Recupero seconda prova intermedia - Soluzione

Esercizio 1

Calcolare la serie di Fourier della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -(2+x) & -2 \leq x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Soluzione. *Dalla definizione della funzione si vede che $T = 4$ quindi $\omega = \pi/2$. Poiché la funzione è dispari ($f(x) = -f(-x)$) si ha che $a_0 = 0$ ed $a_n = 0$ perció si deve calcolare il solo termine b_k:*

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin k\frac{\pi}{2}x\,dx = \int_0^1 \sin k\frac{\pi}{2}x\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin k\frac{\pi}{2}x\,dx =$$

$$= -\frac{\cos k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\bigg|_0^1 + \int_1^2 (2-x)d\left(-\frac{\cos k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{\cos(k\pi/2)-1}{-k\pi/2} + (2-x)\frac{\cos k\frac{\pi}{2}x}{-k\pi/2}\bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{\cos k\frac{\pi}{2}x}{-k\pi/2}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left\{\cos(k\pi/2) - 1 + 0 - \cos(k\pi/2) + \frac{\sin k\frac{\pi}{2}x}{k\pi/2}\bigg|_1^2\right\} =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left\{1 - \frac{0-\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}\right\} = \frac{2}{k\pi}\left\{1 + \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right\}$$

La serie di Fourier è quindi:

$$f(x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left\{1 + \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right\}\sin\frac{k\pi}{2}x$$

Esercizio 2

Calcolare

$$\mathcal{F}\{xe^{-2x}H(x-1)\}.$$

Soluzione. *Si puó sfruttare la proprietà $\mathcal{F}\{tf(t)\} = iF'(\omega)$.*

Poiché:

$$F(k) = \mathcal{F}\{e^{-2x}H(x-1)\} = \mathcal{F}\{e^{-2}e^{-2(x-1)}H(x-1)\} = e^{-2}\frac{e^{-ik}}{2+ik} = \frac{e^{-(2+ik)}}{2+ik}$$

derivando:

$$F'(k) = \frac{-ie^{-(2+ik)}(2+ik) - e^{-(2+ik)}i}{(2+ik)^2} = -ie^{-(2+ik)}\frac{3+ik}{(2+ik)^2}$$

perció la trasformata vale:

$$\mathcal{F}\{xe^{-2x}H(x-1)\} = \frac{3+ik}{(2+ik)^2}e^{-(2+ik)}$$

Esercizio 3

Risolvere, facendo uso della trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$y'' + \sqrt{5}y' - 10y = \delta(x-1)$$

Suggerimento: ricordare che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-\alpha)\,dx = f(\alpha)$.

Soluzione. *Trasformando l'equazione:*

$$\left[(ik)^2 + \sqrt{5}(ik) - 10\right]Y(k) = e^{-ik}$$

scomponendo il denominatore:

$$Y(k) = \frac{e^{-ik}}{(ik)^2 + \sqrt{5}(ik) - 10} = \frac{e^{-ik}}{(ik-\sqrt{5})(ik+2\sqrt{5})} = \left[\frac{1/(3\sqrt{5})}{ik-\sqrt{5}} - \frac{1/(3\sqrt{5})}{ik+2\sqrt{5}}\right]e^{-ik}$$

antitrasformando:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{ik-\sqrt{5}} - \frac{1}{ik+2\sqrt{5}}\right\} = -e^{\sqrt{5}x}H(-x) - e^{-2\sqrt{5}x}H(x)$$

ricordando la proprietà $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-it_0\omega}F(\omega)$ si ha che la soluzione dell'equazione è:

$$y(x) = -\frac{1}{3\sqrt{5}}\left[e^{\sqrt{5}(x-1)}H(1-x) + e^{-2\sqrt{5}(x-1)}H(x-1)\right]$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\sqrt{3}s}\frac{s^2+1}{(s-1)^2(s-2)(s-3)}\right\}.$$

Suggerimento: ricordare che $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\alpha s}F(s)\} = f(t-\alpha)H(t-\alpha)$.

Soluzione. *Considerando il suggerimento si può antitrasformare* $\frac{s^2+1}{(s-1)^2(s-2)(s-3)}$ *e traslare nel dominio del tempo di* $\sqrt{3}$.

Il metodo più semplice è scomporre in fratti semplici e poi antitrasformare.

$$A = \lim_{s\to 1} \frac{s^2+1}{(s-2)(s-3)} = 1$$

$$Res(1) = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds} \frac{s^2+1}{(s-2)(s-3)} = \lim_{s\to 1} \frac{2s(s-2)(s-3)-(s^2+1)(2s-5)}{(s-2)^2(s-3)^2} = \frac{5}{2}$$

$$Res(2) = \lim_{s\to 2} \frac{s^2+1}{(s-1)^2(s-3)} = -5$$

$$Res(3) = \lim_{s\to 3} \frac{s^2+1}{(s-1)^2(s-2)} = \frac{5}{2}$$

Si può scrivere

$$\frac{s^2+1}{(s-1)^2(s-2)(s-3)} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{5/2}{s-1} + \frac{-5}{s-2} + \frac{5/2}{s-3}$$

antitrasformando

$$te^t + \frac{5}{2}e^t - 5e^{2t} + \frac{5}{2}e^{3t}$$

infine traslando:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{(s^2+1)e^{-\sqrt{3}s}}{(s-1)^2(s-2)(s-3)} \right\} = \left[(t-\sqrt{3})e^{t-\sqrt{3}} + \frac{5}{2}e^{t-\sqrt{3}} - 5e^{2(t-\sqrt{3})} + \frac{5}{2}e^{3(t-\sqrt{3})} \right] H(t-\sqrt{3})$$

Esercizio 5

Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Laplace, l'equazione

$$y'' - \frac{1}{5}y' + y = H(t-1) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Soluzione. *Trasformando l'equazione:*

$$\left(s^2 - \frac{1}{5}s + 1\right) Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

considerando che $s^2 - \frac{1}{5}s + 1$ *non ha radici reali si ha:*

$$s^2 - \frac{1}{5}s + 1 = \left(s - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{99}{100}$$

e si può scrivere:

$$Y(s) = \left[\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{\left(s - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{99}{100}}\right] e^{-s}$$

dove

$$A = Res(0) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 - \frac{1}{5}s + 1} = 1$$

ed eguagliando i due membri

$$1 = s^2 - \frac{1}{5}s + 1 + Bs^2 + Cs$$

si ottiene $B = -1$ *e* $C = 1/5$, *e sostituendo si ha:*

$$Y(s) = \left[\frac{1}{s} + \frac{-s + 1/5}{\left(s - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{99}{100}}\right] e^{-s} =$$

$$= \left[\frac{1}{s} - \frac{s - 1/10}{\left(s - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{99}{100}} + \frac{1}{10\sqrt{99/100}} \frac{\sqrt{99/100}}{\left(s - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{99}{100}}\right] e^{-s}$$

antitrasformando si ottiene la soluzione dell'equazione:

$$y(t) = \left\{1 - e^{\frac{t-1}{10}} \cos \frac{3\sqrt{11}}{10}(t-1) + \frac{1}{3\sqrt{11}} e^{\frac{t-1}{10}} \sin \frac{3\sqrt{11}}{10}(t-1)\right\} H(t-1)$$