Seconda prova intermedia - Soluzione

Esercizio 1

Calcolare la serie di Fourier della funzione periodica

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(5+x), & -3 \le x < -1; \\ 2, & -1 \le x < 1; \\ \frac{1}{2}(5-x), & 1 \le x < 3. \end{cases}$$

Soluzione. *Si tratta di una funzione pari, ovvero simmetrica rispetto all'origine. Per questo motivo, i coefficienti b_k saranno pari a zero.*

Occorre calcolare i coefficienti a_0 ed a_k. Dal momento che la funzione è pari, si può utilizzare la forma semplificata degli integrali di a_0 e a_k, moltiplicando per due l'integrale su metà periodo.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos k\omega x\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos k\omega x\,dx$$

Facendo i calcoli (dato che $T = 6$) si ha:

$$a_0 = \frac{2}{6}\left[\int_0^1 2\,dx + \frac{1}{2}\int_1^3 (5-x)\,dx\right] = \frac{5}{3}$$

e

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{6}\left[\int_0^1 2\cos\frac{k\pi}{3}x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^3 5\cos\frac{k\pi}{3}x\,dx - \frac{1}{2}\int_1^3 x\cos\frac{k\pi}{3}x\,dx\right] = \\
&= \frac{2}{3}\left[\left[2\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{3}x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[5\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{3}x\right]_1^3 + \right. \\
&\left. -\frac{1}{2}\left(\left[x\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{3}x\right]_1^3 + \left[\left(\frac{3}{k\pi}\right)^2\cos\frac{k\pi}{3}x\right]_1^3\right)\right] = \\
&= \frac{2}{3}\left[\left(2 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{k\pi}\right)^2\left(\cos k\pi - \cos\frac{k\pi}{3}\right)\right] = \\
&= \frac{-3}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - \cos\frac{k\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Per cui, in definitiva:

$$f(x) = \frac{5}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-3}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - \cos\frac{k\pi}{3}\right)\cos\frac{k\pi}{3}x$$

Esercizio 2

Calcolare la seguente trasformata e antitrasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-3|x|}(3\cos 2x + \sin 2x)\right\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5}{(4+ik)(2-ik)}\right\}$$

Soluzione. *Per la trasformata è sufficiente utilizzare le regole di modulazione:*

$$\mathcal{F}\left\{f(x)\cos\omega_0 x\right\} = \frac{1}{2}(F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0))$$

$$\mathcal{F}\left\{f(x)\sin\omega_0 x\right\} = \frac{1}{2i}(F(\omega-\omega_0) - F(\omega+\omega_0))$$

Dato che

$$\mathcal{F}\left\{e^{-3|x|}\right\} = \frac{6}{9+\omega^2}$$

si ha che

$$F(\omega) = \frac{9-3i}{9+(\omega-2)^2} + \frac{9+3i}{9+(\omega+2)^2}$$

Per l'antitrasformata, è possibile scomporre in fratti semplici

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5}{(4+i\omega)(2-i\omega)}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5/6}{4+i\omega} + \frac{5/6}{2-i\omega}\right\}$$

e ricordando che

$$\mathcal{F}\{e^{-ax}H(x)\} = \frac{1}{a+i\omega}, \qquad a>0$$

$$\mathcal{F}\{e^{ax}H(-x)\} = \frac{1}{a-i\omega}, \qquad a>0$$

si ottiene:

$$f(x) = \frac{5}{6}\left(e^{-4x}H(x) + e^{2x}H(-x)\right)$$

Esercizio 3

Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$y'' + 4y' - 12y = f(x),$$

essendo

$$f(x) = \frac{1}{2}[H(x+1) - H(x-1)]$$

Soluzione. *Trasformando primo e secondo membro dell'equazione:*

$$((i\omega)^2 + 4(i\omega) - 12)Y(\omega) = F(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega}$$

ovvero, scomponendo il denominatore nei suoi fattori semplici:

$$Y(\omega) = \frac{i\sin\omega}{(\imath\omega)((i\omega)^2 + 4(i\omega) - 12)} = \frac{i\sin\omega}{(\imath\omega)(i\omega+6)(i\omega-2)}$$

Scomponendo in fratti semplici:

$$Y(\omega) = i\sin\omega\left(\frac{-1}{12}\frac{1}{i\omega} + \frac{1}{48}\frac{1}{i\omega+6} - \frac{1}{16}\frac{1}{2-i\omega}\right) = \frac{-1}{12}\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{1}{48}\frac{i\sin\omega}{i\omega+6} - \frac{1}{16}\frac{i\sin\omega}{2-i\omega}$$

Antitrasformando i tre termini:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin\omega}{\omega}\right\} = \frac{1}{2}\left(H(x+1) - H(x-1)\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i\sin\omega}{i\omega+6}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{i\omega}}{i\omega+6} - \frac{e^{-i\omega}}{i\omega+6}\right\} = \frac{1}{2}e^{-6(x+1)}H(x+1) - \frac{1}{2}e^{-6(x-1)}H(x-1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i\sin\omega}{2-i\omega}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{i\omega}}{2-i\omega} - \frac{e^{-i\omega}}{2-i\omega}\right\} = \frac{1}{2}e^{2(x+1)}H(-x-1) - \frac{1}{2}e^{2(x-1)}H(-x+1)$$

Per cui

$$\begin{aligned} y(x) = &-\frac{1}{24}\left(H(x+1) - H(x-1)\right) + \frac{1}{96}e^{-6(x+1)}H(x+1) - \frac{1}{96}e^{-6(x-1)}H(x-1) + \\ &-\frac{1}{32}e^{2(x+1)}H(-x-1) + \frac{1}{32}e^{2(x-1)}H(-x+1) \end{aligned}$$

Esercizio 4

Calcolare la seguente trasformata e antitrasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{[t(H(t-2))] * [(t^2+1)H(t-1)]\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{s+1}{s^2(s^2+2)}\right\}$$

Soluzione. *Per la trasformata si utilizza la regola della convoluzione nel tempo:*

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = F(s)G(s)$$

Per cui occorre trovare le trasformate delle due funzioni da convolvere:

$$\mathcal{L}\left\{tH(t-2)\right\} = \mathcal{L}\left\{(t-2)H(t-2)\right\} + \mathcal{L}\left\{2H(t-2)\right\} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)$$

Analogamente

$$\mathcal{L}\left\{(t^2+1)H(t-1)\right\} = \mathcal{L}\left\{(t-1)^2H(t-1)\right\} + \mathcal{L}\left\{2(t-1)H(t-1)\right\} + \mathcal{L}\left\{2H(t-1)\right\} = \\ = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

Per cui il risultato è

$$F(s) = 2e^{-3s}\left(\frac{1}{s^5}+\frac{3}{s^4}+\frac{3}{s^3}+\frac{2}{s^2}\right)$$

Per quel che riguarda l'antitrasformata, si scompone in fratti semplici (ad esempio con il metodo dei residui):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{s+1}{s^2(s^2+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)\right\}$$

L'esponenziale si traduce in una traslazione nel dominio del tempo, per cui:

$$f(t) = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(t-2)-\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}(t-2)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}(t-2)\right]H(t-2)$$

Esercizio 5

Risolvere, mediante l'utilizzo della trasformata di Laplace, la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y'' - (\sqrt{3}+1)y' + \sqrt{3}y = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

essendo

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 3; \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

Soluzione. *Trasformando:*

$$Y(s)(s^2-(\sqrt{3}+1)s+\sqrt{3}) = F(s)$$

$F(s)$ dovrebbe essere la trasformata di $t^2(H(t)-H(t-3))$. Dal momento che risolvere i calcoli completamente nel dominio di Laplace porta a dei calcoli un po' lunghi, è possibile tenere conto del termine noto direttamente nel dominio del tempo, tramite un integrale di convoluzione. Scomponendo in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left(\frac{1}{s-\sqrt{3}}-\frac{1}{s-1}\right)F(s)$$

Tornando nel dominio del tempo:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left[\left(e^{\sqrt{3}t} - e^{t}\right) H(t) * f(t)\right]$$

Sostituendo la $f(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\int_0^3 \tau^2 \left(e^{\sqrt{3}(t-\tau)} - e^{t-\tau}\right) H(t-\tau)\, d\tau$$

dove gli estremi dell'integrale sono dati dal fatto che $f(t) = 0$ fuori dall'intervallo $0 \leq t < 3$. Perché l'integranda sia diversa da 0, dev'essere $H(t-\tau) \neq 0$, ovvero $\tau < t$, per cui si distinguono tre casi:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{3}-1}\int_0^t \tau^2 \left(e^{\sqrt{3}(t-\tau)} - e^{t-\tau}\right) d\tau, & 0 \leq t < 3; \\ \frac{1}{\sqrt{3}-1}\int_0^3 \tau^2 \left(e^{\sqrt{3}(t-\tau)} - e^{t-\tau}\right) d\tau, & t \geq 3. \end{cases}$$

ovvero:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left(e^{\sqrt{3}t}\int_0^t \tau^2 e^{-\sqrt{3}\tau}\, d\tau - e^t \int_0^t \tau^2 e^{-\tau}\, d\tau\right), & 0 \leq t < 3; \\ \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left(e^{\sqrt{3}t}\int_0^3 \tau^2 e^{-\sqrt{3}\tau}\, d\tau - e^t \int_0^3 \tau^2 e^{-\tau}\, d\tau\right), & t \geq 3. \end{cases}$$

Ora, si può calcolare in modo generico l'integrale

$$\int_0^t x^2 e^{-\alpha x}\, dx = \frac{2}{\alpha^3} - e^{-\alpha t}\left[\frac{t^2}{\alpha} + \frac{2t}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right]$$

che avrà per α i valori $\sqrt{3}$ ed 1, mentre nell'ultimo caso si dovrà porre $t = 3$. Per cui, si ha:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left[\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t} + 2e^t - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{2+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)\right], & 0 \leq t < 3; \\ \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left[\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t} + 2e^t - e^{\sqrt{3}(t-3)}\left(\frac{9}{\sqrt{3}} + 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) - 16e^{t-3}\right], & t \geq 3. \end{cases}$$