Prima prova intermedia - Soluzione

Esercizio 1

Risolvere nel piano complesso l'equazione:

$$(z-i)^6 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$$

Soluzione. *Normalizzando il numero al secondo termine si ha:*

$$\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = i$$

Elevando al cubo, $i^3 = i \cdot i \cdot i = -i = e^{\frac{3}{2}\pi i}$. *Le radici seste si ricavano immediatamente:*

$$z - i = (-i)^{\frac{1}{6}} = e^{\frac{\frac{3}{2}\pi i + 2k\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi}{4}i + k\frac{\pi}{3}i} = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{4}i} & k=0; \\ e^{\frac{7\pi}{12}i} & k=1; \\ e^{\frac{11\pi}{12}i} & k=2; \\ e^{\frac{15\pi}{12}i} & k=3; \\ e^{\frac{19\pi}{12}i} & k=4; \\ e^{\frac{23\pi}{12}i} & k=5. \end{cases}$$

Ovvero:

$$z = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{4}i}+i & k=0; \\ e^{\frac{7\pi}{12}i}+i & k=1; \\ e^{\frac{11\pi}{12}i}+i & k=2; \\ e^{\frac{15\pi}{12}i}+i & k=3; \\ e^{\frac{19\pi}{12}i}+i & k=4; \\ e^{\frac{23\pi}{12}i}+i & k=5. \end{cases}$$

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Laurent, centrata nel punto indicato, la funzione $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$. Si suggerisce di far ricorso allo sviluppo in serie di Taylor di $\cos(\pi z)$ con punto iniziale $z_0 = 1$.

Soluzione. *È possibile sviluppare* $\cos(\pi z)$*, che è analitica, in serie di Taylor, e poi moltiplicare per il fattore* $(z-1)^{-3}$*, che è un polo triplo in* $z = 1$*, ed è già nella forma* $(z-z_0)^k$*, con* z_0 *punto iniziale della serie di Laurent. La serie di Taylor del* $\cos$ *si può calcolare tramite le derivate, oppure osservando che:*

$$\cos(\pi z) = \cos(\pi(z-1)+\pi) = \cos(\pi(z-1))\cos(\pi) - \sin(\pi(z-1))\sin(\pi) = -\cos(\pi(z-1))$$

Ricordando lo sviluppo di $\cos(z)$*:*

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

si ha

$$-\cos(\pi(z-1)) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\pi(z-1)^{2n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}}{(2n)!} (z-1)^{2n}$$

Moltiplicando per il fattore $(z-1)^{-3}$*:*

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}}{(2n)!} (z-1)^{2n-3}$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{(\cos z - 1)\log(1+z)}\, dz$$

dove $\mathcal{C}$ è la circonferenza di equazione $|z| = 1/2$.

Soluzione. *Le singolarità della funzione si hanno nei punti di non analiticità della funzione. I punti di singolarità della funzione sono:*

- $z = -1$*, punto di diramazione del* $\log(1+z)$*;*
- $z = 2k\pi$*, punto in cui* $\cos z = 1$*;*
- $z = 0$*, in cui* $\log(1+z) = 0$

Solo $z = 0$ *è all'interno del percorso di integrazione, e in tale punto sia* $\cos z - 1$ *che* $\log(1+z)$ *si annullano. Quindi*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{(\cos z - 1)\log(1+z)}\, dz = 2\pi i Res(0)$$

Per studiare l'andamento della funzione in $z = 0$*, si può utilizzare uno sviluppo di Taylor dei termini* $(\cos z - 1)$ *e* $\log(1+z)$*:*

$$\cos z - 1 = 1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4) - 1 = -\frac{z^2}{2} + O(z^4) \simeq -\frac{z^2}{2}$$

$$\log(1+z) = z + O(z^2) \simeq z$$

da cui

$$f(z) \simeq \frac{z^2}{-\frac{z^2}{2} \cdot z} = -\frac{2}{z}$$

Per cui $z = 0$ è un polo semplice, e

$$Res(0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = -2$$

L'integrale vale

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{(\cos z - 1) \log(1 + z)} \, dz = 2\pi i Res(0) = -4\pi i$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos\theta} \, d\theta$$

Soluzione. *Dato che:*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta + e^{-i\theta}}}{2}$$

con la sostituzione $z = e^{i\theta}$ si ottiene:

$$\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \\ \cos 2\theta = \frac{z^2+z^{-2}}{2} \\ d\theta = -iz^{-1} \, dz \end{array}$$

Il dominio di integrazione in campo complesso diviene ovviamente $|z| = 1$. Si ha, sostituendo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos\theta} \, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{2 - \frac{z+z^{-1}}{2}} (-iz^{-1}) \, dz = i \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 - 4z + 1)} \, dz$$

La funzione è il rapporto di due polinomi, è sempre analitica tranne nei punti in cui si annulla il denominatore. Questo avviene in $z = 0$ (polo doppio), e $z = 2 \pm \sqrt{3}$ (due poli semplici). Di questi, solo $z = 0$ e $z = 2 - \sqrt{3}$ sono interni al percorso di integrazione. I corrispondenti residui sono:

$$Res(0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 + 1}{z^2 - 4z + 1} = \lim_{z \to 0} \frac{4z^3(z^2 - 4z + 1) - (z^4 + 1)(2z - 4)}{(z^2 - 4z + 1)^2} = 4$$

$$Res(2 - \sqrt{3}) = \lim_{z \to 2-\sqrt{3}} \frac{z^4 + 1}{z^2(z - 2 - \sqrt{3})} = -\frac{(2 - \sqrt{3}))^4 + 1}{2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^2}$$

Quindi l'integrale risulta essere:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2-\cos\theta}\,d\theta = i\oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(z^2-4z+1)}\,dz = -2\pi(Res(0)+Res(2-\sqrt{3})) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{(2-\sqrt{3})^4+1}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^2} - 4\right)$$

Esercizio 5

Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$$

Soluzione. *La $f(x)$ per $x \to \infty$ è una funzione $O(\frac{1}{R^2})$, per cui è possibile calcolare tale integrale considerando una funzione di variabile complessa $f(z)$, e integrarla nel percorso chiuso $\mathcal{C}$ costituito dall'asse reale e dalla semicirconferenza $R \to \infty$ estesa sulla parte del piano complesso in cui $Im(z) > 0$. Si ha così:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz$$

La funzione $f(z)$ ha quattro poli semplici nei punti in cui $z^4+1=0$, ovvero:

$$z = (-1)^{1/4} = e^{\frac{\pi}{4}i + k\frac{\pi}{2}i} = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{4}i} & k=0; \\ e^{\frac{3\pi}{4}i} & k=1; \\ e^{\frac{5\pi}{4}i} & k=2; \\ e^{\frac{7\pi}{4}i} & k=3. \end{cases}$$

Solo i primi due poli sono nel semipiano con $Im(z) > 0$, per cui:

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i(Res(e^{\frac{\pi}{4}i}) + Res(e^{\frac{3\pi}{4}i}))$$

Calcolando i residui:

$$Res(e^{\frac{\pi}{4}i}) = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}} (z-e^{\frac{\pi}{4}i})\frac{z^2+1}{z^4+1} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{z^2+1+2z(z-e^{\frac{\pi}{4}i})}{4z^3} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}+1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}$$

dove nel secondo passaggio si è utilizzato il teorema di De l'Hospital. Analogamente,

$$Res(e^{\frac{3\pi}{4}i}) = \lim_{z\to e^{\frac{3\pi}{4}i}} (z-e^{\frac{3\pi}{4}i})\frac{z^2+1}{z^4+1} = \lim_{z\to e^{\frac{3\pi}{4}i}} \frac{z^2+1+2z(z-e^{\frac{3\pi}{4}i})}{4z^3} = \frac{e^{\frac{3\pi}{2}i}+1}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}$$

Per cui, in conclusione:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(2\frac{-i}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\pi$$