Recupero prima prova intermedia - Soluzione

Esercizio 1

Risolvere nel piano complesso l'equazione:

$$z^4 + i - 1 = 0$$

Soluzione.

$$z^4 = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

Le radici quarte si ricavano immediatamente:

$$z = \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{4}} = \sqrt[8]{2}\, e^{i(\frac{7}{16}+\frac{k}{2})\pi} = \begin{cases} \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{7}{16}\pi} & k=0; \\ \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{15}{16}\pi} & k=1; \\ \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{23}{16}\pi} & k=2; \\ \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{31}{16}\pi} & k=3; \end{cases}$$

Esercizio 2

Calcolare i coefficienti a_{-1} e a_0 nello sviluppo in serie di Laurent di

$$f(z) = \frac{z}{z^2+2}$$

in un intorno di $z_0 = i\sqrt{2}$.

Soluzione. *Un metodo per risolvere l'esercizio è usare la formula*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

con $\mathcal{C}$ curva semplice che include $i\sqrt{2}$.

Per $n=-1$ si ha:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2+2}\, dz = Res(f(z))(i\sqrt{2})$$

$$Res(f(z))(i\sqrt{2}) = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{z(z-i\sqrt{2})}{(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})} = \frac{1}{2}$$

Mentre per $n=0$ si ha:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{(z^2+2)(z-i\sqrt{2})}\, dz = Res\left(\frac{f(z)}{z-i\sqrt{2}}\right)(i\sqrt{2})$$

$$Res\left(\frac{f(z)}{z-i\sqrt{2}}\right)(i\sqrt{2}) = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\frac{z(z-i\sqrt{2})^2}{(z-i\sqrt{2})^2(z+i\sqrt{2})} = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{(z+i\sqrt{2})-z}{(z+i\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4i\sqrt{2}}$$

Un altro metodo per risolvere l'esercizio è quello di sviluppare in serie di Laurent.

$$f(z) = \frac{z}{z^2+2} = \frac{1/2}{z-i\sqrt{2}} + \frac{1/2}{z+i\sqrt{2}}$$

Il primo addendo è già centrato, per il secondo basta qualche semplice passaggio:

$$\frac{1}{z+i\sqrt{2}} = \frac{1}{(z-i\sqrt{2})+2i\sqrt{2}} = \frac{1}{2i\sqrt{2}\left(1+\frac{z-i\sqrt{2}}{2i\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2i\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i\sqrt{2}}{2i\sqrt{2}}\right)^n$$

La serie completa è

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-i\sqrt{2}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2i\sqrt{2}}\right)^{n+1}(z-i\sqrt{2})^n\right]$$

Quindi $a_{-1} = 1/2$ *ed* $a_0 = 1/(4i\sqrt{2})$

Esercizio 3

Calcolare

$$\oint_{\mathcal{C}} (z^2 - |z|^2)\, dz$$

essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza (orientata in senso antiorario) di equazione $|z| = 4$.

Soluzione. *La funzione non è analitica in quanto non sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann.*

$$f(z) = z^2 - |z|^2 = x^2 + i2xy - y^2 - x^2 - y^2 = -2y^2 + i2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

Non è quindi detto che l'integrale sia nullo.
Per calcolarlo si considera che $z = 4e^{i\theta}$ *con* $0 \le \theta \le 2\pi$*:*

$$\oint_{\mathcal{C}} (z^2 - |z|^2)\, dz = \int_0^{2\pi}\left(16e^{i2\theta} - 16\right)4e^{i\theta} i\, d\theta =$$

$$= i64\int_0^{2\pi}\left(e^{i3\theta} - e^{i\theta}\right) d\theta = i64\left[\frac{e^{i3\theta}}{i3} - \frac{e^{i\theta}}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Esercizio 4

Calcolare
$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{(1-z)^2}{z^3-8}\,dz$$
essendo $\mathcal{C}$ una curva semplice e regolare, contenente al suo interno tutte le singolarità della funzione integranda.

Soluzione. *Le singolarità sono date da* $z^3 - 8 = 0$.

Quindi $z = \sqrt[3]{8} = 2e^{i2k\pi/3}$ *con* $k = 0, 1, 2$.

Si hanno perciò tre poli singoli:
$$\begin{cases} z_0 = 2 \\ z_1 = 2e^{i2\pi/3} = -1 + i\sqrt{3} \\ z_2 = 2e^{i4\pi/3} = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

con residui:
$$Res(z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{(1-z)^2(z-z_k)}{z^3-8} = \lim_{z\to z_k} \frac{-2(1-z)(z-z_k)+(1-z)^2}{3z^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-z_k}{z_k}\right)^2$$
$$Res(2) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-2}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$
$$Res(-1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{(2-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{1+3}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{-2-3-i\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{25-3+i10\sqrt{3}}{48} = \frac{11+i5\sqrt{3}}{24}$$
$$Res(-1-i\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{(2+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{1+3}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{-2-3+i\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{25-3-i10\sqrt{3}}{48} = \frac{11-i5\sqrt{3}}{24}$$

Infine:
$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{(1-z)^2}{z^3-8}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{12} + \frac{11+i5\sqrt{3}}{24} + \frac{11-i5\sqrt{3}}{24}\right) = 2\pi i$$

Esercizio 5

Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} + \cos\theta}$$

Soluzione. *Dato che:*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

con la sostituzione $z = e^{i\theta}$ *si ottiene:*

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

e

$$d\theta = -iz^{-1}\, dz$$

Il dominio di integrazione in campo complesso diviene ovviamente $|z| = 1$*. Sostituendo si ha:*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} + \cos\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{-iz^{-1}\, dz}{\sqrt{5} + \frac{z+z^{-1}}{2}} = -i2 \oint_{|z|=1} \frac{z^{-1}\, dz}{2\sqrt{5} + z + z^{-1}} =$$

$$= -i2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\sqrt{5}z + 1}$$

Le singolarità sono date da $z^2 + 2\sqrt{5}z + 1 = 0$*.*

Quindi $z = -\sqrt{5} \mp \sqrt{5-1} = -\sqrt{5} \mp 2$*.*

Soltanto il polo $z = -\sqrt{5}+2$ *cade all'interno del cerchio unitario, perciò:*

$$I = 2\pi i(-i2Res(-\sqrt{5}+2)) = 4\pi \lim_{z\to-\sqrt{5}+2} \frac{z + \sqrt{5} - 2}{(z + \sqrt{5} - 2)(z + \sqrt{5} + 2)} = 4\pi\frac{1}{4} = \pi$$