

Cartometria sulla carta di Gauss

di Michele T. Mazzucato

Operazioni di misura cartometriche sulla rappresentazione analitica conforme di Gauss base della cartografia ufficiale nazionale edita dall'Istituto Geografico Militare Italiano IGMI nonché del sistema cartografico internazionale UTM.

Strane cose accadono nella Terra di Oz.

Policroma (figlia danzante di Arcobaleno)

in *The Tin Woodman of Oz* (1918) di Frank Lyman Baum (1856-1919)

Nello scritto viene sviluppata una procedura di calcolo della distanza tra due punti appartenenti allo stesso fuso della rappresentazione analitica conforme di Gauss.

Quale elemento cartografico prendiamo una carta topografica alla scala di 1:25000 prodotta dall'Istituto Geografico Militare Italiano IGMI. In particolare, una tavoletta di orientamento S.O. con denominazione S. Lucia del quadrante I appartenente al foglio 195 della Carta d'Italia, serie M 891, edizione 1/1962 (Fig. 1).

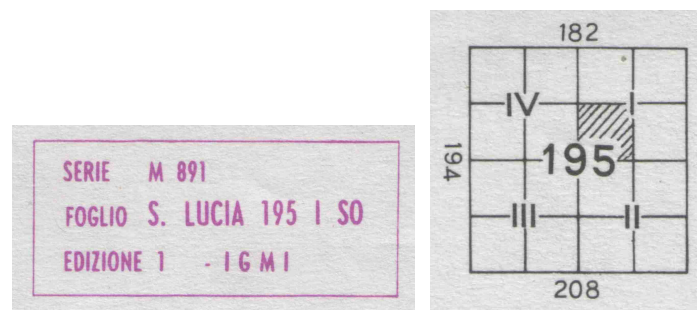


Fig. 1 - Elementi identificativi dell'elemento cartografico (carta topografica).

Distanza e azimuth cartografico

A) Come primo esempio si procede al calcolo della distanza D e dell'azimut cartografico θ tra i due punti posizionati sugli incroci del reticolato chilometrico UTM e individuati con le lettere A e B sullo spezzone interessato del suddetto elemento cartografico (Fig. 2).

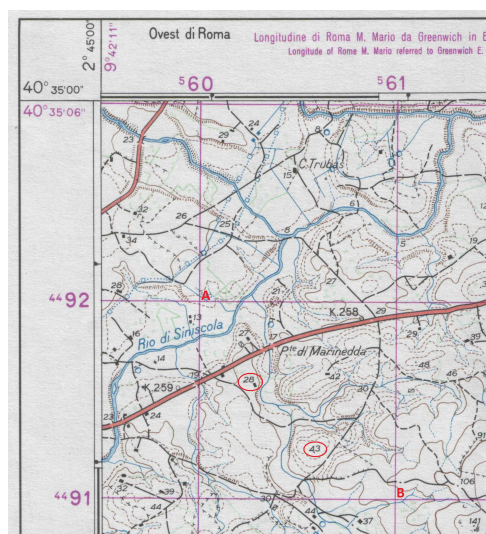


Fig. 2 - Spezzone dell'elemento cartografico. Le linee del reticolato chilometrico risultano inclinate rispetto alla cornice geografica della carta di un angolo pari alla convergenza del meridiano.

Dalla carta topografica si ricavano le coordinate gaussiane (E ; N) e le coordinate geografiche (λ ; φ) dei

punti A e B:

coordinate gaussiane (E= Est ; N= Nord nel sistema UTM ED50)
 $E_A = 560\,000.00$ metri $N_A = 4\,492\,000.00$ metri
 $E_B = 561\,000.00$ metri $N_B = 4\,491\,000.00$ metri

le coordinate E sono comprensive del valore della falsa origine F_0 (= 500000 metri) e del fattore di contrazione k_0 (= 0.9996, se non diversamente indicato sulla carta). Pertanto i valori alfanumerici di designazione UTM completi dei punti A e B risultano:

punto A: 32T PP 560000 4492000
 punto B: 32T PP 561000 4491000

mentre le coordinate geografiche (λ = longitudine ; φ = latitudine) sono:

$\lambda_A = 9^\circ 42' 31.91''$ (9.708 864°) E da Gw
 $\varphi_A = 40^\circ 34' 33.28''$ (40.575 910°) N

$\lambda_B = 9^\circ 43' 14.09''$ (9.720 581°) E da Gw
 $\varphi_B = 40^\circ 34' 00.58''$ (40.566 828°) N

Nota: le coordinate gaussiane si ricavano seguendo la modalità indicata nell'esempio riportato nell'apposito riquadro presente sulla carta topografica e l'utilizzo del coordinatometro (Fig. 3).



Fig. 3 - Determinazione delle coordinate gaussiane e coordinatometro.

Le coordinate geografiche (che sono un sistema angolare) si possono ricavare da quelle gaussiane (che sono un sistema cartesiano bidimensionale cartografico) mediante apposite formule di trasformazione (Mazzucato, 2013 e 2023) oltre che ricavarle direttamente dalla carta topografica applicando il *metodo proporzionale* qui di seguito indicato.

Nella carta topografica il reticolato geografico è tracciato solamente lungo la cornice mediante tratti alternati bianchi e neri corrispondenti, ciascuno, a un minuto primo di longitudine e di latitudine. Si misurano, in millimetri, le distanze del punto dal meridiano d_m e dal parallelo d_p adiacenti di valore minore nonché la *larghezza* dell'intero minuto primo di latitudine e la *lunghezza* dell'intero minuto primo di longitudine con i quali è possibile ottenere i rispettivi secondi d'arco mediante le proporzioni:

$$\lambda'' = \frac{60'' d_m}{\text{lunghezza}} \quad \varphi'' = \frac{60'' d_p}{\text{larghezza}}$$

La distanza cartografica (o subbietiva o gaussiana) D e l'azimut cartografico (o anomalia della corda) θ sono fornite dalle seguenti formule (coordinate polari):

$$D_{AB} = \sqrt{(E_B - E_A)^2 + (N_B - N_A)^2} = 1414.214 \text{ metri}$$

$$\theta_{AB} = \arctan \frac{E_B - E_A}{N_B - N_A} = 135^\circ$$

quadrante	$E_B - E_A$	$N_B - N_A$	Θ_{AB}
I	+	+	Θ_{AB}
II	+	-	$180^\circ - \Theta_{AB}$
III	-	-	$180^\circ + \Theta_{AB}$
IV	-	+	$360^\circ - \Theta_{AB}$

Tab. 1 - Determinare l'esatto quadrante dell'azimut cartografico.

Possiamo ottenere l'angolo θ anche mediante la seguente relazione, che lo restituisce nell'esatto quadrante:

$$\theta_{AB} = 2 \arctan \frac{(E_B - E_A)}{(N_B - N_A) + \sqrt{(E_B - E_A)^2 + (N_B - N_A)^2}} = 2 \arctan \frac{\Delta_E}{\Delta_N + D_{AB}} = 135^\circ$$

Lunghezza e azimut geodetico

B) Come secondo esempio si procede al calcolo della lunghezza σ e dell'azimut α dell'arco di geodetica di estremi A e B appartenenti al medesimo fuso del sistema UTM mediante l'utilizzo delle coordinate gaussiane.

Nota: la geodetica è la linea più breve che congiunge due punti la cui principale proprietà è che la perpendicolare in ogni suo punto coincide con quella della superficie alla quale appartiene. Il cerchio massimo equatoriale e i meridiani sono geodetiche della superficie terrestre.

Per raggiungere lo scopo, preliminarmente servono le seguenti informazioni:

- il raggio equatoriale a e l'eccentricità prima al quadrato e^2 dell'ellissoide di riferimento indicato sull'elemento cartografico (Fig. 4)

$$a = 6\,378\,388 \text{ m} \quad e^2 = 0.006\,722\,670 \text{ (Hayford, 1909)}$$

nome ellissoide	raggio equatoriale a	eccentricità prima al quadrato e^2
Bessel (1841)	6 377 397.155 m	0.006 674 372...
Clarke (1880)	6 378 249.145 m	0.006 803 511...
Hayford (1909)	6 378 388.000 m	0.006 722 670...
Krasovskij (1940)	6 378 245.000 m	0.006 693 422...
WGS (1972)	6 378 135.000 m	0.006 694 318...
WGS (1984)	6 378 137.000 m	0.006 694 380...

Tab. 2 - Valori di alcuni ellissoidi di riferimento.



Fig. 4 - Indicazioni stampigliate sull'elemento cartografico.

- la longitudine del meridiano centrale λ_0 del fuso UTM 32 nel quale gli estremi della geodetica sono compresi

$$\lambda_0 = 9^\circ$$

- la latitudine media φ_M dei due estremi

$$\varphi_M = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} = 40.571\ 369^\circ$$

- il primo ρ_M e il secondo N_M raggio di curvatura calcolato alla latitudine media φ_M

$$\rho_M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt[3]{1-e^2 \sin^2 \varphi_M}} = 6\ 362\ 629.765 \text{ metri}$$

$$N_M = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_M}} = 6\ 387\ 476.752 \text{ metri}$$

- la differenza di longitudine del punto A dal meridiano centrale del fuso, espresso in radianti

$$\Delta\lambda_A = (\lambda_A - \lambda_0) \frac{\pi}{180} = 0.012\ 372\ 011^{\text{rad}}$$

Nota: se $(\lambda_A - \lambda_0)$ è negativo il punto A appartiene al settore ovest del fuso UTM, se $(\lambda_A - \lambda_0)$ è positivo il punto A appartiene al settore est del fuso UTM.

- le coordinate gaussiane E' depurate del valore della falsa origine F_0 (= 500000 metri)

$$E'_A = E_A - F_0 = 60\ 000.000 \text{ metri}$$

$$E'_B = E_B - F_0 = 61\ 000.000 \text{ metri}$$

- la riduzione angolare ϵ alla corda AB

$$\epsilon_{AB} = \frac{(2E'_A + E'_B)(N_A - N_B)}{6\rho_M N_M \cdot 0.9996^2} = 0.000\ 000\ 743^\circ$$

Nota: più precisamente i valori ρ e N vanno calcolati nel punto P (e non nel punto medio M) della corda AB che dista dal punto A un terzo della lunghezza di AB ossia di coordinate $E_P = (2E_A + E_B)/3$ e $N_P = (2N_A + N_B)/3$.

- la convergenza del meridiano γ nel punto A

$$\gamma_A = \left\{ \Delta\lambda_A \sin \varphi_A \left[1 + \frac{1}{3} \Delta\lambda_A^2 \cos^2 \varphi_A \left(1 + 3 \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi_A \right) \right] \right\} \frac{180}{\pi}$$

$$= 0.461\ 097\ 652^\circ (= 27' 40'')$$

Nota: in maniera approssimata è possibile utilizzare $\gamma_A = \Delta\lambda_A \cdot \sin\varphi_A$ da cui $= 0.008\ 047\ 435$ radianti $= 0.461\ 084\ 089^\circ = 27'\ 39.90''$

- il modulo di deformazione lineare m del segmento AB (valido fino a distanze di 20 chilometri)

$$m_{AB} = 0.9996 \left[1 + \frac{E'_A{}^2 + E'_A E'_B + E'_B{}^2}{6\rho_M N_M 0.9996^2} \right] = 0.999\ 645\ 050$$

Nota: sulle carte a scala 1:25000 e 1:50000 i 20 chilometri corrispondono, rispettivamente, a 80 e 40 centimetri sull'elemento cartografico.

A questo punto la distanza geodetica (od obiettiva) σ e l'azimut geodetico (o della trasformata) α sono dati da:

$$\sigma_{AB} = \frac{D_{AB}}{m_{AB}} = \mathbf{1414.716\ metri}$$

$$\alpha_{AB} = \theta_{AB} + \gamma_{AB} - \varepsilon_{AB} = 135^\circ + 0.461\ 097\ 652^\circ - 0.000\ 000\ 743^\circ = \mathbf{135.461\ 096\ 909^\circ}$$

Azimut magnetico

C) Come terzo esempio si procede alla determinazione dell'azimut magnetico Θ_m . Questo è l'angolo di direzione (o di rotta) che si deve seguire andando dal punto A al punto B utilizzando una bussola.

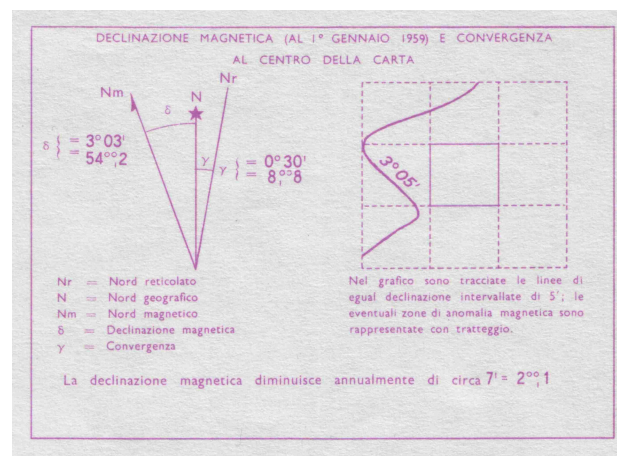


Fig. 5 - Riquadro dei dati magnetici presente sull'elemento cartografico.

Dall'apposito riquadro posto sulla carta topografica (Fig. 5) si rileva che la declinazione magnetica δ ammonta a $3^\circ\ 03'$ (nell'anno 1959) con una variazione annuale $\Delta\delta$, in diminuzione, di $7'$ e che la convergenza dei meridiani γ ha un valore di $0^\circ\ 30'$.

Supponiamo che la data attuale in cui effettuiamo il calcolo sia il 19 agosto 2015.

Possiamo calcolare il numero dei giorni trascorsi dal 1° gennaio alla data attuale mediante la seguente formula (Meeus, 1998):

$$N_{\text{gg}} = \text{INT} \frac{275M}{9} - 2\text{INT} \frac{M+9}{12} + D - 30 \quad (\text{per anni ordinari})$$

$$N_{gg} = \text{INT} \frac{275M}{9} - \text{INT} \frac{M+9}{12} + D - 30 \quad (\text{per anni bisestili})$$

con M= numero del mese (da 1 a 12) e D= numero del giorno (da 1 a 31)

Nota: INT indica di prendere solo la parte intera del risultato e che l'anno è bisestile quando è divisibile senza resto per 4 e, per gli anni secolari, per 400.

- 3° 03' 00"	δ_{1959}	declinazione magnetica alla data del 1° gennaio 1959 OVEST	dalla carta
+ 0° 30' 00"	γ	convergenza dei meridiani EST	dalla carta
- 3° 33' 00"	$\Delta\delta_{\gamma 1959}$	variazione magnetica = declinazione – convergenza	$\delta_{1959} - \gamma$
56	N_{aa}	anni trascorsi dal 1959	2015-1959
231	N_{gg}	giorni trascorsi dal 1° gennaio 2015	formula di Meeus
- 0° 07' 00"	$\Delta\delta$	variazione annuale (in diminuzione)	dalla carta
- 6° 32' 00" +		variazione in diminuzione in 56 anni	$\Delta\delta \cdot 56$
- 0° 04' 26" +		variazione in diminuzione in 231 giorni dell'anno 2015	$\Delta\delta \cdot 231 / 365$
- 6° 36' 26" =	$\Delta\delta_{2015}$	variazione in diminuzione totale alla data del 19 agosto 2015	
+ 3° 33' 26"	δ_{2015}	declinazione magnetica alla data del 19 agosto 2015 EST	$\delta_{1959} - \Delta\delta_{2015}$
+ 3° 03' 26"	$\Delta\delta_{\gamma 2015}$	variazione magnetica = declinazione aggiornata – convergenza	$\delta_{2015} - \gamma$
135° 00' 00"	Θ_{AB}	azimut cartografico	dal calcolo primo esempio
131° 27' 00"		angolo di direzione rispetto al Nord magnetico N_m del 1959	$\Theta_{AB} + \Delta\delta_{\gamma 1959}$
138° 03' 26"	Θ_m	angolo di direzione rispetto al Nord magnetico N_m del 2015 (angolo di andata)	$\Theta_{AB} + \Delta\delta_{\gamma 2015}$
318° 03' 26"		angolo di direzione reciproco (angolo di ritorno)	$\Theta_m + 180^\circ$

Tab. 3 - Determinazione magnetche.

Durante la marcia dal punto A al punto B si segue l'azimut magnetico, fornito dalla seguente espressione $\Theta_m = (\Theta_{AB} + \Delta\delta_{\gamma}) - [\delta - (\Delta\delta \cdot N_{aa} + \Delta\delta \cdot N_{gg} / 365)]$ derivata dai calcoli precedenti, mentre per un controllo della direzione di marcia, riguardando il punto A alla bussola, si deve leggere il reciproco di tale angolo ottenuto aggiungendo o togliendo 180° rispettivamente se l'angolo di andata è minore o maggiore di un angolo piatto.

Se il valore della declinazione è occidentale (ovest o negativa) va aggiunto all'angolo di direzione, se orientale (est o positiva) va sottratto. Non tenerne conto porta ad un errore della posizione del luogo di destinazione rispetto alla nostra. Esso si troverà alla nostra destra se la declinazione è occidentale oppure alla nostra sinistra se la declinazione è orientale. A 1000 metri (1 chilometro) il *fuori rotta* corrisponde ad un scostamento in metri di

$$\text{fuori rotta} = 1000 \tan \delta \sim \frac{\pi}{180} 1000 \delta = 17.45 \delta$$

Nel nostro esempio, non tenendo conto del valore della declinazione δ aggiornato alla data del 19 agosto 2015 di $3^\circ 33' 26''$, avremmo un *fuori rotta* di circa 62 metri dopo un chilometro:

$$fuori\ rotta = \tan\delta \cdot 1000 = \tan 3.557169 \cdot 1000 = 62.16 \text{ metri}$$

Distanza reale

D) Come quarto esempio si procede alla determinazione della distanza reale d tra i due punti individuati sulla carta dalla loro quota, rispettivamente, di 28 metri e 43 metri, vedere Fig. 1:

distanza sulla carta (misurata direttamente tra i due punti con un decimetro) = 1.8 centimetri

distanza cartografica (rapportata alla scala 1:25000) $D = 1.8 \text{ cm} \cdot 250 \text{ m} = 450 \text{ metri}$

dislivello (differenza di quota fra i due punti) $\Delta = 43 \text{ m} - 28 \text{ m} = 15 \text{ metri}$

inclinazione (angolo di pendenza) $\tan\alpha = \Delta/D = 15 \text{ m} / 450 \text{ m} = 0.033333 = 1.909^\circ$

pendenza = $\tan\alpha \cdot 100 = 0.033333 \cdot 100 = 3.33\%$

distanza reale $d = (D^2 + \Delta^2)^{0.5} = (450^2 + 15^2)^{0.5} = \mathbf{450.25 \text{ metri}}$

I calcoli sono sviluppati sulla rappresentazione cartografica analitica conforme di Gauss che lo stesso Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ideò e applicò alla Carta dell'Hannover e che disquisì in *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (1825). La medesima rappresentazione viene chiamata *rappresentazione (analitica) di Gauss-Boaga* con i lavori del geodeta Giovanni Boaga (1902-1961) esposti nell'opera *Sulla rappresentazione conforme di Gauss* (1942) in Italia, *rappresentazione (analitica) di Gauss-Krueger* con i lavori del geodeta Johann Heinrich Louis Krüger (1857-1923) esposti nell'opera *Konforme Abbildung des Erdellipsoides in der Ebene* (1912) in Mitteleuropa, in Gran Bretagna, in Scandinavia e in ex Jugoslavia e *Universal Transverse Mercator Projection* (dal 1947) nel resto del mondo.

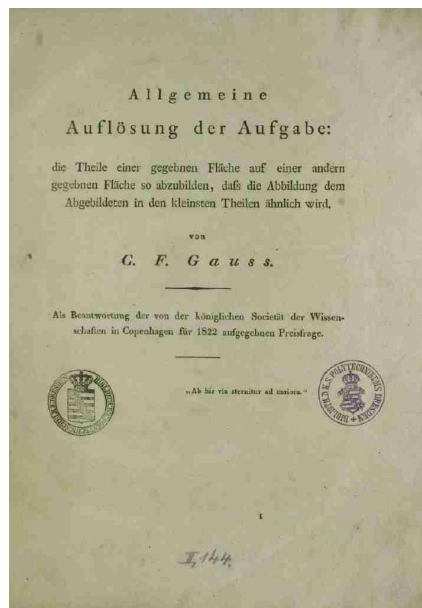


Fig. 6 - Il lavoro di Gauss del 1825 dove disquisisce sulla rappresentazione cartografica analitica conforme che da lui prende il nome.

Tra l'altro, una delle ragioni che indussero a preferire la rappresentazione conforme di Gauss nel sistema cartografico internazionale UTM è che i fusi sono fra loro identici per cui con le tavole costruite per il calcolo di un fuso le stesse potevano essere utilizzate per tutti gli altri fusi. Tale rappresentazione è puramente analitica, senza alcun riferimento al cilindro e alla geometria proiettiva tipica delle rappresentazioni cartografiche geometriche o proiezioni, anche se il reticolo geografico risultante presenta alcune caratteristiche comuni (come il meridiano centrale che si trasforma sul piano in un segmento di retta lungo il quale si conservano le distanze e l'equatore che si trasforma in una retta). Questo ha portato che la rappresentazione analitica di Gauss venga impropriamente chiamata *proiezione cilindrica inversa di Gauss* o *proiezione cilindrica trasversa di Mercatore* anche se in realtà fu Johann Heinrich Lambert (1728-1777) e non Gerard Kremer (Mercatore) (1512-1594) a proporre una carta conforme cilindrica inversa, chiamata

proiezione equatoriale cilindrica ortomorfa. L'inclusione "fra le proiezioni cilindriche della rappresentazione di Gauss trova giustificazione puramente storica in relazione al fatto che Gauss per ottenere la sua rappresentazione, in primo luogo realizzò (per via puramente analitica) una rappresentazione conforme dell'ellissoide sulla sfera, in modo da avere la conservazione delle longitudini e per mezzo della proiezione cilindrica inversa modificata di Mercatore, sviluppò quindi la sfera sul piano. La rappresentazione cartografica che ne è scaturita, pertanto, ricorda solo vagamente la rappresentazione di Mercatore e ancor meno le proiezioni cilindriche, anche se marginalmente possono essere riscontrate alcune caratteristiche comuni." (Mainardi, 1977)

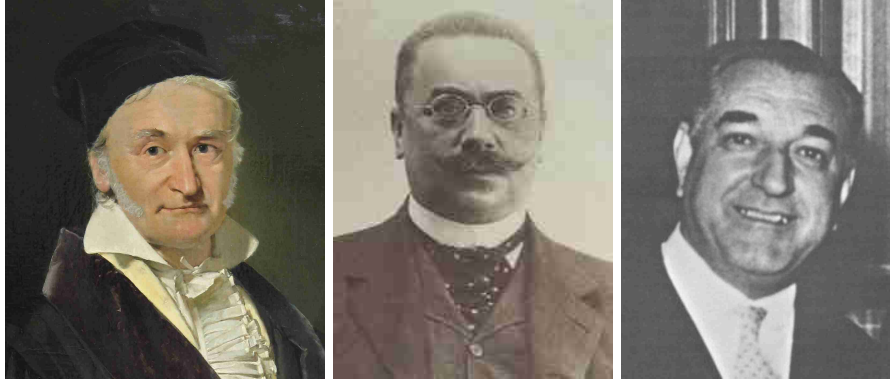


Fig. 7 - (da sinistra a destra) Ritratto di Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855), particolare dell'opera pittorica in olio su tela dell'artista danese Christian Albrecht Jensen (1792-1870) realizzata nel 1840 e conservata presso l'Osservatorio di Pulkovo in Russia, il geodeta tedesco Johann Heinrich Louis Krüger (1857-1923) e il geodeta italiano Giovanni Boaga (1902-1961).

Per saperne di più

- aa.vv. *Cartografia e orientamento*, Manuale CAI n. 24, 2011
- aa.vv. *Istruzione elementare sull'uso della quadrettatura UTM*, IGM, Firenze 1952
- Aruta, L. - Marescalchi, P. *Cartografia. Lettura delle carte*, Flaccovio, Palermo 1981
- Corbellini, G. *Guida all'orientamento con la carta, la bussola, il cielo*, Zanichelli, Bologna 1985
- Lavagna, E. - Lucarno, G. *Geocartografia. Guida alla lettura delle carte geotopografiche*, Zanichelli, Bologna 2007
- Maddalena, E. *Orienteering*, Hoepli, Milano 3 ed. 2010
- Mainardi, M. *Le rappresentazioni cartografiche*, IIM, Genova 1977
- Mazzucato, M.T. *Coordinate geografiche e gaussiane. Un metodo di trasformazione*, Matematicamente.it Magazine n. 20/2013 pp. 44-49
- Mazzucato, M.T. *Elementi di Orientamento*, Maggioli, Santarcangelo di Romagna RN 2007
- Mazzucato, M.T. *Modulo per il calcolo delle trasformazioni fra coordinate geografiche e gaussiane*, foglio excel su www.matematicamente.it
- Mazzucato, M.T. *Il sistema cartografico UTM*, Orologi Solari n. 31/2023 pp. 48-54
- Meeus, J. *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, Richmond, Virginia USA, 2 ed. 1998
- Schiavi, A. *Vademecum cartografico*, Vita e Pensiero, Milano 1996