\,\pi$ per la $g(-k)$.

Dimostrazione. Essendo, per ipotesi, g la trasformata inversa delle f, tenuto conto della indipendenza del risultato dalla lettera usata per l'integrazione, si può scrivere che

$$g(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(\omega)\, d\omega$$

da cui

$$2\pi\, g(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} f(\omega)\, d\omega = \mathcal{F}\{\, f \,\}\,.$$

□

Esempio 3.7

- *Calcolare la trasformata di Fourier di* $f(x) = \dfrac{5}{4 + ix}$.

  Ricordando che $\mathcal{F}\left\{\, H(x)e^{-4x} \,\right\} = \dfrac{1}{4 + ik}$, *la* f *può essere considerata come la trasformata inversa di* $g(\omega) = 5H(\omega)e^{-4\omega}$. *Pertanto, per la proprietà di simmetria,* $\mathcal{F}\{\, f \,\} = 2\pi g(-k) = 10\,\pi\, H(-k)\, e^{4k}$.

- *Calcolare la* $\mathcal{F}\left\{ \dfrac{1}{a^2+x^2} \right\}$.

  Ricordando che $\mathcal{F}\left\{ e^{-a|x|} \right\} = \dfrac{2a}{a^2+k^2}$, *la funzione* $g(\omega) = \dfrac{1}{2a}\, e^{-a|\omega|}$ *può essere considerata come la trasformata inversa di* $f(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2}$.

  Pertanto, per simmetria,

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{a^2+x^2} \right\} = \frac{\pi}{a}\, e^{-a|k|} .$$

- *Calcolare* $\mathcal{F}\left\{ \dfrac{1}{x^2+6\,x+13} \right\}$.

  Osservato che $\dfrac{1}{x^2+6\,x+13} = \dfrac{1}{(x+3)^2+4}$ *e ricordando la proprietà di traslazione nello spazio delle frequenze, si può affermare che* $g(\omega) = \dfrac{1}{4}\, e^{-3i\omega}\, e^{-2|\omega|}$ *è la trasformata inversa di* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+6\,x+13}$.

  Pertanto, per la proprietà di simmetria,

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{x^2+6\,x+13} \right\} = \frac{\pi}{2}\, e^{-2|k|+3ik} .$$

- *Ricordando che* $\mathcal{F}\left\{ \dfrac{1}{2}\, [H(x+1) - H(x-1)] \right\} = \dfrac{\sin x}{x}$, *dimostrare che*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

  Per la proprietà di simmetria

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\sin x}{x} \right\} = \pi\, [H(-k+1) - H(-k-1)] = F(k) .$$

  D'altronde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = F(0) = \pi\, [H(1) - H(-1)] = \pi ,$$

  per cui, essendo $\dfrac{\sin x}{x}$ *una funzione pari,*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

Modulazione. Se $\mathcal{F}\{\,f\,\} = F(k)$, allora

$$\mathcal{F}\{\,f(x)\,\cos k_0 x\,\} = \frac{1}{2}\,[F(k-k_0)+F(k+k_0)]$$
$$\mathcal{F}\{\,f(x)\,\sin k_0 x\,\} = \frac{1}{2\,i}\,[F(k-k_0)-F(k+k_0)]\,.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\,f(x)\,\cos k_0 x\,\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,\frac{e^{ik_0x}+e^{-ik_0x}}{2}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-i(k-k_0)x}+e^{-i(k+k_0)x}\right] f(x)\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\,[F(k-k_0)+F(k+k_0)]\,.\end{aligned}$$

La seconda si dimostra in modo perfettamente analogo. □

Trasformata di Fourier di una derivata. Se la f è derivabile in $\mathbb{R}$ e ivi assolutamente integrabile, ed inoltre la f' è continua a tratti in ogni intervallo $[-L, L]$, allora

$$\mathcal{F}\{\,f'\,\} = i\,k\,F(k)\,.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\,f'\,\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x)\,dx = \\ &= \left[e^{-ikx}f(x)\right]_{-\infty}^{\infty} + i\,k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,dx = \\ &= i\,k\,\mathcal{F}\{\,f\,\}\end{aligned}$$

in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. □

Questa proprietà può essere generalizzata, per induzione, alla $\mathcal{F}\left\{\,f^{(n)}\,\right\}$ nel modo seguente: se la f è derivabile in $\mathbb{R}$ assieme alle sue prime n derivate ed inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(r)}(x) = 0$ per $r = 0, 1, \ldots, n$, allora

$$\mathcal{F}\left\{\,f^{(n)}\,\right\} = (i\,k)^n F(k)\,.$$

In particolare $\mathcal{F}\{\,f''\,\} = i\,k\mathcal{F}\{\,f'\,\} = -k^2 F(k)\,.$

Osservazione 3.2 *Se la f presenta m punti di discontinuità di prima specie, ossia esistono m punti $x_1, \ldots, x_m$ in cui $f(x_r^+) - f(x_r^-) = \alpha_r$, allora*

$$\mathcal{F}\{\,f'\,\} = i\,k\,F(k) - \sum_{r=1}^{m} \alpha_r\,e^{-ix_rk}\,.$$

Applicazione alle equazioni differenziali. Risolvere l'equazione differenziale

$$y' - 4\,y = H(x)\,e^{-4\,x}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

Uguagliando la trasformata di Fourier dei due membri dell'equazione si ottiene

$$\mathcal{F}\{\,y'\,\} - 4\,\mathcal{F}\{\,y\,\} = \mathcal{F}\left\{\,H(x)e^{-4\,x}\,\right\} = \frac{1}{4+ik}\,.$$

Ponendo $Y(k) = \mathcal{F}\{\,y\,\}$ e utilizzando la proprietà di derivazione risulta

$$i\,k\,Y(k) - 4\,Y(k) = \frac{1}{4+ik}$$

da cui

$$Y(k) = -\frac{1}{(4-ik)\,(4+ik)} = -\frac{1}{16+k^2} = \mathcal{F}\left\{-\frac{1}{8}\,e^{-4|x|}\right\}\,.$$

Pertanto

$$y(x) = -\frac{1}{8}\,e^{-4|x|} = \begin{cases} -\dfrac{1}{8}\,e^{4\,x}\,, & x < 0 \\ -\dfrac{1}{8}\,e^{-4\,x}\,, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

Osservazione 3.3 *La soluzione è stata univocamente determinata anche se non è stata prefissata alcuna condizione iniziale. Tale risultato è una diretta conseguenza del fatto che la trasformata di Fourier ha selezionato la sola soluzione continua e limitata sull'intera retta reale.*

In particolare, la funzione $y(x) = -\frac{1}{8}\,H(x)\,e^{-4x}$ è soluzione dell'equazione differenziale ma essa è discontinua in zero. Quella ottenuta è l'unica soluzione continua e limitata.

Relazione di Plancherel. La funzione f e la sua trasformata di Fourier soddisfano la relazione di Plancherel:

$$2\,\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2\,dk\,.$$

Questa relazione è analoga per le serie di Fourier:

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx\,,$$

essendo a_0 e gli $\{a_k, b_k\}$ i coefficienti della serie di Fourier della f in $[-L, L]$.

Derivazione nello spazio delle frequenze Se f ammette la trasformata di Fourier ed inoltre la funzione $f(x)$ è assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$, vale la seguente relazione;

$$\mathcal{F}\{\,x\,f(x)\,\} = i\,F'(k)\,, \qquad F(k) = \mathcal{F}\{\,f\,\}\;.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} F'(k) &= \frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\frac{d}{dk}\,e^{-ikx}\right)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(-i\,x)\,e^{-ikx}\,dx = -i\,\mathcal{F}\{\,x\,f(x)\,\}\;, \end{aligned}$$

ossia $i\,F'(k) = \mathcal{F}\{\,x\,f(x)\,\}$. □

Procedendo per induzione si può dimostrare, più in generale, che

$$\mathcal{F}\{\,x^n\,f(x)\,\} = i^n\,F^{(n)}(k)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,,$$

nell'ipotesi che esista la trasformata di Fourier della f e che la funzione $x^n f(x)$ sia assolutamente integrabile in $\mathbb{R}$. Per $n = 2$ si ha dunque

$$\mathcal{F}\left\{\,x^2\,f(x)\,\right\} = -\,F''(k)\,.$$

Esempio 3.8 *Dalla relazione* $\mathcal{F}\left\{e^{-ax^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{-\frac{k^2}{4a}}$, $a > 0$, *segue dunque che*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\,x\,e^{-ax^2}\right\} &= i\,\frac{d}{dk}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{-\frac{k^2}{4a}}\right) = \\ &= -\,i\;\frac{k}{2a}\;\sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{-\frac{k^2}{4a}}\;. \end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\,3\,x\,e^{-9\,x^2}\right\} &= -\,3\,i\;\frac{k}{18}\;\sqrt{\frac{\pi}{9}}\;e^{-\frac{k^2}{36}} = \\ &= -\,ik\;\frac{\sqrt{\pi}}{18}\;e^{-\frac{k^2}{36}}\;. \end{aligned}$$

Esercizio 3.2 *Determinare* $\mathcal{F}\left\{\dfrac{x}{x^2+1}\right\}$ *e utilizzare il risultato ottenuto per il calcolare*

$$I(k) = \int_0^{\infty} \frac{x\sin kx}{x^2+1}\,dx\,.$$

Per la proprietà di derivazione nello spazio delle frequenze

$$\mathcal{F}\left\{\,\frac{x}{x^2+1}\,\right\} = \mathcal{F}\{\,xf(x)\,\} = iF'(k)$$

dove $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ *. Ma, per la proprietà di simmetria,*

$$F(k) = \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{x^2+1} \right\} = \pi\, e^{-|k|}\,.$$

Di conseguenza

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{x}{x^2+1} \right\} = \pi i \begin{cases} -\, e^{-k}\,, & k>0 \\ e^{k}\,, & k<0 \end{cases}.$$

Inoltre, applicando la definizione di trasformata di Fourier, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{ \frac{x}{x^2+1} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, \frac{x}{x^2+1}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos kx}{x^2+1}\, dx - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin kx}{x^2+1}\, dx = \\ &= -2i\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin kx}{x^2+1}\, dx\,, \end{aligned}$$

in quanto $\dfrac{x\cos kx}{x^2+1}$ *è una funzione dispari e* $\dfrac{x\sin kx}{x^2+1}$ *è una funzione pari. Di conseguenza*

$$\begin{aligned} I(k) = \int_{0}^{\infty} \frac{x\sin kx}{x^2+1}\, dx &= \frac{i}{2}\,\mathcal{F}\left\{ \frac{x}{x^2+1} \right\} = -\frac{\pi}{2} \begin{cases} -\, e^{-k}\,, & k>0 \\ e^{k}\,, & k<0 \end{cases} \\ &= \pi\, \mathrm{sign}(k)\, e^{-|k|}\,, \end{aligned}$$

dove $\mathrm{sign}(k) = \begin{cases} 1\,, & k>0 \\ -1\,, & k<0 \end{cases}$.

3.2 Convoluzione

Definizione 3.3 *Siano f e g funzioni integrabili in $\mathbb{R}$, il cui prodotto sia ancora integrabile in $\mathbb{R}$. Ad esse è allora associabile la funzione*

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy$$

definita convoluzione della f e della g, nel senso della trasformata di Fourier.

Ponendo $z = x - y$ e integrando è immediato dimostrare che

$$(f*g)(x) = (g*f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-z)f(z)\, dz\,,$$

ossia: la convoluzione gode della proprietà commutativa.

Teorema 3.1 *Se f e g sono dotate di trasformata di Fourier, vale la seguente relazione*

$$\mathcal{F}\{\, f * g \,\} = F(k)\, G(k)\,.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\, f * g \,\} &= \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy \right] dx = \\
&\qquad\qquad [\text{ cambiando l'ordine di integrazione }] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x-y)\, dx \right] dy = \\
&\qquad\qquad [\text{ per la proprietà di traslazione nello spazio ordinario }] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-iky} F(k)\, dy = \\
&= F(k) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-iky}\, dy = F(k)\, G(k)\,.
\end{aligned}$$

□

Naturalmente il risultato può equivalentemente essere scritto così:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\, F(k)\, G(k) \,\} = (f * g)(x)\,.$$

Esempio 3.9 *Determinare* $\mathcal{F}^{-1}\left\{ \dfrac{5}{2 - k^2 + 3ik} \right\}$.

Osservato che $2 - k^2 + 3ik = (2+ik)(1+ik)$, *si può porre*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{5}{2 - k^2 + 3ik} \right\} &= \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{5}{2+ik}\ \frac{1}{1+ik} \right\} = \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{ 5\, \mathcal{F}\{\, H(x)\, e^{-2x} \,\}\ \mathcal{F}\{\, H(x)\, e^{-x} \,\} \right\} = \\
&= 5\, H(x)\, e^{-2x}\ *\ H(x)\, e^{-x} = \\
&= 5 \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)\, e^{-2(x-y)}\ H(y)\, e^{-y}\, dy = \\
&= 5\, e^{-2x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y}\, H(x-y) H(y)\, dy = \\
&= 5\, H(x)\, e^{-2x} \left[\, e^{y} \,\right]_0^x \ = \ 5 \left(e^{-x} - e^{-2x} \right) H(x) = \\
&= 5\, e^{-2x} \left(e^{x} - 1 \right) H(x)\,,
\end{aligned}$$

essendo

$$H(x-y)H(y) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } y < 0 \text{ e } y > x \\ 1\,, & \text{per } 0 < y < x\,. \end{cases}$$

Osservazione 3.4 *Anche se la δ di Dirac è una distribuzione e non una funzione, per cui il risultato seguente può essere rigorosamente dimostrato solo in tale ambito, si dimostra che anche per il prodotto $\delta * f$ vale il teorema della convoluzione. Si dimostra cioè che*

$$\mathcal{F}\{\,\delta * f\,\} = \mathcal{F}\{\,\delta\,\}\,\mathcal{F}\{\,f\,\} = F(k)\,,$$

in quanto $\mathcal{F}\{\,\delta\,\} = 1$.

Supponendo di poter trattare la δ di Dirac alla stregua di una qualunque funzione dotata di trasformata di Fourier, si ha inoltre:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\{\,\delta(x-x_0)\,\} = e^{-ix_0k}\,\mathcal{F}\{\,\delta\,\} = e^{-ix_0k} && \text{[prop. di traslazione]} \\ &\mathcal{F}\{\,1\,\} = 2\pi\delta(-k) = 2\pi\delta(k) && \text{[prop. di simmetria]} \end{aligned}$$

Da notare che questo risultato, anche se ampiamente utilizzato nelle applicazioni, non è corretto in quanto la funzione $f(x) = 1$ non è integrabile in $\mathbb{R}$. La formula è invece esatta nella teoria delle distribuzioni, per cui essa viene spesso usata nelle applicazioni, con risultati generalmente corretti, anche se considerati in ambiti non appropriati.

$$\mathcal{F}\left\{\,e^{ik_0x}\,\right\} = \mathcal{F}\left\{\,e^{ik_0x}\cdot 1\,\right\} = 2\pi\,\delta(k-k_0)$$

$$\mathcal{F}\{\,\cos k_0x\,\} = \pi\,\left[\delta(k+k_0) + \delta(k-k_0)\right]$$

$$\mathcal{F}\{\,\sin k_0x\,\} = i\pi\,\left[\delta(k+k_0) - \delta(k-k_0)\right]\,.$$

Esercizio 3.3

1. *Determinare* $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{\sin 3k}{k\,(2+ik)}\right\}$.

   Ricordando che $\dfrac{\sin ak}{k} = \mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{2}\left[H(x+a) - H(x-a)\right]\right\}$ *e che* $\dfrac{1}{2+ik} = \mathcal{F}\left\{\,H(x)\,e^{-2x}\,\right\}$, *per il teorema di convoluzione*

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin 3k}{k\,(2+ik)}\right\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H(x-y+3) - H(x-y-3)\right]H(y)\,e^{-2y}\,dy\,.$$

Da cui, essendo

$$H(x+3-y)H(y) = \begin{cases} 0\,, & \textit{per} \;\; y<0 \;\; \textit{e} \;\; y>x+3 \\ 1\,, & \textit{per}\; 0<y<x+3 \end{cases}$$

e

$$H(x-3-y)H(y) = \begin{cases} 0\,, & \textit{per} \;\; y<0 \;\; \textit{e} \;\; y>x-3 \\ 1\,, & \textit{per}\; 0<y<x-3 \end{cases}$$

si ottiene

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\sin 3k}{k\,(2+ik)} \right\} = \frac{1}{2}\left[H(x+3)\int_0^{x+3} e^{-2y}\,dy \;+\; H(x-3)\int_0^{x-3} e^{-2y}\,dy \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ H(x+3)\left[-\frac{1}{2}\,e^{-2y}\right]_0^{x+3} + \; H(x-3)\left[-\frac{1}{2}\,e^{-2y}\right]_0^{x-3} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[H(x+3)\left(1-\,e^{-2\,(x+3)}\right) \;+\; H(x-3)\left(1-e^{-2(x-3)}\right)\right].$$

2. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$-\,y'' + a^2 y = f(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Uguagliando la trasformata di Fourier dei due membri si ha

$$-\,(ik)^2 Y + a^2 Y = F(K)$$

da cui

$$Y(k) = \frac{F(k)}{a^2+k^2} = F(k)\,G(k)\,,$$

dove $G(k) = \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{2a}\,e^{-a|x|} \right\}$, $a>0$. *Pertanto, per il teorema di convoluzione*

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)\,dy\,, \qquad g(x) = \frac{1}{2a}\,e^{-a|x|}\,.$$

Nel caso particolare $f=\delta$,

$$y(x) = g(x)\,.$$

La funzione $g(x)$, *solitamente indicata come* $G(x)$, *in Ingegneria viene definita risposta impulsiva, in quanto indica la soluzione di un sistema ingegneristico sottoposto ad un impulso istantaneo.*

Nel caso in cui l'inmpulso non sia istantaneo, ma sia espresso da una funzione $f(x)$, *la soluzione è la convoluzione tra la risposta impulsiva e l'impulso effettivo.*

3. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 6\,y' + 5\,y = \delta(x-3)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Da

$$\begin{aligned} -k^2 Y + 6\,ikY + 5\,Y &= e^{-3ik} \\ (5 + 6\,ik - k^2)\,Y &= e^{-3ik} \\ (1+ik)\,(5+ik)\,Y &= e^{-3ik} \end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned} Y &= \frac{e^{-3ik}}{(1+ik)\,(5+ik)} = \frac{e^{-3ik}}{(1+ik)} \cdot \frac{1}{(5+ik)} = \\ &= \mathcal{F}\left\{ e^{-(x-3)} H(x-3) \right\} \; \mathcal{F}\left\{ e^{-5x} H(x) \right\}\,, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5(x-y)} H(x-y)\, e^{-(y-3)} H(y-3)\, dy = \\ &= e^{-5x+3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{4y} H(x-y)\, H(y-3)\, dy = \\ &= e^{-5x+3} H(x-3) \int_{3}^{x} e^{4y}\, dy = \\ &= \frac{1}{4}\, e^{-5x+3} \left(e^{4x} - e^{12}\right) H(x-3) = \\ &= \frac{1}{4} \left[e^{-(x-3)} - e^{-5(x-3)} \right] H(x-3)\,. \end{aligned}$$

Capitolo 4

Trasformata di Laplace

Definizione 4.1 *Sia $f(t)$ una funzione definita per $t \geq 0$. Per trasformata di Laplace $\mathcal{L}\{\, f \,\}$ di f si intende la funzione cosi' definita*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

per tutti gli s per cui tale integrale improprio esiste.

Da notare che $\mathcal{L}\{\, f \,\}$ è effettivamente una funzione, nel senso che l'operatore $\mathcal{L}$, sotto le ipotesi precisate nel seguito, ad una funzione f associa la funzione $\mathcal{L}\{\, f \,\}$. Nel caso in cui non vi siano rischi di ambiguita', per motivi di semplicita', la trasformata di Laplace di f viene indicata con F, ossia si scrive $F(s)$ in luogo di $\mathcal{L}\{\, f \,\}\,(s)$.

Esempio 4.1

1. $\mathcal{L}\{\, 1 \,\} = \dfrac{1}{s}\,, \qquad$ *per* $s > 0\,.$

   Dimostrazione.

$$\begin{aligned} F(s) \quad &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \; dt = \lim_{L\to\infty} \int_0^L e^{-st}\, dt = \\ &= \lim_{L\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\, e^{-st} \right]_0^L = \frac{1}{s} \lim_{L\to\infty} \left(1 - e^{-sL} \right) = \\ &= \frac{1}{s}\,, \qquad s > 0\,. \end{aligned}$$

$\square$

2. $\mathcal{L}\{\, t \,\} = \dfrac{1}{s^2}\,, \qquad$ *per* $s > 0\,.$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t\; dt = \lim_{L\to\infty} \int_0^L t\, e^{-st}\, dt = \lim_{L\to\infty} \int_0^L t\; d\frac{e^{-st}}{-s} = \\ &= \lim_{L\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\, L\, e^{-sL} \right] + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \,, \end{aligned}$$

da cui, osservato che $\lim_{L\to\infty} \frac{L}{e^{sL}} = 0$, *per l'esempio 1*

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\,, \qquad s > 0\,.$$

□

3. Per qualsiasi numero naturale n,

$$\mathcal{L}\{\, t^n \,\} = \frac{n!}{s^{n+1}}\,, \qquad s > 0\,. \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione. Osservato che la (4.1) *è vera per* $n = 1$, *supponendo che sia valida per* $k = 1, 2, \dots, n-1$, *si deve dimostrare che è vera anche per* $k = n$. *A tale scopo basta la seguente osservazione:*

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^n\; dt = \lim_{L\to\infty} \int_0^L t^n\, e^{-st}\, dt = \\ &= \lim_{L\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\, L^n\, e^{-sL} \right] + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1}\, e^{-st}\, dt \,, \end{aligned}$$

da cui, essendo $\lim_{L\to\infty} \frac{L^n}{e^{sL}} = 0$ *ed essendo (per l'ipotesi di induzione)*

$$\int_0^{\infty} t^{n-1}\, e^{-st}\, dt = \frac{(n-1)!}{s^n}\,,$$

risulta $\frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1}\, e^{-st}\, dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$, *ossia la* (4.1) *vale anche per* $k = n$. □

4. $\mathcal{L}\{\, \sin at \,\} = \frac{a}{s^2 + a^2}\,, \qquad$ *per* $s > 0$ *e* $a \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin at\} &= \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \int_0^\infty e^{-st} d\left(-\frac{\cos at}{a}\right) = \\ &\hfill [per\ \ a \neq 0] \\ &= -\frac{1}{a}\lim_{L\to\infty}\left[e^{-st}\cos at\right]_0^L - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st} d\left(\frac{\sin at}{a}\right) = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left\{\lim_{L\to\infty}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\right]_0^L\right\} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}\{\sin at\}\ ,\end{aligned}$$

da cui, portando $\dfrac{s^2}{a^2}\mathcal{L}\{\sin at\}$ *a* 1^o *membro,* $\left(1+\dfrac{s^2}{a^2}\right)\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{1}{a}$ *,*
ossia

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}\,.$$

Poiché tale relazione è banalmente vera anche per $a = 0$*, l'affermazione è vera per qualunque* $a \in \mathbb{R}$ *.* □

5. $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ *,* *per* $s > 0$ *e* $a \in \mathbb{R}$ *.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos at\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \int_0^\infty e^{-st} d\left(\frac{\sin at}{a}\right) = \\ &\hfill [per\ \ a \neq 0] \\ &= \frac{1}{a}\lim_{L\to\infty}\left[e^{-st}\sin at\right]_0^L + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \\ &= \frac{s}{a}\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{s}{s^2+a^2}\ ,\end{aligned}$$

valida per qualunque $a \in \mathbb{R}$ *.* □

6. $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ *,* *per* $s > a$ *.*

Dimostrazione.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)\,t}\,dt = \frac{1}{s-a}\ , \qquad per\ \ s > a\,.$$

□

7. $\mathcal{L}\left\{ \frac{1}{(a-b)} \left(e^{at} - e^{bt}\right) \right\} = \frac{1}{(s-a)(s-b)}\,, \qquad per\ s > \max(a,b)\,.$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{ \frac{1}{(a-b)} \left(e^{at} - e^{bt}\right) \right\} &= \frac{1}{(a-b)} \int_0^{\infty} e^{-st} \left(e^{at} - e^{bt}\right)\, dt = \\
&= \frac{1}{a-b} \left[\mathcal{L}\left\{ e^{at} \right\} - \mathcal{L}\left\{ e^{bt} \right\} \right] = \\
&= \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right] = \\
&= \frac{1}{(s-a)(s-b)}\,, \qquad per \quad s > \max(a,b)\,.
\end{aligned}$$

□

8. $\mathcal{L}\left\{ t\, e^{at} \right\} = \frac{1}{(s-a)^2}\,, \qquad per\ s > a\,.$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{ t\, e^{at} \right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, e^{at}\, dt = \int_0^{\infty} t\, e^{-(s-a)\,t}\, dt = \\
&= \int_0^{\infty} t\ d\left[\frac{e^{-(s-a)\,t}}{-(s-a)} \right] = \\
&= \left[-\frac{1}{s-a}\, t\, e^{-(s-a)\,t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s-a} \int_0^{\infty} e^{-(s-a)\,t}\, dt = \\
&= \frac{1}{s-a}\, \mathcal{L}\left\{ e^{a\,t} \right\} = \\
&= \frac{1}{(s-a)^2} \qquad per \quad s > a\,.
\end{aligned}$$

□

9. $\mathcal{L}\left\{ t^n\, e^{at} \right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\,, \qquad per\ s > a\,.$

Dimostrazione. Poiché, in base all'esempio 8)*, il risultato è vero per* $n = 1$*, la dimostrazione generale può essere ottenuta per induzione.* □

10. $\mathcal{L}\left\{ \cosh\, at \right\} = \frac{s}{s^2 - a^2}\,, \qquad per\ s > a\,.$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh at\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cosh at\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\, dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[e^{-(s-a)\,t}+e^{-(s+a)\,t}\right] dt = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}\,.
\end{aligned}$$

□

11. $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}\,,$ *per* $s > a\,.$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sinh at\} &= \int_0^\infty e^{-st}\sinh at\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\, dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[e^{-(s-a)\,t}-e^{-(s+a)\,t}\right] dt = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}\,.
\end{aligned}$$

□

12. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$ *per* $s > 0\,.$

Dimostrazione. *Ricordando che* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,,$ *si ha*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \\
& \qquad\qquad [\textit{posto } t = \tau^2] \\
&= 2\int_0^\infty e^{-s\,\tau^2}\, d\tau = \\
& \qquad\qquad [\textit{posto } \tau = x/\sqrt{s}\,] \\
&= \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,.
\end{aligned}$$

□

13. ***Delta di Dirac.*** *Analogamente al caso della trasformata di Fourier, poiché la* δ *di Dirac non è una funzione ma una distribuzione, la sua trasformata* *di Laplace a rigore non esiste. Tuttavia essa può essere introdotta nel modo seguente.*

Con riferimento alla funzione di Heaviside, indicato con ε un qualsiasi numero positivo, si consideri l'impulso unitario

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\,[H(t) - H(t-\varepsilon)]$$

la cui trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}\{\,\delta_\varepsilon(t)\,\} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{s}\right).$$

Sia dunque

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)\,.$$

Mediante un artificio, la cui validità è dimostrata nella teoria delle distribuzioni, la trasformata di Laplace della δ di Dirac viene usualmente definita come segue

$$\mathcal{L}\{\,\delta(t)\,\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}\{\,\delta_\varepsilon(t)\,\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon s}\left(1-e^{-\varepsilon s}\right) = 1\,.$$

Spesso nelle applicazioni si dice che la δ di Dirac gode della seguente **proprietà di filtraggio***:*

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)\,.$$

Dimostrazione. *Osserviamo che*

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta_\varepsilon(t-a)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} f(t)\,dt\,,$$

dove $\delta_\varepsilon(t-a) = \frac{1}{\varepsilon}\,[H(t-a) - H(t-a-\varepsilon)]$ *è l'impulso unitario con punto iniziale* a.

Per il teorema della media generalizzata, esiste un valore $t_0 \in (a, a+\varepsilon)$ *tale che* $\int_a^{a+\varepsilon} f(t)\,dt = \varepsilon\, f(t_0)$ *e pertanto* $\int_0^\infty f(t)\,\delta_\varepsilon(t-a)\,dt = f(t_0)\,.$

Da tale relazione, passando al limite per $\varepsilon \to 0$ *e ricordando che* $a < t_0 < a+\varepsilon$, *segue direttamente la proprietà di filtraggio.* □

Definizione 4.2 (Antitrasformata di Laplace) *Se* $F(s) = \mathcal{L}\{\,f\,\}$, *ogni funzione* $f(t)$ *che ha generato la* $F(s)$ *viene definita antitrasformata della* $F(s)$. *Vale cioè la seguente relazione operatoriale*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\,F(s)\,\}\,,$$

dove $\mathcal{L}^{-1}$ *rappresenta l'operatore inverso di Laplace. Tale operatore è a sua volta definito mediante una trasformazione integrale nel campo complesso, anche nel caso in cui la* f *sia reale.*

Esempio 4.2

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1\,, && \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n\,,\\
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin\, at\,, && \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos\, at\,,\\
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\} = \sinh\, at\,, && \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh\, at\,.
\end{aligned}$$

Trasformata di una funzione periodica. Sia f una funzione periodica di periodo T. Allora

$$\mathcal{L}\{\,f\,\} = \frac{1}{1-e^{-s\,T}}\int_0^T e^{-s\,t}\,f(t)\,dt\,.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\,f\,\} &= \int_0^\infty e^{-s\,t}\,f(t)\,dt = \\
&= \left(\int_0^T + \int_T^{2\,T} + \cdots + \int_{k\,T}^{(k+1)\,T} + \dots\right) e^{-s\,t}\,f(t)\,dt = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\,T}^{(n+1)\,T} e^{-s\,t}\,f(t)\,dt = \\
&\qquad\qquad\qquad [\text{posto } t = \tau + n\,T] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T e^{-s\,(\tau+n\,T)}\,f(\tau+n\,T)\,d\tau = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\,n\,T}\int_0^T e^{-s\,\tau}\,f(\tau+n\,T)\,d\tau = \\
&\qquad\qquad\qquad [\text{per la periodicità della } f] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\,n\,T}\int_0^T e^{-s\,\tau}\,f(\tau)\,d\tau = \\
&= \left(1 + e^{-s\,T} + \cdots + e^{-n\,s\,T} + \dots\right)\int_0^T e^{-s\tau}\,f(\tau)\,d\tau = \\
&= \frac{1}{1-e^{-s\,T}}\int_0^T e^{-s\,\tau}\,f(\tau)\,d\tau\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Esempio 4.3 *Sia f un'onda quadra, ossia la funzione caratterizzata dall'andamento seguente:*

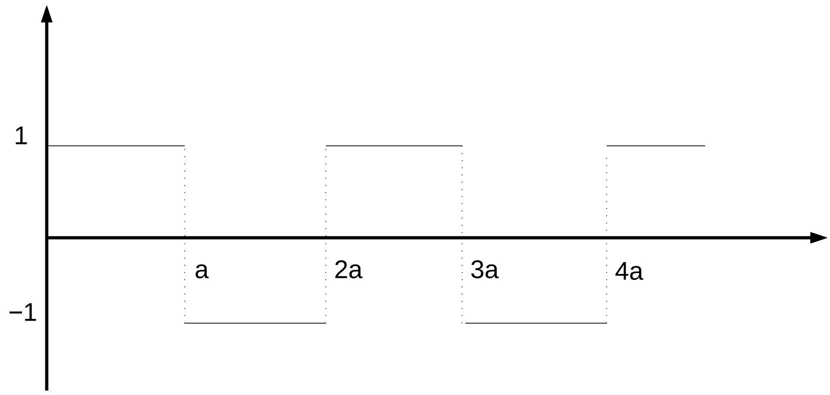


Figura 4.1

Essendo la f periodica con periodo $2a$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f\} &= \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt = \\
&= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left\{ \int_0^a e^{-st}\cdot 1\,dt + \int_a^{2a} e^{-st}\cdot(-1)\,dt \right\} = \\
&= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left\{ \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^a - \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^{2a} \right\} = \\
&= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left[\frac{1}{s} \left(1 - 2\,e^{-as} + e^{-2as}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{(1-e^{-as})\,(1+e^{-as})} \; \frac{(1-e^{-as})^2}{s} = \\
&= \frac{1}{s} \; \frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.1 *Utilizzare la formula sulla trasformata delle funzioni periodiche per dimostrare che* $\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$.

Si deve dunque dimostrare che

$$\frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} \cos t \; dt = \frac{s}{s^2+1}\,.$$

A tale scopo si osserva inizialmente che

$$\begin{aligned} I(s) \quad &= \int_0^{2\pi} e^{-st} \cos\, t\; dt = \int_0^{2\pi} e^{-st}\, d \sin\, t = \\ &= \left[e^{-st} \sin t \right]_0^{2\pi} + s \int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t\; dt = \\ &= s \int_0^{2\pi} e^{-st}\; d(-\cos t) = s\, \left[-e^{-st} \cos t \right]_0^{2\pi} - s^2 \int_0^{2\pi} e^{-st} \cos t\; dt = \\ & s\, \left(1 - e^{-2\pi s}\right) - s^2 I(s)\,, \end{aligned}$$

da cui

$$(1+s^2)\, I(s) = s\, \left(1 - e^{-2\pi s}\right)\, .$$

Pertanto, essendo $I(s) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-st} \cos\, t\; dt\,,$

$$\mathcal{L}\,\{\, \cos t\, \} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}}\, I(s) = \frac{s}{s^2+1}\, .$$

È importante ora stabilire delle condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Laplace.

Definizione 4.3 (Ordine esponenziale.) *Una funzione* f *definita in* $\mathbb{R}_+$ *è detta di ordine esponenziale* α *se esistono due numeri reali* $M > 0$ *e* α *tali che, per* t *sufficientemente grande, risulta*

$$\left| e^{-\alpha t}\, f(t) \right| \leq M\,, \qquad \textit{ossia} \quad |f(t)| \leq M\, e^{\alpha t}\, . \tag{4.2}$$

Quando non risulti necessario precisare il valore di α *,* f *viene detta semplicemente di ordine esponenziale.*

Ogni funzione limitata, indipendentemente dalla sua regolarità, è ovviamente di ordine esponenziale. Se $g(t)$ è limitata, ogni funzione del tipo $f(t) = e^{at} g(t)$ è di ordine esponenziale α con $\alpha > a$.

Poiché, per ogni numero naturale n e qualunque valore positivo α, $\lim\limits_{t\to\infty} t^n\, e^{-\alpha t} = 0$, è evidente che ogni potenza di t, e dunque anche un qualsiasi polinomio in t, è di ordine esponenziale.

Teorema 4.1 (Condizioni sufficienti) *Se la* f *è continua oppure, più in generale, è continua a tratti in un qualsiasi intervallo limitato* $0 \leq t \leq t_0$ *ed è di ordine esponenziale* α *per* $t > t_0$ *, allora la trasformata di Laplace* $\mathcal{L}\,\{\, f\, \}$ *esiste per qualsiasi* $s > \alpha$ *.*

È immediato osservare che le condizioni del Teorema 4.1 sono soddisfatte in tutti gli esempi fin qui considerati per ogni $\alpha > 0$.

La funzione e^{t^2} non è invece di ordine esponenziale in quanto, per qualsiasi valore di α, risulta $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\alpha t} e^{t^2} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{t(t+\alpha)} = +\infty$.

Per molteplici ragioni è importante sapere se l'uguaglianza tra le trasformate di due funzioni implica l'uguaglianza delle funzioni. Una condizione sufficiente perché questo avvenga è stabilita dal seguente teorema di Lerch.

Teorema 4.2 (Lerch) *Se $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$, con f e g continue in $\mathbb{R}_+$, allora $f(t) = g(t)$ per ogni $t \geq 0$.*

Questo significa che, almeno per le funzioni continue, la trasformata di Laplace di una funzione identifica in modo univoco la funzione che l'ha generata.

4.1 Proprietà della trasformata di Laplace

Linearità. È immediato osservare che, così come quella di Fourier, la trasformata di Laplace gode della proprietà di linearità. Più esplicitamente, per ogni coppia di numeri complessi c_1, c_2 e di funzioni f e g,

$$\mathcal{L}\{c_1 f + c_2 g\} = c_1 \mathcal{L}\{f\} + c_2 \mathcal{L}\{g\},$$

nell'ipotesi che esistano sia $\mathcal{L}\{f\}$ che $\mathcal{L}\{g\}$.

Traslazione nella variabile t. Sia $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$, per $s > \alpha$. Allora, qualunque sia il numero positivo a,

$$\mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \qquad s > \alpha.$$

In altri termini, la trasformata di Laplace di una funzione traslata di a è la trasformata della f moltiplicata per e^{-as}.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{H(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)f(t-a)\,dt = \\
&= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt = \\
&\qquad\qquad\qquad [\text{posto } \tau = t-a\,] \\
&= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,d\tau = \\
&= e^{-as}\mathcal{L}\{f\}.
\end{aligned}$$

□

La stessa proprietà implica che $\mathcal{L}^{-1}\{\, e^{-a\,s} F(s)\,\} = f(t-a)H(t-a)\,.$

Esempio 4.4

- $f(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < 6 \\ (t-6)^2\,, & t > 6\,. \end{cases}$

  Utilizzando la funzione di Heaviside si può scrivere $f(t) = H(t-6)\,(t-6)^2$ *,*
  e, per la proprietà di traslazione in t*,*

$$\mathcal{L}\{\, f\,\} = e^{-6s}\,\mathcal{L}\left\{\, t^2\,\right\} = e^{-6s}\,\frac{2}{s^3}\,.$$

- $\mathcal{L}\{\, \delta(t-2)\,\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{\, \delta(t)\,\} = e^{-2t}.$

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{s\,e^{-3s}}{s^2+4} \right\} = H(t-3)\cos 2(t-3)\,.$

Esempio 4.5

1. *Esprimere la seguente funzione mediante la funzione di Heaviside e calcolarne la trasformata di Laplace*

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < 2 \\ (t-1)\,, & 2 \le t < 4 \\ -4\,, & t \ge 4\,. \end{cases}$$

   Utilizzando la funzione di Heaviside si ha

$$f(t) = (t-1)\,[H(t-2) - H(t-4)] - 4\,H(t-4)$$

   da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\, f\,\} \quad &= \int_2^4 (t-1)\,e^{-st}\,dt - 4\int_4^\infty e^{-st}\,dt = \\ &= \left[(t-1)\,\frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_2^4 - 4\,\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_4^\infty = \\ &= \frac{1}{s}\left(e^{-2s} - 3\,e^{-4s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\right) - \frac{4}{s}\,e^{-4s} = \\ &= \frac{1}{s^2}\,\left[(s+1)\,e^{-2s} - (7s+1)\,e^{-4s}\right] = \\ &= \frac{e^{-2s}}{s^2}\,\left[s+1-(7s+1)\,e^{-2s}\right]\,. \end{aligned}$$

2. *Calcolare* $\mathcal{L}\{\,f\,\}$ *, essendo* $f(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < 2 \\ t^2+1\,, & t \ge 2\,. \end{cases}$

   Per la definizione di funzione di Heaviside

$$f(t) = H(t-2)\,(t^2+1)\,.$$

   Allo scopo di applicare la regola, scriviamo

$$t^2+1 = [(t-2)+2]^2+1 = (t-2)^2+4\,(t-2)+5\,,$$

   da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\,f\,\} &= \mathcal{L}\left\{\,H(t-2)[(t-2)^2+4\,(t-2)+5]\,\right\} = \\ &= e^{-2s}\left[\mathcal{L}\{\,t^2\,\}+4\,\mathcal{L}\{\,t\,\}+\mathcal{L}\{\,5\,\}\right] = \\ &= e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{5}{s}\right)\,. \end{aligned}$$

   Da notare, in particolare, che $\mathcal{L}\{\,H(t-a)\,\} = \dfrac{e^{-as}}{s}\,.$

Traslazione nella variabile s. Se f è una qualunque funzione con ordine esponenziale α, qualunque sia il numero a, per ogni $s > a+\alpha$ vale la relazione

$$\mathcal{L}\left\{\,e^{at}f(t)\,\right\} = F(s-a)\,,$$

essendo $F(s) = \mathcal{L}\{\,f\,\}\,.$

Dimostrazione.

$$\mathcal{L}\left\{\,e^{at}f(t)\,\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a)\,.$$

$\square$

La stessa proprietà implica che $\mathcal{L}^{-1}\{\,F(s-a)\,\} = e^{at}f(t)\,.$

Esempio 4.6

- $\mathcal{L}\{\,t^n\,\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\,e^{at}t^n\,\right\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}\,, \quad s > a$

  In particolare $\mathcal{L}\left\{\,t^3\,\right\} = \dfrac{6}{s^4} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\,e^{7t}t^3\,\right\} = \dfrac{6}{(s-7)^4}\,, \quad s > 7$

- $\mathcal{L}\{\,\sin bt\,\} = \dfrac{b}{s^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{\,e^{at}\sin bt\,\right\} = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\,, \quad s > a$

- $\mathcal{L}\{\cos bt\} = \dfrac{s}{s^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\,, \quad s>a$
- $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$
- $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-a)^2}\right\} = 2\,t\,e^{at}$
- $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\sqrt{\dfrac{\pi}{s+3}}\right\} = \dfrac{e^{-3t}}{\sqrt{t}}$
- $\mathcal{L}\{\cosh 2t\} = \dfrac{s}{s^2-4} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{(s-3)^2-4}\right\} = e^{3t}\cosh 2t$

Esercizio 4.2

1. *Dimostrare che* $\mathcal{L}\{\sin(at)\,\sinh(at)\} = \dfrac{2\,a^2\,s}{s^4+4\,a^4}\,,\quad$ *per* $s>a\,.$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(at)\,\sinh(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,\sin(at)\,\sinh(at)\,dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\,\sin(at)\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\,\left[\mathcal{L}\left\{e^{a\,t}\sin(at)\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-a\,t}\sin(at)\right\}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{(s-a)^2+a^2} - \frac{a}{(s+a)^2+a^2}\right) = \frac{2\,a^2\,s}{s^4+4\,a^4}\,.
\end{aligned}$$

2. *Calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-4}{(s+5)^2+4}\right\}\,.$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s+5)^2+4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5-9}{(s+5)^2+4}\right\} = \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+5)^2+4} - \frac{9}{(s+5)^2+4}\right\} = \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+5)^2+4}\right\} - \frac{9}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+5)^2+4}\right\} = \\
&= e^{-5t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{9}{2}\,e^{-5t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \\
&= e^{-5t}\left(\cos 2t - \frac{9}{2}\,\sin 2t\right)\,.
\end{aligned}$$

Variazione di scala Se $\mathcal{L}\{\, f(t)\,\} = F(s)$, allora per ogni $a > 0$,

$$\mathcal{L}\{\, f(at)\,\} = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right) .$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\, f(at)\,\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt = \\
&\qquad\qquad [\text{posto } \tau = at\ ] \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau)\, d\tau = \\
&= \frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right) .
\end{aligned}$$

□

Esempio 4.7 *Ricordando che* $\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ *e applicando la proprietà del cambio di scala si trova*

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{s^2+4} ,$$

come già ricavato per altra via. Analogamente, poiché $\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$, *si ha che* $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1} = \dfrac{s}{s^2+4}$.

Esercizio 4.3

Sapendo che $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin t}{t}\right\} = \arctan\dfrac{1}{s}$, *calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\dfrac{3}{s}\right\}$.

Per la proprietà del cambiamento di scala

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 3t}{3\,t}\right\} = \frac{1}{3}\,\arctan\frac{3}{s}$$

da cui

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\frac{3}{s}\right\} = \frac{\sin 3t}{t} .$$

Ammesso, per ipotesi, che

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\; e^{-\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{s}}\; e^{-\sqrt{s}} ,$$

calcolare $\mathcal{L}\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi\, t}}\, e^{-\frac{4}{t}} \right\}$.

Osservato che la nuova funzione differisce dalla precedente per un semplice cambio di scala, si ha

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi\, t}}\, e^{-\dfrac{4}{t}} \right\} = \frac{2}{\sqrt{s}}\, e^{-2\sqrt{s}}\,.$$

Trasformata di Laplace di una derivata. L'uso delle trasformate di Laplace risulta di primaria importanza nella risoluzione di vari tipi di equazioni differenziali con valori iniziali. La sua potenzialità deriva dalla possibilità di trasformare un problema differenziale con valori iniziali in uno algebrico, la cui risoluzione consente spesso, con l'ausilio di tabelle sulle trasformate di funzioni base, di ricostruire la soluzione del problema differenziale.

Tale possibilità deriva dalla relazione esistente tra la trasformata di una derivata e la trasformata della funzione stessa.

Se la f è derivabile nella semiretta $\mathbb{R}^+$ e inoltre f e f' sono entrambe dotate di trasformata di Laplace, vale la seguente relazione

$$\mathcal{L}\{\, f' \,\} = s\, F(s) - f(0)\,,$$

essendo $F(s) = \mathcal{L}\{\, f \,\}\,(s)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\, f' \,\} \quad &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \\ &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \\ &= sF(s) - f(0)\,. \end{aligned}$$

□

Sotto analoghe ipotesi (f e f' derivabili in $[0, \infty)$, con f, f' e f'' dotate di trasformata di Laplace) vale la relazione

$$\mathcal{L}\{\, f'' \,\} = s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0)\,.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\, f'' \,\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\, dt = \\
&= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \\
&= s\, \mathcal{L}\{\, f' \,\} - f'(0) = \\
&= s\, [s\, F(s) - f(0)] - f'(0) = \\
&= s^2\, F(s) - s\, f(0) - f'(0)\,.
\end{aligned}$$

□

Procedendo per induzione si può altresì dimostrare che, per ogni $n \geq 1$,

$$\mathcal{L}\left\{\, f^{(n)} \,\right\} = s^n\, F(s) - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,.$$

Dalla trasformata di Laplace di una derivata discende la seguente proprietà:

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s}\,.$$

Dimostrazione. Posto $g(t) = \displaystyle\int_0^\tau f(\tau)\, d\tau$ risulta $g'(t) = f(t)$ con $g(0) = 0$. Di conseguenza

$$\mathcal{L}\{\, g' \,\} = s\, G(s) = F(s)$$

e dunque

$$G(s) = \frac{F(s)}{s}\,, \qquad \text{ossia} \quad \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s}\,.$$

□

Esempio 4.8

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t \cos\tau\, d\tau \right\} = \frac{1}{s}\, \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Applicazione alle equazioni differenziali. Risolvere, mediante l'utilizzo della trasformata di Laplace, il seguente problema con valore iniziale:

$$\begin{cases} y' - 4y = 1 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Indicata con $Y(s)$ la trasformata di Laplce della $y(t)$ e uguagliando la trasformate dei due membri dell'equazione si ottiene

$$\mathcal{L}\{\,y'\,\} - 4\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

da cui, per la proprietà sulla trasformata della derivata prima,

$$s\,Y(s) - y(0) - 4Y(s) = \frac{1}{s}\,,$$

ossia, ricordando che $y(0) = 1$,

$$(s-4)\,Y(s) = 1 + \frac{1}{s}\,,$$

e dunque

$$Y(s) = \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}\,, \qquad s > 4\,.$$

La soluzione del problema differenziale, che è certamente unica per il teorema di Lerch, è dunque la trasformata inversa del secondo membro

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-4)}\right\} = \\ &= e^{4t} + \frac{1}{4}\left(e^{4t} - 1\right) = \frac{1}{4}\left(5\,e^{4t} - 1\right)\,, \end{aligned}$$

dove la prima antitrasformata è una immediata conseguenza della proprietà di traslazione in s, e la seconda segue dalla relazione $\mathcal{L}\left\{\,(e^{at} - e^{bt})/(a-b)\,\right\} = 1/(s-a)(s-b)\,.$

Osservazione 4.1 *Poiché l'equazione è a coefficienti costanti con secondo membro continuo, lo stesso risultato può essere ottenuto mediante il procedimento standard, consistente nell'esprimere la soluzione come $c\,y_1 + y_2$, dove y_1 è la soluzione dell'equazione omogenea associata, y_2 è una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale e c è una costante da determinarsi in modo che valga la prefissata condizione iniziale.*

Nel caso specifico $y_1 = e^{4t}$, in quanto soluzione dell'equazione omogenea $y' - 4\,y = 0$, e $y_2 = -1/4$, ottenibile sotto l'ipotesi che esista una soluzione costante. La soluzione generale è dunque $y(t) = c\,e^{4t} - \dfrac{1}{4}$, dove c viene determinato imponendo $y(0) = c - \dfrac{1}{4} = 1$. Di conseguenza, come ottenuto mediante la trasformata di Laplace, $y(t) = \dfrac{1}{4}\,(5\,e^{4t} - 1)$.

Il metodo della decomposizione in frazioni parziali. Come si è visto nell'esempio precedente, spesso la risoluzione di un problema differenziale, con assegnati valori iniziali, viene ricondotta alla determinazione della trasformata inversa di una funzione razionale.

In questo caso la tecnica più usuale consiste nel decomporre la funzione razionale in una somma di frazioni parziali delle quali si sia in grado di ottenere la trasformata inversa.

Più precisamente si supponga di avere una funzione razionale del tipo

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_0 s^p + a_1 s^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 s^q + b_1 s^{q-1} + \cdots + b_q}\,,$$

soddisfacente le seguenti ipotesi:

- tutti i coefficienti $\{a_i\}$ e $\{b_j\}$ sono reali;
- P e Q non hanno fattori comuni;
- il grado di Q è maggiore di quello di P, ossia $q > p$.

Dalle proprietà algebriche dei polinomi deriva che Q può essere espresso come prodotto di fattori del tipo

$$(s-a)^m \qquad \text{(potenza di un fattore lineare con } a \text{ reale)}$$

oppure del tipo

$$(s^2 + b\,s + c)^n \qquad \text{(potenza di un fattore quadratico con } b \text{ e } c \text{ reali)}$$

Naturalmente compare una potenza di un fattore quadratico soltanto se tale fattore non può essere fattorizzato come prodotto di fattori lineari con coefficienti reali. Un tale fattore è detto *irriducibile*.

Ad esempio $s^3 - 3s^2 + 2s - 6 = (s-3)(s^2+2)$ è il prodotto di un fattore lineare e di uno quadratico irriducibile. Al contrario il polinomio $s^3 - 4s^2 - 3s + 18 = (s-3)^2(s+2)$ non contiene fattori quadratici irriducibili.

Tali considerazioni suggeriscono di scrivere $P(s)/Q(s)$ come una somma di quozienti semplici, nel modo seguente:

- ad ogni fattore lineare $(s-a)^m$ di $Q(s)$ si associa una somma di termini del tipo
$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s-a)^m}\,;$$

- ad ogni fattore quadratico irriducibile $(s^2 + bs + c)^n$ di $Q(s)$ si associa una somma di termini del tipo
$$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + bs + c} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + bs + c)^2} + \cdots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + bs + c)^n}\,;$$
- si calcolano le costanti $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n$ imponendo che $P(s)/Q(s)$ sia identicamente uguale alla sommatoria di tutti i termini introdotti.

Esempio 4.9

- *Calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2}{s^4 - 6\,s^3 + 32\,s}\right\}$.

  Osservato che $s^4 - 6\,s^3 + 32\,s = s\,(s+2)\,(s-4)^2$ *, si scrive*
$$\frac{s^2+2}{s\,(s+2)\,(s-4)^2} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s-4} + \frac{d}{(s-4)^2}$$
  da cui
$$s^2 + 2 = a\,(s+2)\,)(s-4)^2 + b\,s\,(s-4)^2 + c\,s\,(s+2)\,(s-4) + d\,s\,(s+2)\,.$$
  Le costanti $a, b, c,$ *e* d *debbono dunque soddisfare il sistema*
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -\,6\,a - 8\,b - 2\,c + d = 1 \\ 16\,b - 8\,c + 2\,d = 0 \\ 32\,a = 2\,. \end{cases}$$
  Pertanto $a = \dfrac{1}{16}$ *,* $b = -\dfrac{1}{12}$ *,* $c = \dfrac{1}{48}$ *e* $d = \dfrac{3}{4}$ *, e dunque*
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s^4 - 6\,s^3 + 32\,s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{16}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{12}\,\frac{1}{s+2} + \frac{1}{48}\,\frac{1}{s-4} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{(s-4)^2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{12}\,e^{-2t} + \frac{1}{48}\,e^{4t} + \frac{3}{4}\,t\,e^{4t}\,.$$

- *Determinare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+10}{s^3 - 3\,s^2 + 4\,s - 12}\right\}$.

  Poiché $s^3 - 3\,s^2 + 4\,s - 12 = (s-3)\,(s^2+4)$ *, si ha*
$$\frac{s+10}{(s-3)\,(s^2+4)} = \frac{a}{s-3} + \frac{b\,s + c}{s^2+4}$$

e dunque

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c-3\,b=1 \\ 4\,a-3\,c=10 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2\,. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+10}{s^3-3\,s^2+4\,s-12}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}-\frac{s+2}{s^2+4}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}-\frac{s}{s^2+4}-\frac{2}{s^2+4}\right\} = \\ &= e^{3t}-\cos 2t-\sin 2t\,. \end{aligned}$$

Esempio 4.10

1. *Risolvere l'equazione differenziale con valori iniziali*

$$y''+y=t\,, \qquad y(0)=1 \quad y'(0)=0\,.$$

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$s^2\,Y(s)-s\,y(0)-y'(0)+Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

e, tenendo conto delle condizioni iniziali,

$$(s^2+1)\,Y(s)=s+\frac{1}{s^2}$$

da cui

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}\,.$$

Antitrasformando

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}=\cos\,t+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}\,.$$

Per il calcolo di $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}$ *facciamo ricorso alla tecnica di decomposizione in frazioni parziali. In questo caso si pone*

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{a}{s^2}+\frac{b\,s+c}{s^2+1}$$

e si determinano a, b *e* c *in modo che valga l'uguale per ogni* $s>0$.

Questo equivale a richiedere che risulti

$$1=a\,(s^2+1)+(b\,s+c)\,s^2$$

ossia che a, b *e* c *soddisfino il sistema*

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si ottiene $a = 1$, $b = 0$ *e* $c = -1$, *da cui*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2(s^2+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \right\} = t - \sin\, t.$$

La soluzione è dunque

$$y(t) = \cos\, t + t - \sin\, t\,.$$

2. *Risolvere il seguente problema differenziale*

$$y'' + 4\,y = f(t)\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,, \qquad f(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < 3 \\ t\,, & t \ge 3\,. \end{cases}$$

Con riferimento alla funzione di Heaviside, si può scrivere

$$f(t) = t\, H(t-3)$$

e inoltre, allo scopo di utilizzare la proprietà di traslazione in t,

$$f(t) = (t-3)\, H(t-3) + 3\, H(t-3)\,.$$

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione si ha

$$s^2\, Y(s) - s\, y(0) - y'(0) + 4\, Y(s) = \mathcal{L}\{\, (t-3)\, H(t-3)\,\} + 3\, \mathcal{L}\{\, H(t-3)\,\}$$

da cui, ricordando la relazione $\mathcal{L}\{\, H(t-a)\, f(t-a)\,\} = e^{-as}\, F(s)$ *e sostituendo le condizioni iniziali*

$$(s^2+4)\, Y(s) = e^{-3s}\, \left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s} \right)\,.$$

Pertanto

$$Y(s) = e^{-3s}\, \frac{1 + 3\, s}{s^2(s^2+4)}$$

e, utilizzando la tecnica di decomposizione in frazioni parziali,

$$Y(s) = e^{-3s}\, \left(\frac{3}{4}\, \frac{1}{s} + \frac{1}{4}\, \frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\, \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{4}\, \frac{1}{s^2+4} \right)$$

Antitrasformando

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,(t-3) - \frac{3}{4}\cos 2(t-3) - \frac{1}{8}\sin 2(t-3) \right] H(t-3) = \\ &= \frac{1}{8}\, \left[2t - 6\, \cos 2(t-3) - \sin 2(t-3) \right] H(t-3)\,. \end{aligned}$$

3. *Risolvere il seguente problema differenziale*

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = f(t)\,, \qquad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 0\,,$$

con $f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \le t < 3 \\ t+2\,, & t \ge 3\,. \end{cases}$

Con riferimento alla funzione di Heaviside, si può scrivere

$$f(t) = t\,H(t) + 2\,H(t-3)\,.$$

Uguagliando le trasformate di Laplace del primo e secondo membro e tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene

$$(s^2 - 4\,s + 4)\,Y(s) = -2\,s + 8 + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\,e^{-3\,s}\,,$$

ossia

$$(s-2)^2\,Y(s) = -2\,(s-2) + 4 + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\,e^{-3s}$$

da cui

$$Y(s) = -\,\frac{2}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{1}{s^2(s-2)^2} + \frac{2}{s\,(s-2)^2}\,e^{-3s}\,.$$

Utilizzando il metodo delle frazioni parziali si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s-2)^2} &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}\right] \\ \frac{2}{s\,(s-2)^2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2}\right]\,. \end{aligned}$$

Infine, antitrasformando,

$$\begin{aligned} y(t) = -2\,e^{2t} + 4\,t\,e^{2t} \ &+ \frac{1}{4}\,\left(1 + t - e^{2t} + t\,e^{2t}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\,\left[1 - e^{2(t-3)} + 2\,(t-3)\,e^{2(t-3)}\right]\,H(t-3) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\,\left(1 + t - 9\,e^{2t} + 17\,t\,e^{2t}\right) + \frac{1}{2}\,\left[1 - e^{2(t-3)} + 2\,(t-3)\,e^{2(t-3)}\right]\,H(t-3)\,.$$

4.2 Equazioni differenziali con coefficienti polinomiali

Rientrano in questa categoria importanti equazioni della Fisica Matematica. Per brevità, il riferimento è alle equazioni differenziali del 2^o ordine.

L'idea di fondo è quella di trasformare un'equazione del 2^o ordine in $y(t)$ in una del 1^o ordine in $Y(s)$, integrare quest'ultima e poi antitrasformare per ottenere $y(t)$. Per il passaggio dall'equazione in y a quella nella Y viene utilizzata un'ulteriore proprietà delle trasformate di Laplace mentre per la risoluzione dell'equazione in Y si fa ricorso alla formula generale di risoluzione delle equazioni differenziali del 1^o ordine.

Proprietà di derivazione di una trasformata di Laplace. Se $F(s) = \mathcal{L}\{\, f \,\}$ per $t > b$, allora per $t > b$ vale la relazione

$$\mathcal{L}\{\, t\, f(t) \,\} = -F'(s)\,.$$

Dimostrazione. Per la regola di differenziazione sotto il segno di integrale estendibile, mediante passaggio al limite, al caso di integrali su intervali illimitati,

$$\begin{aligned} F'(s) \quad &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty f(t)\left(\frac{d}{ds}\, e^{-st}\right) dt = \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}\,[t\, f(t)]\; dt = -\mathcal{L}\{\, t\, f(t) \,\}\;. \end{aligned}$$

□

Dalla suddetta relazione segue immediatamente che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\, t^2 f(t) \,\right\} \quad &= \mathcal{L}\{\, t\,[\,t f(t)] \,\} = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\{\, t f(t) \,\} = \\ &= -\frac{d}{ds}\,[-F'(s)] = F''(s)\,. \end{aligned}$$

Esempio 4.11 *Ricordando che* $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$ *[esempio 12], si ha*

$$\mathcal{L}\left\{\sqrt{t}\right\} = \mathcal{L}\left\{ t\,\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = -\,\frac{d}{ds}\sqrt{\frac{\pi}{s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, s^{-\frac{3}{2}}\,.$$

Procedendo per induzione si può dimostrare, più in generale, che

$$\mathcal{L}\{\, t^n\, f(t) \,\} = (-1)^n\, F^{(n)}(s)\,, \qquad s > b\,.$$

È altresì immediato notare che:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\, t\, y'(t)\,\} &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\{\, y'\,\} = -\frac{d}{ds}\,[s\,Y(s) - y(0)] = \\
&= -s\,Y'(s) - Y(s)\,, \\
\mathcal{L}\{\, t\, y''(t)\,\} &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\{\, y''\,\} = -\frac{d}{ds}\left[s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)\right] = \\
&= -s^2 Y'(s) - 2\,s\,Y(s) - y(0)\,.
\end{aligned}$$

Tali relazioni sono essenziali per la trasformazione di una equazione del 2^o ordine in y in una del 1^o ordine in Y.

Dalla relazione $\mathcal{L}\{\, t\, f(t)\,\} = -F'(s)$ discende la seguente proprietà:

$$\mathcal{L}\left\{\, \frac{f(t)}{t}\,\right\} = \int_s^\infty F(\tau)\, d\tau\,.$$

Dimostrazione. Posto $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ risulta $F(s) = \mathcal{L}\{\, t\, g(t)\,\} = -\,G'(s)$ da cui

$$G(s) = \int_s^\infty F(\tau)\, d\tau\,.$$

□

Esempio 4.12

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin t}{t}\, dt\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau = \arctan\frac{1}{s}$$

da cui segue che

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(0) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Risoluzione di un'equazione differenziale del 1^o ordine. Sia $y' + a(x)\,y = f(x)$ un'equazione differenziale del 1^o ordine di forma normale, alla quale è sempre possibile ricondursi nell'ipotesi che il coefficiente della y' non si annulli nel dominio della y. Se $a(x)$ e $f(x)$ sono sufficientemente regolari (ad es. $a(x)$ continua e $f(x)$ continua a tratti) per tale equazione esiste una ben nota formula risolutiva che qui viene ricordata unitamente alla dimostrazione.

Sia $\alpha(x)$ una primitiva di $a(x)$, ossia $\alpha(x) = \displaystyle\int_a^x a(\tau)\,d\tau$, brevemente $\alpha(x) = \displaystyle\int a(x)\,dx$. Moltiplicando primo e secondo membro per $e^{\alpha(x)}$ si ha

$$e^{\alpha(x)}y' + e^{\alpha(x)}a(x)\,y = \left(e^{\alpha(x)}y\right)' = e^{\alpha(x)}f(x)\,,$$

da cui

$$y(x) = e^{-\alpha(x)}\left[\int e^{\alpha(x)}f(x)\,dx + c\right]\,.$$

La costante c può essere determinata tramite la condizione iniziale, se assegnata, oppure sulla base di altre ipotesi sulla y.

Esempio 4.13 *Risolvere il problema a valori iniziali*

$$y'' + 2\,t\,y' - 4\,y = 1\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Uguagliando la trasformata di Laplace del primo e del secondo membro si ottiene

$$s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 2\,\mathcal{L}\left\{\,t\,y'\,\right\} - 4\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

da cui, ricordando che $\mathcal{L}\left\{\,t\,y'\,\right\} = -s\,Y'(s) - Y(s)$ *e tenendo conto delle condizioni iniziali,*

$$(s^2 - 6)\,Y(s) - 2\,s\,Y'(s) = \frac{1}{s}\,,$$

ossia

$$Y' + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)\,Y = -\,\frac{1}{2\,s^2}\,.$$

E' questa un'equazione del 1^o *ordine in forma normale con*

$$\alpha(s) = \int\left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)\,ds = 3\,\log\,s - \frac{s^2}{4}\,,\;\; e\;\; e^{\alpha(s)} = s^3\,e^{-\frac{s^2}{4}}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} Y(s) \quad &= \frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}\left[\int s^3\,e^{-\frac{s^2}{4}}\,\left(-\frac{1}{2\,s^2}\right)\,ds + c\right] = \\ &= \frac{1}{s^3} + \frac{c}{s^3}\,e^{\frac{s^2}{4}}\,. \end{aligned}$$

Poiché per la definizione di trasformata $\lim\limits_{s\to\infty} Y(s) = 0$, $c = 0$, *in quanto diversamente* $Y(s) \to \infty$ *per* $s \to 0$. *Di conseguenza*

$$Y(s) = \frac{1}{s^3}$$

da cui

$$y(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,.$$

Esercizio 4.4

1. *Risolvere il problema differenziale*

$$t\,y'' + (4\,t-2)\,y' - 4\,y = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Osserviamo subito che, essendo stata assegnata una sola condizione iniziale, il problema possiede ∞^1 *soluzioni dipendenti da una costante arbitraria. Tenuto conto della condizione* $y(0) = 1$ *e delle relazioni*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\,t\,y''(t)\,\right\} &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\left\{\,y''\,\right\} = -s^2 Y'(s) - 2\,s\,Y(s) + 1 \\ \mathcal{L}\left\{\,t\,y'(t)\,\right\} &= -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\left\{\,y'\,\right\} = -s\,Y'(s) - Y(s)\,, \end{aligned}$$

l'applicazione della trasformata di Laplace all'equazione differenziale genera l'equazione del 1^o *ordine*

$$Y' + \frac{4\,s+8}{s\,(s+4)}\,Y = \frac{3}{s\,(s+4)}\,.$$

Essendo $\quad \alpha(s) = \displaystyle\int \frac{4\,s+8}{s\,(s+4)}\,ds = log(s^2+4s)^2 \quad$ *e* $\quad e^{\alpha(s)} = (s^2+4s)^2\,,$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2(s+4)^2}\int s^2(s+4)^2\,\frac{3}{s\,(s+4)}\,ds = \\ \\ &= \frac{1}{s^2(s+4)^2}\left[3\left(\frac{s^3}{3}+2s^2\right)+c\right] = \\ &= \frac{s}{(s+4)^2} + \frac{6}{(s+4)^2} + \frac{c}{s^2(s+4)^2}\,, \end{aligned}$$

con c costante arbitraria. Decomponendo il primo e l'ultimo fattore in frazioni parziali si ottiene

$$Y(s) = \frac{1}{(s+4)} + \frac{2}{(s+4)^2} + c\left[-\frac{1}{32}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{s^2} + \frac{1}{32}\,\frac{1}{s+4} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{(s+4)^2}\right]$$

da cui, antitrasformando,

$$y(t) = e^{-4t} + 2\,t\,e^{-4t} + \frac{c}{32}\left[-1 + 2\,t + e^{-4t} + 2\,t\,e^{-4t}\right]\,.$$

Da notare che sia l'equazione differenziale che la condizione iniziale sono soddisfatte per qualsiasi valore di c. Il valore di c viene determinato se si impone una ulteriore condizione. Ad esempio, richiedendo che sia $y'(0) = -2$ *si trova* $c = 0$.

2. *Risolvere il seguente problema differenziale*

$$t\,y'' - (t+2)\,y' + 3\,y = t - 1\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

Essendo stata assegnata una sola condizione iniziale, il problema possiede ∞^1 *soluzioni dipendenti da una costante arbitraria.*

Applicando la trasformata di Laplace all'equazione differenziale e tenendo conto della condizione iniziale si ottiene

$$-2\,s\,Y - s^2\,Y' + Y + s\,Y' - 2\,s\,Y + 3\,Y = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

$$s\,(s-1)\,Y' + 4\,(s-1)\,Y = \frac{s-1}{s^2}$$

$$s\,Y' + 4\,Y = \frac{1}{s^2}$$

$$Y' + \frac{4}{s}\,Y = \frac{1}{s^3}$$

e, mediante la formula risolvente,

$$Y(s) = \frac{1}{s^4}\,\left[\int_0^s t^4\,\frac{1}{t^3}\,dt + c\right] = \frac{1}{s^4}\,\left(\frac{s^2}{2} + c\right) = \frac{1}{2s^2} + \frac{c}{s^4}\,.$$

Antitrasformando

$$y(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{6}\,c\,t^3\,, \qquad c \text{ costante arbitraria}\,.$$

3. *Risolvere il problema differenziale*

$$(t-1)\,y'' + (5-4\,t)\,y' - 4\,y = 0\,, \qquad y(0) = 1 \;\; y'(0) = 4\,.$$

Utilizzando la proprietà di derivazione della trasformata di Laplace e tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene

$$-s^2\,Y' - 2\,s\,Y + 1 - s^2 Y + s + 4 + 5\,(s\,Y - 1) + 4\,sY' + 4\,Y - 4\,Y = 0\,,$$

ossia

$$s\,(4-s)\,Y' + s\,(3-s)\,Y + s = 0$$

e dunque, in forma normale,

$$Y' + \frac{s-3}{s-4}\,Y = \frac{1}{s-4}\,, \qquad s > 4\,.$$

Per la formula risolvente[1]

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{e^{-s}}{s-4}\left[\int_0^s (t-4)\,e^t\,\frac{1}{t-4}\,dt + c\right] = \\ &= \frac{1}{s-4}\,(e^s - 1 + c) = \frac{1}{s-4} + \frac{c-1}{s-4}\,e^{-s} \end{aligned}$$

da cui, antitrasformando[2]*,*

$$y(t) = e^{4t} + (c-1)\,e^{4\,(t-1)}\,H(t-1)\,.$$

Di conseguenza $c = 1$, diversamente la $y(t)$ non sarebbe derivabile, e dunque

$$y(t) = e^{4t}\,.$$

4. *Risolvere il seguente problema differenziale*

$$y'' + 2\,y' + 2\,y = \delta(t-3)\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione e tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene

$$(s^2 + 2s + 2)\,Y(s) = e^{-3s}\,,$$

da cui

$$Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 2s + 2} = \frac{e^{-3s}}{(s+1)^2 + 1}\,.$$

Pertanto, poiché $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2+1}\right\} = e^{-t}\sin t\,,$

$$y(t) = H(t-3)\,e^{-(t-3)}\sin(t-3)\,.$$

La $y(t)$ è continua e derivabile per $t \geq 0$, ma la y' ha un salto di discontinuità pari a 1 in $t = 3$. L'ampiezza di tale salto è esattamente il coefficiente della $\delta(t-3)$ a secondo membro dell'equazione differenziale.

È utile notare che l'ambito corretto nel quale studiare le equazioni differenziali con la δ di Dirac è quello delle distribuzioni, la cui estensione esula dalle finalità di queste dispense.

Tuttavia, il procedimento indicato, sebbene non rigoroso, conduce esattamente agli stessi risultati ottenibili nell'ambito delle distribuzioni. Esso può dunque essere considerato in tal senso "sostanzialmente" corretto.

---

[1] $a(s) = 1 + \dfrac{1}{s-4}\,,\quad \alpha(s) = s + \log(s-4)$

$e^{-\alpha(s)} = e^{-s-\log(s-4)} = e^{\log\frac{1}{s-4}}\;e^{-s} = \dfrac{e^{-s}}{s-4}$

$e^{\alpha(s)} = (s-4)e^s\,.$

[2] $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s-4}\right\} = e^{-4}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-(s-4)}}{s-4}\right\} = e^{-4}\,e^{4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^s}{s}\right\} = e^{4(t-1)}\,H(t-1)\,.$

Esercizio 4.5

- $y'' + 4\,y' + 13\,y = 26\,e^{-4t}\,, \qquad y(0) = 5 \quad y'(0) = -29\,;$
- $y'' + 4\,y = e^{-t}\sin t\,, \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 4\,;$
- $y'' + 9\,y + 13\,y = H(t-\pi)\cos\,t\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,;$
- $y'' + 4\,t\,y' - 4\,y = 0\,, \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = -7\,;$
- $t\,y'' + (t-1)\,y' + y = 0\,, \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1\,;$
- $y'' - 4\,y' + 13\,y = 4\,\delta(t-3)\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$

Sistemi di equazioni differenziali. L'idea di base per la risoluzione dei sistemi è molto semplice: si tratta infatti di applicare la trasformata di Laplace al primo e secondo membro di ogni equazione e di incorporare le condizioni iniziali.

Esempio 4.14

$$\begin{cases} x'' - 2\,x' + 3\,y' + 2\,y = 4 \\ 2\,y' - x' + 3\,y = 0 \\ x(0) = x'(0) = y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ha

$$\begin{cases} s^2 X - 2\,s\,X + 3\,s\,Y + 2\,Y = \dfrac{4}{s} \\ 2\,s\,Y - s\,X + 3\,Y = 0 \end{cases}$$

dove $X = \mathcal{L}\{\,x\,\}$ *e* $Y = \mathcal{L}\{\,y\,\}$. *Ordinando opportunamente si ottiene il sistema*

$$\begin{cases} (s^2 - 2\,s)\,X + (3\,s+2)\,Y = \dfrac{4}{s} \\ -\,s\,X + (2\,s+3)\,Y = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{4\,s+6}{s^2(s+2)\,(s-1)} \\ Y(s) = \dfrac{2}{s\,(s+2)\,(s-1)}\,. \end{cases}$$

Mediante la tecnica delle frazioni parziali

$$\begin{cases} X(s) = -\dfrac{7}{2}\,\dfrac{1}{s} - 3\,\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{6}\,\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{10}{3}\,\dfrac{1}{s-1} \\ Y(s) = -\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

da cui, antitrasformando,

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{7}{2} - 3\,t + \dfrac{1}{6}\,e^{-2t} + \dfrac{10}{3}\,e^{t} \\ y(t) = -1 + \dfrac{1}{3}\,e^{-2t} + \dfrac{2}{3}\,e^{t}\,. \end{cases}$$

4.3 Convoluzione

Definizione 4.4 *Se f e g sono due funzioni definite in $[0,\infty)$, come pure la funzione $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$, allora si definisce convoluzione di f e g la funzione*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\,, \quad t \geq 0\,.$$

È immediato dimostrare che anche la convoluzione definita secondo la trasformata di Laplace gode della proprietà commutativa. Infatti,

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = -\int_t^0 f(z)g(t-z)\,dz = \\ &= \int_0^t g(t-z)f(z)\,dz = (g * f)(t)\,, \end{aligned}$$

dove si è posto $z = t - \tau$.

Teorema 4.3 *Se $\mathcal{L}\{\,f\,\} = F$ e $\mathcal{L}\{\,g\,\} = G$, vale la seguente relazione sul prodotto di convoluzione*

$$\mathcal{L}\{\,f * g\,\} = F(s)\,G(s)\,.$$

Tale relazione implica ovviamente che

$$\mathcal{L}^{-1}\{\,F\,G\,\} = (f * g)(t)\,.$$

Esempio 4.15 *Determinare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-4)^2}\right\}$.

Utilizzando il teorema della convoluzione si può scrivere

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-4)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\} =$$

$$= \ 1 \ * \ t\,e^{4t} \ =$$

$$= \int_0^t \tau\,e^{4\tau}\,d\tau = \left[\tau\,\frac{e^{4\tau}}{4}\right]_0^t - \int_0^t \frac{e^{4\tau}}{4}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{4}\right) e^{4t} + \frac{1}{16}\,.$$

Naturalmente, il risultato può essere ottenuto anche per altra via, in particolare decomponendo $\dfrac{1}{s(s-4)^2}$ *in frazioni parziali e calcolando le antitrasformate delle singole frazioni.*

Esercizio 4.6

1. *Calcolare* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{s^2+k^2}\,\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right\}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\,\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = \ \sin kt \ * \ \cos\omega t \ = \int_0^t \sin k(t-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^t \sin[kt+(\omega-k)\tau\,] + \sin[kt-(\omega+k)\tau\,]\,d\tau\right\} =$$

[nell'ipotesi che sia $\omega^2 \neq k^2$ *]*

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos[kt+(\omega-k)\tau\,]}{\omega-k} + \frac{\cos[kt-(\omega+k)\tau\,]}{\omega+k}\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos kt - \cos\omega t}{\omega-k} + \frac{\cos\omega t - \cos kt}{\omega+k}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{-(\omega+k)\,(\cos\omega t - \cos kt) + (\omega-k)\,(\cos\omega t - \cos kt)}{\omega^2-k^2} =$$

$$= \frac{k}{\omega^2-k^2}\,(\cos kt - \cos\omega t)\,.$$

Per $\omega^2 = k^2$ *si ha*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\ \frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \ \sin kt \ * \ \cos kt \ = \int_0^t \sin k(t-\tau)\cos k\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\,\sin kt + \sin(kt - 2k\tau\,)]\ d\tau =$$

$$= \frac{t}{2}\,\sin kt + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(kt-2k\tau)}{2k}\right]_0^t =$$

$$= \frac{t}{2}\,\sin kt\,.$$

Quest'ultimo risultato può anche essere ottenuto ricorrendo alla proprietà di derivazione di una trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\{\,t\,f(t)\,\} = -F'(s)\,.$$

Infatti, poiché

$$\frac{ks}{(s^2+k^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)'\,,$$

si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{ks}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{t}{2}\,\sin kt\,.$$

2. *Indicata con* $f(t)$ *una funzione integrabile in* $[0,\infty)$*, risolvere il problema differenziale*

$$y'' - 2\,y' - 8\,y = f(t)\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

Uguagliando la trasformata di Laplace di primo e secondo membro e tenendo conto delle condizioni iniziali si ha

$$(s^2 - 2\,s - 8)\,Y(s) = F(s) + s - 2$$

da cui, essendo $s^2 - 2\,s - 8 = (s+2)\,(s-4)$*, segue che*

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s+2)\,(s-4)} + \frac{s-2}{(s+2)\,(s-4)}\,,$$

e infine, mediante la tecnica delle frazioni parziali,

$$Y(s) = \frac{1}{6}\,\frac{F(s)}{s-4} \ - \ \frac{1}{6}\,\frac{F(s)}{s+2} \ + \ \frac{1}{3}\,\frac{1}{s-4} \ + \ \frac{2}{3}\,\frac{1}{s+2}\,.$$

Per il teorema della convoluzione si ha dunque che

$$y(t) = \frac{1}{6}\ f(t) * e^{4t}\ -\ \frac{1}{6}\, f(t) * e^{-2\,t}\ +\ \frac{1}{3}\, e^{4t}\ +\ \frac{2}{3}\, e^{-2t}\,.$$

Se, per esempio, $f(t) = t\,,$ *per* $t \geq 0\,,$ *si ha*

$$f(t) * e^{4t} = \int_0^t (t-\tau)\, e^{4\tau}\, d\tau = -\frac{t}{4} + \frac{1}{16}\,(e^{4t} - 1)$$
$$f(t) * e^{-2t} = \int_0^t (t-\tau)\, e^{-2\tau}\, d\tau = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\,(e^{-2t} - 1)\,.$$

e, di conseguenza,

$$y(t) = \frac{1}{32}\ \left(11\, e^{4t} + 20\, e^{-2\,t} - 4\,t + 1\right)\ .$$

3. *Risolvere l'equazione*

$$y'' + k^2 y = a\ \cos\omega t\,, \quad t \geq 0\,, \quad y(0) = \alpha \ \ y'(0) = \beta\,,$$

nell'ipotesi $k^2 \neq \omega^2$ *.*

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione e tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene

$$s^2\, Y - s\,\alpha - \beta + k^2 Y = a\ \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$(s^2 + k^2)\, Y = \alpha s + \beta + a\, \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y = \alpha\, \frac{s}{s^2 + k^2} + \frac{\beta}{s^2 + k^2} + \frac{a}{k}\ \frac{k}{s^2 + k^2}\ \frac{s}{s^2 + \omega^2}\,.$$

Antitrasformando

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha \cos kt + \frac{\beta}{k} \sin kt + \frac{a}{k} \sin kt\ *\ \cos\omega t = \\ &= \alpha \cos kt + \frac{\beta}{k} \sin kt + \frac{a}{\omega^2 - k^2}\,(\cos kt - \cos\omega t)\,, \end{aligned}$$

dove $\sin kt\ *\ \cos\omega t = \dfrac{k}{\omega^2 - k^2}\,(\cos kt - \cos\omega t)$ *per l'esercizio precedente.*