Geometrie

di Michele T. Mazzucato

Non entri nessuno che non conosca la geometria

monito all'entrata dell'Accademia di Platone ad Atene

Dio geometrizza sempre

Platone (IV-III secolo a.C.)

Non esiste via regia alla geometria

Euclide a Tolomeo I

…ho scoperto cose così belle che ne sono rimasto abbagliato
e si dovrebbe sempre rimpiangere se andassero perdute.
…ho creato dal nulla un nuovo universo.

János Bolyai (1802-1860) al padre Farkas Bolyai (1775-1856) in una lettera del 3 novembre 1823

Data una retta ed un punto non appartenente ad essa,
esiste un'unica retta passante per il punto e parallela alla retta data.

geometria euclidea

Data una retta ed un punto non appartenente ad essa,
esistono infinite rette passanti per il punto e parallele alla retta data.

geometria iperbolica

Data una retta ed un punto non appartenente ad essa,
non esiste alcuna retta passante per il punto e parallela alla retta data.

geometria ellittica

La geometria (dal greco antico *geo*=terra e *metria*=misura) è quella parte della matematica che si occupa delle forme nel piano e nello spazio e delle loro mutue relazioni.

Si può pensare, in accordo al pensiero di Boyer, *che lo sviluppo della geometria sia stato stimolato dal bisogno pratico di costruire edifici* [tesi della classe sacerdotale di Aristotele] *e di misurare terre* [tesi degli agrimensori egizi di Erodoto]*, oppure da un senso estetico per il disegno e l'ordine* ma resta indiscutibile che i suoi inizi *risalgono a un'epoca anteriore alle più antiche civiltà* e che *la cosa migliore è* […] *procedere sul terreno più sicuro della storia della matematica qual è documentata nelle testimonianze scritte che sono pervenute sino a noi.*

Euclide (IV-III secolo a.C.) riordinò tutte le conoscenze sino ad allora note e i suoi *Elementi* costituiscono un testo fondamentale per lo studio della geometria. Una geometria che sino al secondo decennio del XIX secolo coincide, appunto, con la cosiddetta **geometria euclidea**. Questa definisce tre concetti primitivi (punto, retta e piano) e assume la veridicità di alcuni assiomi (assiomi o postulati di Euclide) da cui vengono dedotti i teoremi. Con essa abbiamo la **geometria piana** che si occupa delle figure geometriche (poligoni e cerchi) nel piano (nello spazio euclideo a due dimensioni) e la **geometria solida** (o stereometria) che si occupa delle figure geometriche (poliedri e solidi di rotazione) nello spazio (nello spazio euclideo a tre dimensioni).

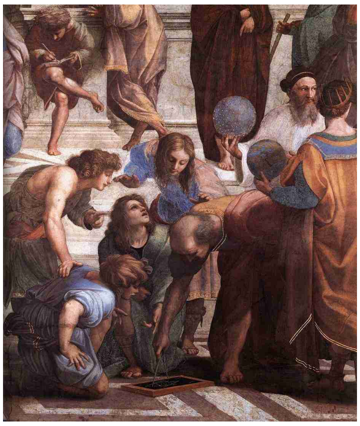


Fig. 1 - Euclide in un particolare dell’affresco *Scuola di Atene* (1509-1511) dell’urbinate Raffaello Sanzio (1483-1520) situato nella Stanza della Segnatura dei Musei Vaticani.

I cinque postulati di Euclide sono:

postulato 1: tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una e una sola retta;

postulato 2: si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;

postulato 3: dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;

postulato 4: tutti gli angoli retti sono congruenti fra loro;

postulato 5: se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti (noto come *postulato delle parallele*).

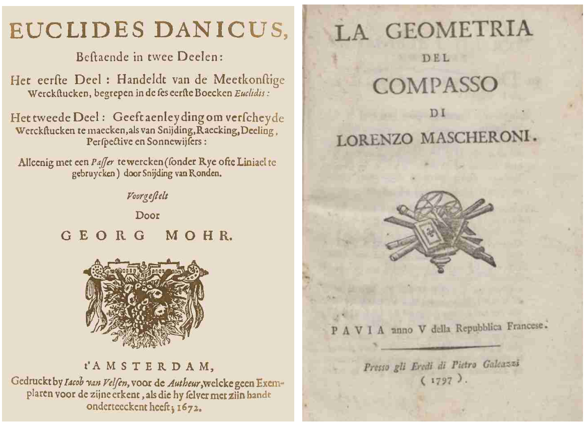
Esiste un elenco di non meno una ventina di enunciati proposti in sostituzione dell’originario V postulato, ma quello oggi maggiormente utilizzato si deve al matematico scozzese John Playfair (1748-1819) che lo riformulò nell’opera *Elementy of geometry* (1795), oggi noto come assioma di Playfair:

postulato 5: per un punto esterno ad una retta data passa una e una sola parallela alla retta data.

Fig. 2 - Prima edizione a stampa (Venezia, 1482) e prima edizione in inglese (Londra, 1570) degli *Elementi* di Euclide, l’opera più importante e nota di Euclide (IV-III secolo a.C.) scritta intorno al 300 a.C. ad Alessandria d’Egitto. Essa si compone di 13 libri così suddivisi: il LIBRO I (23 Definizioni, 5 Postulati, 5 Nozioni comuni e 48 Proposizioni), LIBRO II (2 Definizioni e 13 Proposizioni), LIBRO III (11 Definizioni e 37 Proposizioni), LIBRO IV (7 Definizioni e 16 Proposizioni) trattano della geometria piana il LIBRO V (18 Definizioni e 25 Proposizioni) tratta delle proporzioni, il LIBRO VI (11

Definizioni e 37 Proposizioni) tratta della similitudine del piano, il LIBRO VII (22 Definizioni e 39 Proposizioni), LIBRO VIII (27 Proposizioni) e LIBRO IX (36 Proposizioni) trattano della teoria dei numeri interi e razionali, il LIBRO X (16 Definizioni e 115 Proposizioni) dei numeri irrazionali, il LIBRO XI (28 Definizioni e 39 Proposizioni), LIBRO XII (18 Proposizioni) e LIBRO XIII (18 Proposizioni) trtattano della geometria solida.

Il trattato *La geometria del compasso* (Pavia, 1797) di Lorenzo Mascheroni (1750-1800) tratta delle costruzioni geometriche da realizzarsi con il solo uso del compasso. L'opera fu tradotta in francese nel 1798 e in tedesco nel 1825. Preceduto, tuttavia, dall'opera *Euclides Danicus* (Copenaghen e Amsterdam, 1672) del danese Jørgen Mohr (1640-1697). Pubblicato in danese e olandese, questo lavoro è rimasto per lo più sconosciuto sino alla sua riscoperta accidentale in una libreria della capitale danese nel 1828. Nel medesimo anno venne ristampato dalla Royal Danish Academy of Sciences and Letters con una prefazione del matematico danese Johannes Trolle Hjelmslev (1873-1950) mentre, l'anno successivo, apparve la traduzione tedesca. Anche se la dimostrazione escogitata dai due matematici è diversa, l'insieme delle dimostrazioni prova il seguente teorema di Mohr-Mascheroni: *ogni problema risolvibile con riga e compasso è risolvibile anche con il solo compasso*.


EUCLIDES DANICUS,
Bestaende in twee Deelen:
Het eerste Deel : Handeldt van de Meetkonstige Werckstucken, begrepen in de ses eerste Boecken *Euclidis* :
Het tweede Deel : Geeft aenleyding om verscheyde Werckstucken te maecken, als van Snijding, Raecking, Deeling, Perspective en Sonnewijsers :
Alleenig met een *Passer* te wercken (sonder Rye ofte Liniael te gebruycken) door Snijding van Ronden.
Voorgestelt
Door
GEORG MOHR.
t'AMSTERDAM,
Gedruckt by *Iacob van Velsen*, voor de *Autheur*, welcke geen Exemplaren voor de zijne erkent, als die hy selver met ziin handt onderteeckent heeft; 1672.

LA GEOMETRIA
DEL
COMPASSO
DI
LORENZO MASCHERONI.
PAVIA anno V della Repubblica Francese.
Presso gli Eredi di Pietro Galeazzi
(1797).

Fig. 3 - Le opere *Euclides Danicus* (1672) *di* Jørgen Mohr (1640-1697) *e La geometria del compasso* (1797) di Lorenzo Mascheroni (1750-1800) in cui provano che *ogni problema risolvibile con riga e compasso è risolvibile anche con il solo compasso*.

Il matematico tedesco David Hilbert (1862-1943) propose un sistema assiomatico corretto per la geometria euclidea fondato su 21 assiomi che espose nell'opera *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della geometria) (1899) rielaborandone l'esposizione varie volte sino alla versione del 1930. Quella di Hilbert seguì quelle diverse formulate dal matematico cuneese Giuseppe Peano (1858-1932) in *Principi di geometria* (1889) e quella del matematico chioggiotto Giuseppe Veronese (1854-1917) in *Fondamenti di Geometria* (1891).

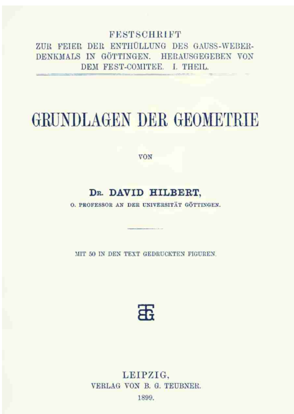

FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.
GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE
VON
DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.
MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.
LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Fig. 4 - *Grundlagen der Geometrie* (1899) del matematico David Hilbert (1862-1943) in cui si trova l'assiomatizzazione della geometria euclidea. I 21 assioni di Hilbert sono suddivisi in gruppi: assiomi di collegamento (8), assiomi di ordinamento (4), assiomi di congruenza (6), assioma delle parallele (1) e assiomi di continuità (2).

Numerosi furono i tentativi fatti per dimostrare il quinto postulato ma con vano successo. Proclo Licio Diadoco (412-485) nell'opera *Commento al I libro degli Elementi di Euclide* ne propone una sua versione oltre a riferire a quelle date da Posidonio di Apamea (II-I secolo a.C.) e Claudio Tolomeo (100-175). Tentarono anche i persiani ʿUmar Khayyām (1048-1131) e Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274). Con una dimostrazione per assurdo ci provò anche il sanremese padre gesuita Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) che espose in *Euclides ab omni nævo vindicatus. Sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (Milano, 1733), che lo stesso ritenne inconsistente ma che aprì la strada per la creazione di nuove geometrie non euclidee.

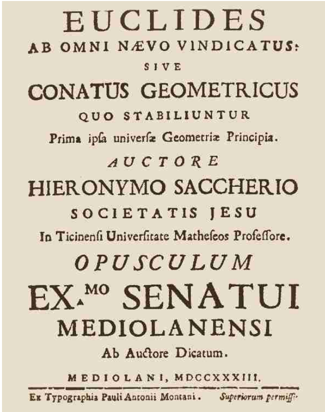

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Fig. 5 - *Euclides ab omni nævo vindicatus. Sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (1733) l'opera di Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) apripista alle geometrie non euclidee.

Si denominano anche la **geometria cartesiana** (o analitica) che si occupa delle figure geometriche attraverso il sistema di coordinate oggi dette cartesiane, da René Descartes (Cartesio) (1596-1650) che introdusse nel saggio *Geometrie* incluso nell'opera *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences Plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie qui sont des essais de cete Methode* (1637), ma già studiate nel Medioevo da Nicola d'Oresme (1323-1382) e trattate in *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (1370). La **geometria descrittiva** con la sua massima espressione nell'opera *Géométrie descriptive* (1798) del francese Gaspard Monge, conte di Pelusium (1746-1818), la **geometria proiettiva** il cui sviluppo ha visto il suo massimo rappresentante nel matematico francese Jean-Victor Poncelet (1788-1867) con il suo trattato *Traité des propriétés projectives des figures* (1822), la **geometria algebrica**, inizialmente largamente sviluppata da matematici italiani quali il veneziano Guido Castelnuovo (1865-1952), il livornese Federigo Enriques (1871-1946) e l'aretino Francesco Severi (1879-1961) rappresentanti di un nutrito gruppo di matematici che diedero vita a quella Scuola italiana di geometria algebrica attiva tra la fine del XIX secolo e la prima metà del XX secolo, unisce l'algebra (soprattutto commutativa) con la geometria. La **geometria differenziale** che si occupa degli oggetti geometrici come curve, superfici mediante l'analisi matematica cui trova la sua massima espressione applicativa nella formulazione della relatività generale. Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855) si occupò molto di tale geometria e *Disquisitiones generales circa superficies curva* (1828), in cui si trova anche il *Theorema egregium* [*Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet* ossia *se una superficie curva viene dispiegata su una qualunque altra superficie, la misura della curvatura rimane invariata in ciascun punto*], fu il suo più importante scritto sull'argomento.

La **geometria non euclidea** (o metageometria) è una geometria in cui valgono tutti gli assiomi di Euclide tranne quello *delle parallele*. In essa non valgono i teoremi di Pitagora e di Euclide.

In particolare si ha la **geometria iperbolica** (o di Bolyai-Lobačevskij), dallo stesso Lobačevskij chiamata *immaginaria* e successivamente anche *Pangeometria* e dal cultore matematico tedesco Ferdinand Karl Schweikart (1780-1857) chiamata *astrale*, in cui si ha un *eccesso* di rette parallele e la somma degli angoli interni di un triangolo (iperbolico) risulta minore di 180° (difetto angolare) nonché la superficie ha una curvatura negativa e la **geometria ellittica** (o di Riemann) in cui si nega l'esistenza di rette parallele e la somma degli angoli interni di un triangolo (ellittico) risulta maggiore di 180° (eccesso angolare) nonché la superficie ha una curvatura positiva. La geometria sarà euclidea se la superficie ha curvatura nulla.

Nella **geometria iperbolica** il V postulato di Euclide è sostituito dal postulato iperbolico. Nel periodo 1820-1823, l'ufficiale dell'esercito ungherese János Bolyai (1802-1860), preparò un trattato su un sistema completo di geometria non euclidea che pubblicò nel 1832, come appendice ad un libro di testo di matematica del padre Farkas Bolyai (1775-1856), con il titolo di *Appendice che espone in maniera assoluta la vera scienza nello spazio*. János, nel 1848, scoprì che il matematico russo Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856), che indipendentemente da lui sviluppò una geometria non euclidea, aveva pubblicato sull'argomento già nel 1829 e 1830 sul *Kazanski Vestnik* (Messaggero di Kazan) con il titolo *Sui principi della Geometria* che riassumeva una sua precedente memoria intitolata *Exposition succincte des principes de la géométrie, avec une démonstration rigoureuse de la Théorie des Paralléles* presentata nel 1826 al dipartimento di fisica e matematica di quella università. Sempre sul *Kazanski Vestnik* pubblicò altri due lavori: *La geometria immaginaria* (1835) e *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele* (1835-1838).

Fig. 6 - Il volto di János Bolyai (1802-1860) nel dipinto di Ferenc Márkos (2012). Ideatore, con Lobačevskij, della geometria iperbolica. *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclides (a priori haud unquam decidenda) indipendentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica* di János Bolyai (1802-1860) inserita nel trattato *Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentique huic propria, introducendi* di Farkas Bolyai (1775-1856).

Il 6 marzo 1832, in risposta al ricevimento dell'*Appendice*…, Gauss, il *Princeps mathematicorum*, scrisse al suo amico Farkas, padre di Jànos: *Se comincio col dire che non posso lodare un tale lavoro tu certamente per un istante rimarrai meravigliato; ma non posso dire altro; lodarlo significherebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dello scritto, la via seguita da tuo figlio, i risultati ai quali egli perviene coincidono quasi interamente con le meditazioni che ho intrapreso in parte già da trenta-trentacinque anni. Perciò sono rimasto del tutto stupefatto… Anzi, era mia idea scrivere, col tempo, tutto ciò, perché almeno non perisse con me. È dunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può essermi ora risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico ad avermi preceduto in un modo tanto notevole.*

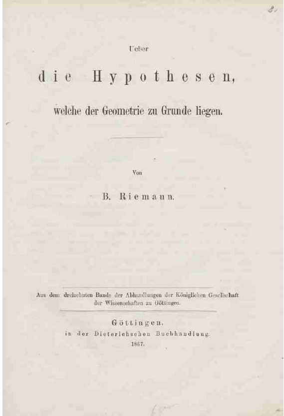
Gauss sulla geometria non euclidea nulla pubblicò preferendo relegare le sue riflessioni nelle corrispondenze private, per evitare gli *strilli dei Beoti*, come ebbe a scrivere il 27 gennaio 1829 in una lettera inviata a Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846): *Nelle ore libere ho pensato anche a un altro tema, che per me è già vecchio di quasi quarant'anni, e cioè ai primi fondamenti della geometria: non so se Le ho mai parlato delle mie vedute in proposito. Anche qui ho consolidato ulteriormente molte cose, e la mia convinzione, che non possiamo fondare la geometria completamente a priori, è divenuta, se possibile, ancora più salda. Nel frattempo, non mi deciderò ancora per molto tempo a elaborare per una pubblicazione le mie molto estese ricerche sull'argomento, e ciò forse non avverrà mai durante la mia vita, perché temo gli strilli dei Beoti, qualora volessi completamente esprimere le mie vedute…*

Fig. 7 - Emissione filatelica dell'URSS [Michel Catalogue 1830] in occasione del centenario della morte di Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856) definito il *Copernico della geometria*.

Il primo modello, valido solo localmente come dimostrò David Hilbert (1862-1943) nel 1901, di geometria iperbolica fu costruito dal cremonese Eugenio Beltrami (1835-1900) che descrisse nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* (1867) con la realizzazione della *pseudosfera* (una superficie di rivoluzione, generata dalla rotazione della trattrice intorno al suo asintoto, con curvatura costante negativa in ogni suo punto e opposta a quella di una sfera). Un modello valido globalmente fu fornito dal matematico francese Jules Henri Poincaré (1854-1912), descritto nell'opera *La Science et l'Hypothèse* (1902), con il suo *disco di Poincaré* o, con caratteristiche simili, con il *semispazio di Poincaré* che ha ispirato vari artisti come l'olandese Maurits Cornelis Escher (1898-1972).

Fig. 8 - Sulla superficie di un toro sussistono sia la geometria iperbolica (all'interno) sia la geometria ellittica (all'esterno). Il *Circle Limit III* (1959) è una della quattro opere xilografiche realizzate da Maurits Cornelis Escher (1898-1972) ispirate dalla geometria iperbolica, in particolare, dal modello del *disco di Poincaré*.

Nella **geometria ellittica** il V postulato di Euclide è sostituito dall'assioma di Riemann: *due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune*. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) trattò l'argomento nella sua seconda tesi per l'abilitazione all'insegnamento intitolata in *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* scritta nel 1854 ma pubblicata postuma nel 1867. Da cui si può ottenere la **geometria ellittica** oppure la **geometria sferica** assimilabile alla geometria euclidea della sfera la cui nomenclatura viene attribuita al matematico tedesco Felix Christian Klein (1849-1925) dal suo lavoro *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (1871). Nel 1872 lo stesso Klein, in occasione della sua nomina a professore dell'università di Erlangen nel Land della Baviera nei pressi di Norimberga, tenne una dissertazione dove presentò un manifesto di programma di ricerca intitolato *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Osservazioni comparate sulle più recenti ricerche geometriche), nel quale *dopo lo sviluppo della geometria proiettiva, la nascita delle geometrie non euclidee e l'introduzione del concetto di varietà da parte di Riemann, era sentita l'esigenza di una sistemazione della geometria più unitaria e che superasse, comprendendola, l'impostazione euclidea* dando una diversa impostazione e classificazione delle geometrie basata sui gruppi di trasformazione (in cui ogni geometria è descritta come lo studio delle proprietà che sono invarianti rispetto ad un particolare gruppo). Il manifesto largamente accettato, oggi noto come *Programma di Erlangen*, venne pubblicato nel 1893.



Ueber

die Hypothesen,

welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Göttingen,
in der Dieterichschen Buchhandlung.
1867.

Fig. 9 - Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) padre della geometria ellittica e *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria) (postuma, 1867), la seconda tesi di Riemann per l'abilitazione all'insegnamento (Habilitationsvortrag) discussa il 10 giugno 1854 all'università di Gottinga. Nella sua geometria ellittica definì: *piano*, una superficie sferica, *punto*, una qualsiasi coppia di punti diametricalmente opposti appartenenenti alla superficie sferica e *retta*, ogni circonferenza massima del nuovo piano.

Gli asteroidi della fascia principale, tra le orbite di Marte e Giove, *1441 Bolyai*, scoperto il 26 novembre 1937 dall'astronomo ungherese György Kulin (1905-1989), *1858 Lobačevskij* e *4167 Riemann*, scoperti dall'astronoma sovietica Lyudmila Vasilyevna Zhuravleva (1946-), rispettivamente, il 18 agosto 1972 e il 2 ottobre 1978 così come anche i crateri selenici *Lobačevskij* (latitudine 9,76, longitudine 113,07 e 87,26 chilometri di diametro) dal 1961, *Riemann* (latitudine 39,38, longitudine 87,18 e 117,85 chilometri di diametro) dal 1964 e *Bolyai* (latitudine -33,85, longitudine 126,12 e 102,22 chilometri di diametro) dal 1970 rendono perituro omaggio ai fondatori canonici della geometria non euclidea.

Per saperne di più

Agazzi, Evandro - Palladino, Dario *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia 1998

Bonola, Roberto (1874-1911) *La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Zanichelli, Bologna 1906

Boyer, Carl Benjamin (1906-1976) *Storia della matematica*, Oscar Saggi, Mondadori 1990

Canale, David - Canale, Luigi *Dizionario illustrato di geometria*, Giunti, Firenze 2009

Frajese, Attilio (1902-1986) - Maccioni, Lamberto (1925-2010) *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino 1970

Hilbert, David (1862-1943) *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano, 1970

Odifreddi, Piergiorgio *Abbasso Euclide! Il grande racconto della geometria contemporanea*, Mondadori, Milano 2013

Odifreddi, Piergiorgio *C'è spazio per tutti. Il grande racconto della geometria*, Mondadori, Milano 2010

Odifreddi, Piergiorgio *Una via di fuga. Il grande racconto della geometria moderna*, Mondadori, Milano 2011

Riemann, Bernhard (1826-1866) *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, Universale Scientifica 265, Bollati & Boringhieri, Torino 1994

Serres, Michel (1930-2019) *Le origini della geometria*, Feltrinelli, Milano 2a ed. 1994

Tricomi, Giacomo Francesco (1897-1978) *Il Centenario del «Programma di Erlangen» di Felix Klein*, Celebrazioni Lincee 63, Acc. Naz. dei Lincei, Roma 1972

Urgellés, Joan Gómez *Quando le rette diventano curve. Le geometrie non euclidee*, Collana Il Mondo & matematico, RBA, Milano 2019