Indice

Elenco delle figure

INTRODUZIONE

Uno dei problemi centrali della fisica moderna sembra essere l'apparente incompatibilità delle due teorie che ne costituiscono il fondamento.

La prima è la teoria della relatività generale di Einstein, che correla la forza di gravità alla struttura dello spazio e del tempo. Questa interpretazione della gravità ha condotto a modelli di fenomeni su scala cosmica e alla comprensione dell'origine dell'universo.

La seconda teoria è la meccanica quantistica, che riguarda il mondo atomico e subatomico.

Sono state formulate teorie quantistiche per tre delle quattro forze fondamentali della natura conosciute: le interazioni debole, elettromagnetica e forte. Fino a poco tempo fa sembrava che ci fossero poche probabilità di poter unificare la teoria della gravitazione (la gravità è la quarta forza fondamentale) con le leggi della meccanica quantistica. La difficoltà principale è che una tale unificazione sembra richiedere una formulazione radicalmente nuova delle leggi della fisica su scale di minima distanza.

Tra le forze della natura la gravità ha infatti uno stato particolare. Mentre altre forze, come l'elettromagnetismo, agiscono *nello* spazio-tempo, che ha semplicemente la funzione di riferimento per gli eventi fisici, la gravità è completamente diversa: non è una forza applicata su uno "sfondo" passivo di spazio e di tempo, ma costituisce una distorsione dello spazio-tempo stesso. Un campo gravitazionale è una curvatura dello spazio-tempo. È questa la concezione della gravità che Einstein raggiunse in quella che descrisse come la più pesante fatica della sua vita.

La distinzione qualitativa tra la gravità e le altre forze diventa molto più evidente quando si tenta di formulare una teoria che concordi con i principi della meccanica quantistica. Il mondo quantistico non è, per così dire, mai in quiete. Per esempio, nella teoria quantistica dei campi elettromagnetici, il valore del campo elettromagnetico fluttua continuamente.

In un universo dominato dalla gravità quantistica sarebbero soggette a fluttuazioni la curvatura dello spazio-tempo e la sua stessa struttura topologica, nonostante questa sia conservata a livello classico.

Gli effetti quantistici della gravitazione non possono essere rilevati sperimentalmente (almeno nel prossimo futuro) in quanto sono confinati ad una scala di grandezza straordinariamente piccola, sulla quale Planck richiamò per primo l'attenzione. Nel 1899, in seguito alle sue ricerche sulla radiazione di corpo nero, egli aveva introdotto la sua famosa costante $\hbar$, detta quanto d'azione. Egli notò che tale costante, combinata con altre due costanti fondamentali, la velocità della luce nel vuoto c e la costante di gravitazione universale G, dà origine ad un sistema assoluto di unità di misura.

Tali unità costituiscono la scala della gravità quantistica; la distanza di Planck è:

$$L_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.616 \cdot 10^{-33}\, cm \ ,$$

il tempo di Planck:

$$T_P = \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} = 5.391 \cdot 10^{-44}\, s \ ,$$

ed infine la massa di Planck è:

$$M_P = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.177 \cdot 10^{-5}\, g\ .$$

Per verificare sperimentalmente queste scale di grandezza e produrre particelle con massa uguale a M_P, occorrerebbero acceleratori di particelle che, usando le tecnologie attuali, dovrebbero avere le dimensioni della Galassia.

Dal momento che la via sperimentale non sembra poterci aiutare nemmeno in un futuro tanto prossimo, la gravità quantistica è una teoria insolitamente speculativa.

Lo sviluppo di una valida teoria della gravità quantistica offre d'altronde la sola strada per la conoscenza dell'origine del big bang e del destino finale dei buchi neri, eventi che si possono considerare caratteristici dell'inizio e della fine dell'universo, e questo giustifica gli sforzi in questa direzione.

Allo stato attuale, la teoria delle corde ("*string theory*") è considerata uno dei più promettenti candidati per una teoria della gravità quantistica, per cui è importante studiare in dettaglio le sue implicazioni, soprattutto su quelle predizioni più estreme della teoria gravitazionale classica come i buchi neri e il big bang.

Purtroppo, però, nonostante la grande coerenza matematica della teoria delle corde, il suo formalismo risulta ancora assai complesso per poter trattare direttamente tali problemi. Per superare queste difficoltà, una delle strategie consiste nel ricavare dalla teoria delle azioni "efficaci" a bassa energia, che correggono l'azione classica della relatività generale con l'introduzione di campi scalari, come il dilatone e i campi di modulo, accoppiati in modo non minimale ai campi classici.

Nonostante tale semplificazione possa far perdere alcuni dettagli della teoria (soprattutto nelle condizioni più estreme, come in vicinanza delle singolarità), si può ottenere una prima approssimazione degli effetti dell'azione dilatonica modificata in regime quantistico, nel contesto del formalismo dell'integrale di Feynman euclideo. Tale formalismo è uno dei principali metodi di indagine nell'ambito della gravità quantistica, in particolare nello studio delle fluttuazioni della topologia dello spazio-tempo che, come detto sopra, sono previste dalla teoria quantistica della gravità su scale dell'ordine della lunghezza di Planck. In questo formalismo un ruolo fondamentale è dato dalle soluzioni regolari ad azione finita delle equazioni di campo euclidee classiche, note come *istantoni gravitazionali*, che interpolano tra regioni asintotiche di topologia differente. Tali istantoni consentono di calcolare la probabilità di "tunnelling" tra le metriche corrispondenti alle due regioni asintotiche, per mezzo di una approssimazione semiclassica.

Lo scopo principale di questo lavoro è di considerare un simile approccio semiclassico nel contesto della teoria delle corde. Tuttavia, al momento, molto poco è noto sulle soluzioni di istantoni gravitazionali nell'ambito delle azioni efficaci ricavate dalla teoria delle corde.

Esiste però, in letteratura, un caso molto interessante di istantoni gravitazionali dati, nell'ambito della relatività generale, dalle soluzioni euclidee di buchi neri multipli in presenza di un campo di Maxwell. Questa classe di istantoni possiede alcune regioni asintotiche che approssimano spazi detti universi di Bertotti-Robinson. Una tale circostanza è particolarmente interessante, in quanto, come vedremo in seguito, esiste una classe di buchi neri carichi estremi, le cui regioni asintotiche sono approssimate molto bene da questi universi di Bertotti-Robinson. È allora possibile sfruttare questa proprietà per calcolare, tramite gli istantoni, la probabilità di tunnelling per la divisione o ricombinazione di buchi neri estremi.

In questa tesi generalizzeremo lo studio di tale processo al caso della teoria delle corde.

Questo lavoro è organizzato nel modo seguente.

Nel primo capitolo descriviamo quali sono le principali difficoltà legate alla ricerca di una teoria di gravità quantistica, con le maggiori teorie accreditate, e motivando, per sommi capi, per quali motivi la teoria delle corde sia, al momento, considerata uno dei più promettenti candidati per una "teoria del tutto". Nel secondo capitolo si delinea come la dinamica quantistica possa essere formulata tramite l'integrale di cammino di Feynman, mentre nel terzo capitolo spieghiamo come tale formalismo possa essere utilizzato per descrivere fenomeni di tunnelling, facendo uso delle soluzioni classiche euclidee dette istantoni. Nel quarto capitolo si delinea come questi metodi possano essere estesi al caso di un approccio quantistico alla teoria della gravità, e vengono discussi gli istantoni gravitazionali. Nel quinto capitolo si vedrà come le soluzioni classiche della relatività generale possano essere dedotte da un principio variazionale, e vengono descritte le principali caratteristiche dei buchi neri di Schwarzschild e quelli carichi di Reissner-Nordström. Nel sesto capitolo, ricaviamo la generalizzazione delle soluzioni di buchi neri estremi multipli, al caso di una azione efficace a bassa energia, ricavata dalla teoria delle corde, che include l'accoppiamento non minimale di un dilatone e di un campo di modulo. Tale azione interpola tra la relatività generale – le cui soluzioni discusse nel quinto capitolo ne rappresentano un caso particolare – e il modello GHS standard della teoria delle corde, dove il campo scalare è accoppiato in modo minimale ai campi classici. Nel settimo e conclusivo capitolo si mostrerà infine che è regolare la continuazione euclidea delle soluzioni ottenute, il che permette di calcolare la probabilità quantistica di divisione o ricombinazione di buchi neri carichi in teoria delle corde, in approssimazione semiclassica. Come vedremo, l'azione euclidea si annulla eccetto che nel limite della relatività generale, il che ci permetterà di mettere in evidenza alcune importanti differenze tra la relatività generale e la teoria delle corde.

Capitolo 1

LA GRAVITÀ QUANTISTICA E LA TEORIA DELLE CORDE

1.1 Difficoltà di una teoria quantistica della gravità

Le equazioni di campo per la relatività generale sono non lineari e pertanto non è possibile applicare il principio di sovrapposizione.

La ragione fisica di ciò è che il campo gravitazionale di un corpo può produrre lavoro e deve perciò contenere energia; poiché possiede energia, deve possedere massa efficace e perciò creare un ulteriore campo gravitazionale. A causa di questo effetto di retroazione ("*feedback*"), il campo gravitazionale prodotto da due corpi non è una semplice somma dei campi separati dei due corpi, ma dipende dalla struttura dettagliata dei due campi interagenti [3].

Tutte le teorie di campo significative sono non lineari. Per alcune si può trattare la non linearità con un metodo di approssimazioni successive: la teoria delle perturbazioni.

Il metodo si basa sul perfezionamento di una approssimazione iniziale, mediante una serie di correzioni progressivamente più piccole.

Quando si applica la teoria delle perturbazioni ai campi quantizzati, essa conduce ad infiniti che devono essere eliminati per rinormalizzazione. Di regola le differenti tecniche della teoria della rinormalizzazione danno risultati identici quando vengono applicate allo stesso problema, il che dà garanzie sulla loro validità.

Nel caso della gravità quantistica la teoria delle perturbazioni non è applicabile per due motivi:

1. in primo luogo alle energie di Planck i successivi termini della serie di perturbazioni (cioè le successive correzioni) sono di grandezza analoga. Troncare la serie ad un numero finito di termini non porta ad una approssimazione valida; si deve invece sommare l'intera serie infinita;

2. in secondo luogo, non possono essere rinormalizzati in modo coerente i singoli termini della serie. In ogni ordine di approssimazione appaiono nuove classi di infiniti che non hanno alcuna corrispondenza nella ordinaria teoria quantistica dei campi. Queste nascono perché nel quantizzare il campo gravitazionale si quantizza lo stesso spazio-tempo.

Nell'ordinaria teoria quantistica dei campi lo spazio-tempo è uno "sfondo" fisso. Nella gravità quantistica lo sfondo non solo reagisce alle fluttuazioni quantistiche, ma si suddivide anche tra esse; in tale formulazione si dovrebbe abbandonare l'idea che spazio e tempo siano insiemi continui di punti.

1.2 Modelli della gravità quantistica

Uno dei primi tentativi di creare una valida teoria unificata dei campi fu fornito da Kaluza e da Klein. In tale teoria lo spazio-tempo è pentadimensionale e dà una visione geometrica unificata della gravitazione e dell'elettromagnetismo [2].

Oggi si chiamano di Kaluza-Klein tutte le teorie che tentano di unificare le forze fondamentali della natura in uno spazio-tempo con più di quattro dimensioni.

Nello schema geometrico di Kaluza-Klein, uno dei più recenti modelli, e anche il più perfezionato è una versione della teoria chiamata supergravità. Essa presenta la massima eleganza matematica quando viene formulata in uno spazio-tempo di undici dimensioni. Tre aspetti propendono a favore di tale dimensionalità:

1. le teorie della supergravità si possono formulare con un numero qualsiasi di dimensioni sino ad un massimo di undici, mentre con dodici o più dimensioni sembra che la teoria non sia più valida;

2. il numero minimo di dimensioni necessarie per includere le tre forze non gravitazionali in una teoria di Kaluza-Klein è sette; prese insieme alle quattro dello spazio-tempo comune, le sette dimensioni nascoste porterebbero ad un universo di undici dimensioni;

3. per un numero di dimensioni inferiore a undici, esistono diverse versioni della supergravità matematicamente distinte, mentre nel caso di undici dimensioni la teoria è unica.

La supergravità presenta, però, alcuni problemi apparentemente insolubili:

- la teoria a undici dimensioni non conduce alla osservata chiralità della forza debole. È noto infatti che tale forza non conserva la parità. Solo quando lo spazio ha un numero dispari di dimensioni (o quando lo spazio-tempo ne ha un numero pari), si può definire in modo completo il concetto di chiralità;
- il secondo è il problema cosmologico. Se si suppone che le sette dimensioni addizionali formino una struttura compatta talmente piccola da non poter essere osservata, le restanti quattro dimensioni dello spazio-tempo acquistano una elevata curvatura. Ciò è in contrasto con le osservazioni astronomiche sul valore della costante cosmologica, il cui valore misurato è nullo, con altissima precisione. La costante cosmologica descrive la curvatura dell'universo che non è prodotta da materia;
- il terzo problema è dovuto al fatto che la supergravità, come la teoria gravitazionale standard, porta a grandezze infinite non rinormalizzabili, se si tenta di quantizzarla.

Recentemente però è emerso un notevole ottimismo sulla possibilità di risolvere questi problemi con una teoria quantistica della gravitazione formulata su basi completamente diverse: la teoria delle supercorde.

1.3 Le supercorde

La difficoltà principale nel trovare una teoria che unifichi la gravità con le altre forze è che la relatività generale è una teoria classica, ossia non quantistica, mentre le altre teorie parziali che governano le interazioni debole, elettromagnetica e forte dipendono dalla meccanica quantistica in un modo essenziale.

Per poter comprendere perché una soluzione dei problemi che insorgono conciliando la gravitazione con la teoria dei quanti si sia dimostrata così sfuggente, si devono prendere in considerazione le conseguenze del principio di indeterminazione di Heisenberg per ordini di grandezza corrispondenti a distanze inferiori a circa $10^{-13}\,cm$. Secondo questo principio, quanto più precisamente si esegue una misura spaziale, tanto più imprecisa sarà la conoscenza della quantità di moto o dell'energia del sistema in esame, come espresso dalla disuguaglianza:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq h \;, \tag{1.1}$$

oppure, in termini di tempo ed energia:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h \;. \tag{1.2}$$

Le incertezze riguardanti l'energia si presentano come fluttuazioni su brevi distanze. Essendo l'energia e la massa equivalenti – secondo la ben nota relazione $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ – le fluttuazioni di energia si possono manifestare come creazione di particelle virtuali. Particelle e antiparticelle virtuali possono materializzarsi dal vuoto per un breve intervallo di tempo, prima di annichilarsi a vicenda.

Quando la risoluzione spaziale è inferiore alla distanza di Planck $L_P \simeq 10^{-33}\,cm$, le fluttuazioni energetiche diventano talmente grandi che, secondo la relatività generale, si formano buchi neri virtuali. L'energia delle fluttuazioni è dell'ordine di grandezza dell'energia di Planck $E_P = M_P \cdot c^2 \simeq 10^{19}\,GeV$.

Lo spazio-tempo deve perciò essere ritenuto altamente curvo su piccole scale, mentre continua a mantenere un aspetto liscio e regolare alle scale più grandi; in un certo senso esso ha una struttura schiumosa ("*foam*").

Questa conclusione ha conseguenze disastrose sulle normali tecniche di calcolo della teoria quantistica dei campi, perché annulla la nozione di spazio-tempo inteso come insieme continuo di punti.

Sembra quindi che, per distanze brevi, o equivalentemente, per alte energie, debbano essere modificate o la relatività generale o la meccanica quantistica (o entrambe).

Negli ultimi anni gli studiosi dell'unificazione delle leggi della fisica sono diventati ottimisti sulla possibilità di superare l'ostacolo teorico. L'ottimismo si basa sugli interessanti sviluppi di un nuovo tipo di teoria: la teoria delle supercorde.

Questo tipo di teoria modifica radicalmente le ipotesi della relatività generale per distanze brevi e può richiedere una revisione della gravitazione al suo livello più fondamentale.

In questa teoria le particelle elementari si possono considerare come corde. Le teorie delle corde differiscono quindi da tutte le comuni teorie di campo quantistiche, come per esempio la teoria quantistica dell'elettromagnetismo (QED), i cui quanti sono puntiformi.

Una corda, avendo una certa estensione, può vibrare, con i modi di vibrazione armonici determinati dalla tensione della corda: le comuni particelle elementari vengono perciò interpretate come modi differenti di una sola corda.

La teoria delle supercorde non solo evita i problemi incontrati in precedenza nel combinare la gravitazione con la meccanica quantistica, ma consente anche di trattare tutte e quattro le forze fondamentali come diversi aspetti di uno stesso principio fondamentale. L'unificazione delle forze viene ottenuta in un modo determinato unicamente dal requisito logico che la teoria sia intrinsecamente coerente.

Le corde postulate dalla teoria sono dell'ordine di grandezza della distanza di Planck $L_P \simeq 10^{-33}\,cm$, cioè circa 10^{20} volte più piccole del diametro del protone, e sono definite in uno spazio a dieci dimensioni.

Per comprendere meglio i problemi della teoria delle corde, richiamiamo alcuni aspetti delle teorie unificate.

Come è noto, se si trascura la gravità, si può costruire un quadro unificato delle forze debole, elettromagnetica e forte, in una comune teoria dei campi dotata di quanti puntiformi.

Tale unificazione è ottenuta tramite l'introduzione delle teorie di gauge, in cui un gruppo di simmetria agisce localmente sui campi in ogni punto dello spazio-tempo. L'esempio più semplice è dato dalla elettrodinamica quantistica (QED); altri esempi più generali e con maggiore simmetria interna sono dati dalla teoria elettrodebole e dalla cromodinamica quantistica (QCD). In tutte queste teorie, che sono note generalmente come teorie di Yang-Mills, le forze sono mediate da particelle di spin uno.

Infine anche la teoria della gravitazione di Einstein è un tipo di teoria di gauge, ma non del tipo di Yang-Mills, in quanto la sua particella di gauge – il gravitone –, pur essendo privo di massa, ha spin due.

Un aspetto importante di una simmetria è che può apparire rotta. Molte teorie delle particelle elementari, e tra queste le teorie delle supercorde, richiedono grandi gruppi di simmetria di gauge allo scopo di fornire una visione unificata di diversi fenomeni; tale grande simmetria è però evidente soltano a temperature estremamente elevate; se la teoria deve essere in accordo con le osservazioni, la simmetria deve apparire rotta a ordinarie temperature.

Per esempio la teoria elettrodebole descrive una versione unificata delle forze debole ed elettromagnetica, detta appunto forza elettrodebole, la cui simmetria di gauge si basa sul gruppo di simmetria $SU(2) \times U(1)$;

questo gruppo è un'estensione del gruppo $U(1)$ associato alla QED. In questa teoria si suppone che la forza elettrodebole sia mediata da quattro particelle senza massa e con spin uno. Ad energie inferiori a circa $10^2\,GeV$ si ha la rottura spontanea della simmetria, per cui tre dei quattro mediatori di forza acquistano massa per diventare i bosoni vettori intermedi $W^{\pm}$ e Z^0 della forza debole. La quarta particella mantiene il carattere di massa nulla, ed è l'ordinario fotone dell'elettromagnetismo.

Gli schemi di grande unificazione che non includono la gravitazione sono stati associati ad alcuni grandi gruppi di simmetria, come $SU(5)$, $SO(10)$ e E_6. Le simmetrie si possono rompere in simmetrie più piccole, che sono associate al gruppo $SU(3)$ della QCD e al gruppo $SU(2)\times U(1)$ della teoria elettrodebole. Però esistono *molte* possibili simmetrie, e non si conosce alcun motivo per preferirne una all'altra.

Nelle teorie delle supercorde, invece, non si può trascurare la gravità, e il tipo di simmetria necessario, questa volta *unico*, conduce ad una previsione naturale circa la simmetria fondamentale che unisce le altre forze [9].

Come detto, nella teoria delle supercorde la gravitazione opera in uno spazio-tempo allargato di dieci dimensioni. Sei delle dieci dimensioni non sono visibili e si possono osservare soltanto le quattro familiari dimensioni dello spazio-tempo. Le sei dimensioni aggiuntive devono essere "compattificate", cioè, per così dire, arrotolate in una struttura talmente piccola da non poter essere osservate direttamente. Si ritiene che la grandezza delle sei dimensioni nascoste sia all'incirca la stessa della lunghezza della corda.

Esistono due tipi di corde: quelle aperte e quelle chiuse. Le corde aperte hanno due estremità libere e proprio a tali estremità sono fissate le cariche conservate – come la carica elettrica – associate alle forze di

Yang-Mills. Le particelle associate agli stati vibrazionali di una corda aperta comprendono le particelle di gauge prive di massa e con spin uno, ma non comprendono il gravitone.

Le due estremità di una corda aperta possono però congiungersi e formare una corda chiusa. Gli stati vibrazionali di una corda chiusa comprendono questa volta anche particelle di gauge prive di massa e con spin due, come il gravitone.

Quindi una qualsiasi teoria con corde aperte deve contenere anche corde chiuse, e una teoria con corde chiuse include in modo naturale la gravità. Perciò se in una teoria delle corde si introducono le forze di Yang-Mills, esse devono venire unificate in stretta relazione con la gravità.

Recentemente è stato formulato un tipo di teoria nella quale le forze di Yang-Mills possono essere associate a corde chiuse. Questa teoria, nota come *eterotica*, sembra essere il più promettente tipo di teoria delle supercorde finora formulato [8].

Gran parte dell'interesse insito nella teoria delle supercorde deriva dalla struttura che si ottiene imponendo alla teoria di essere matematicamente coerente, cioè esente dalle cosiddette *anomalie*, che appaiono di solito quando una teoria viene quantizzata.

Inoltre, se la teoria deve realisticamente spiegare le forze di Yang-Mills, esiste un vincolo empirico in aggiunta al requisito che vi siano soltanto quattro dimensioni osservabili: la teoria deve condurre alla osservata chiralità della forza debole. Contrariamente alle teorie di Kaluza-Klein, essendo la teoria delle supercorde formulata in uno spazio-tempo di dieci dimensioni, è in grado di spiegare tale chiralità.

La fiducia recente nella teoria delle supercorde si deve alla scoperta che si può formulare una teoria chirale in dieci dimensioni esente da anomalie, purché il gruppo di simmetria delle forze di Yang-Mills sia uno dei seguenti gruppi particolari: o il gruppo $SO(32)$ oppure il gruppo $E_8 \times E_8$. Recentemente è stato scoperto un terzo gruppo, noto come $O(16) \times O(16)$, che conduce anche esso ad assenza di anomalie, la cui simmetria è una sottosimmetria degli altri due gruppi possibili.

Il fatto che la richiesta di coerenza quantistica conduca ad una previsione pressoché unica del gruppo di simmetria ha costituito una scoperta importante, che ha portato all'attuale ondata di interesse per le supercorde.

Capitolo 2

L'INTEGRALE DI FEYNMAN

Esistono vari approcci alla quantizzazione di una teoria di campo. Di solito la quantizzazione è effettuata col metodo operatoriale, in cui si impone che alle configurazioni di campo classiche corrispondono operatori che soddisfino relazioni di commutazione "canoniche".

C'è tuttavia un altro approccio in cui la dinamica quantistica è descritta dalla somma su tutte le configurazioni di campo, nota come integrale di cammino. Con questo approccio Feynman formulò per primo una teoria delle perturbazioni per la elettrodinamica quantistica (QED) autoconsistente e relativisticamente invariante [10].

Questo formalismo si è dimostrato il più conveniente per la quantizzazione dei sistemi relativistici con un numero infinito di gradi di libertà, vale a dire per le teorie dei campi.

2.1 L'integrale di Feynman in meccanica quantistica

Per focalizzare le idee principali che stanno alla base dell'integrale di cammino, consideriamo un esempio semplice: un sistema ad un grado di libertà in meccanica quantistica non relativistica [11].

Siano q e p le coordinate di posizione e di quantità di moto di una particella, a cui corrispondono gli operatori Q e P.

Nella rappresentazione delle coordinate, gli operatori hanno la forma:

$$Q = x \qquad , \qquad P = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \; ; \tag{2.1}$$

i corrispondenti autostati sono esprimibili nella forma:

$$|q\rangle = \delta(x-q) \qquad , \qquad |p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}px} \; ; \tag{2.2}$$

questi soddisfano le equazioni agli autovalori:

$$Q|q\rangle = q|q\rangle \qquad , \qquad P|p\rangle = p|p\rangle \; . \tag{2.3}$$

Le funzioni di trasformazione dalla rappresentazione delle coordinate a quella degli impulsi e viceversa sono date da:

$$\langle p|q\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}\delta(x-q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}pq} \tag{2.4}$$

$$\langle q|p\rangle \;=\; \langle p|q\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}pq} \; . \tag{2.5}$$

La dinamica di un sistema in meccanica quantistica è descritta dall'operatore Hamiltoniano, che qui assumiamo, per semplicità, indipendente dal tempo, e che in generale è una funzione degli operatori di posizione e quantità di moto:

$$H = H(P,Q) \; . \tag{2.6}$$

Senza discutere il problema generale dell'ordinamento temporale, per definizione assumeremo che tutti gli operatori P siano posti alla sinistra di tutti gli operatori Q.

Con tale convenzione, l'elemento di matrice dell'Hamiltoniana tra gli stati $|p\rangle$ e $|q\rangle$, è espresso esplicitamente in termini della funzione *classica* Hamiltoniana $E(p,q)$:

$$\begin{aligned} \langle p|H|q\rangle &= \langle p|E|q\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\, e^{-\frac{i}{\hbar}pq} E(p,q)\ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Il nostro scopo è quello di calcolare l'operatore di evoluzione temporale:

$$U(t_i,t_f) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)}\ . \tag{2.8}$$

Per tale motivo calcoliamo il suo elemento di matrice, cioè l'ampiezza di transizione dallo stato q_i al tempo t_i, allo stato q_f al tempo t_f:

$$\begin{aligned} \langle q_f|U(t_i,t_f)|q_i\rangle &= \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)}|q_i\rangle \\ &= \langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle \\ &= K(q_f,q_i,t_f-t_i)\ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Tale elemento di matrice è anche chiamato il nucleo ("*kernel*") K dell'operatore $U(t_i,t_f)$ nella rappresentazione in coordinate. Per piccoli $t_f - t_i$, è facile calcolare l'ampiezza di transizione $\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle$. Infatti in questo caso:

$$\begin{aligned} U(t_i,t_f) &= e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)} \\ &= 1-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)+O(t_f-t_i)^2 \\ &\simeq 1-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)\ , \end{aligned} \tag{2.10}$$

e possiamo approssimativamente scrivere:

$$
\begin{aligned}
\langle p|U(t_i,t_f)|q\rangle &= \langle p|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)}|q\rangle \\
&\simeq \langle p|1-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)|q\rangle \\
&= \langle p|1-\frac{i}{\hbar}E(t_f-t_i)|q\rangle \\
&\simeq \langle p|e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_f-t_i)}|q\rangle \ . \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

L'ultima espressione ottenuta è ingannevolmente semplice. Sebbene l'operatore di evoluzione temporale contenga l'*operatore* Hamiltoniano in forma esponenziale, il risultato finale non contiene affatto operatori. Il punto essenziale è che per intervalli di tempo $t_f - t_i$ infinitesimi, abbiamo potuto mantenere nello sviluppo in serie soltanto il termine di primo ordine; ma se, per intervalli di tempo finiti, avessimo dovuto considerare anche i termini successivi dello sviluppo, la non commutatività degli operatori di posizione e quantità di moto nell'Hamiltoniana, avrebbe impedito la sostituzione di questi operatori con i corrispondenti autovalori.

Se nell'ultima espressione inseriamo un insieme completo di operatori di quantità di moto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\,|p\rangle\langle p| = 1 \ , \qquad (2.12)$$

il kernel dell'operatore $U(t_i,t_f)$ nella rappresentazione in coordinate è facilmente calcolabile:

$$\langle q_f|U(t_i,t_f)|q_i\rangle = \int \langle q_f|p\rangle\langle p|U(t_i,t_f)|q_i\rangle dp$$

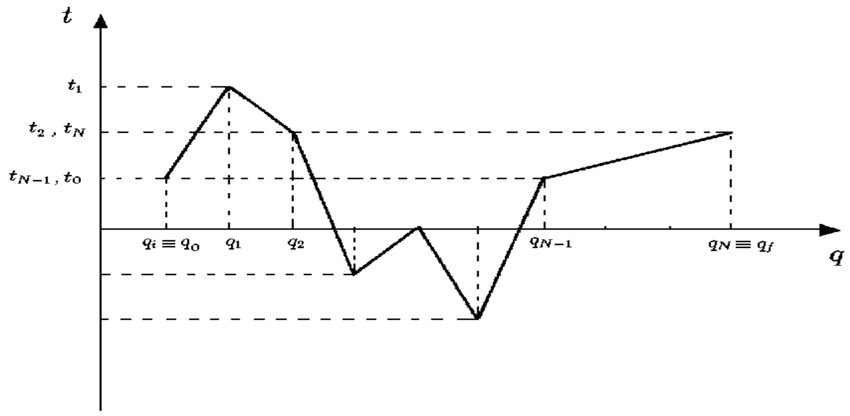

Figura 2.1: Un possibile cammino della particella nello spazio delle configurazioni, in un piano $[q, t]$.

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}pq_f} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}pq_i} e^{-\frac{i}{\hbar}E(p,q_i)(t_f-t_i)} dp$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar}\left[p(q_f-q_i)-E(p,q_i)(t_f-t_i)\right]} dp \; . \tag{2.13}$$

A questo punto si può calcolare l'ampiezza di transizione $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ per un intervallo di tempo $t_f - t_i$ finito. In questo caso si può procedere come segue: dividiamo l'intervallo $t_f - t_i$ in N parti Δt, ognuna di grandezza:

$$\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N} \tag{2.14}$$

sufficientemente piccola da poter usare la formula precedente (2.9) per l'operatore $e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Delta t)}$.

Possiamo allora esprimere l'operatore $U(t_i, t_f)$ nella forma:

$$U(t_i, t_f) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)} = e^{-\frac{i}{\hbar}H(N\Delta t)} = \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Delta t)} \right\}^N \; . \tag{2.15}$$

Perciò, inserendo degli insiemi completi di stati di posizione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_k \, |q_k\rangle\langle q_k| = 1 \qquad (k = 1, \ldots, N-1) \tag{2.16}$$

tra ognuno degli operatori di evoluzione temporale individuali, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\langle q_f | U(t_i, t_f) | q_i \rangle = \\
&\quad = \langle q_f | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)} \cdots e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)}}_{N} | q_i \rangle \\
&\quad = \int dq_{N-1} \cdots dq_1 \langle q_N | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)} | q_{N-2} \rangle \\
&\qquad\qquad \cdots \times \langle q_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)} | q_0 \rangle \;, \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

dove, per chiarezza, abbiamo indicato lo stato iniziale $q_i \equiv q_0$, e lo stato finale $q_f \equiv q_N$, ed ogni integrale è calcolato tra $q_k = -\infty$ e $q_k = \infty$. Riutilizzando la relazione di completezza per gli operatori $|p\rangle$ – come abbiamo già fatto per il calcolo del kernel – per ognuno degli operatori di evoluzione temporale parziale, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
&\langle q_f | U(t_i, t_f) | q_i \rangle = \\
&\quad = \int dq_{N-1} \cdots dq_1 \langle q_N | p_N \rangle \langle p_N | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)} | q_{N-1} \rangle dp_N \\
&\qquad\qquad \times \langle q_{N-1} | p_{N-1} \rangle \langle p_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)} | q_{N-2} \rangle dp_{N-1} \\
&\qquad\qquad \cdots \times \langle q_1 | p_1 \rangle \langle p_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Delta t)} | q_0 \rangle dp_1 \;, \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

da cui:

$$
\begin{aligned}
&\langle q_f | U(t_i, t_f) | q_i \rangle = \\
&\quad = \int dq_{N-1} \cdots dq_1 \quad \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar}[p_N(q_N - q_{N-1}) - E(p_N, q_{N-1})\Delta t]} dp_N
\end{aligned}
$$

$$\times \quad \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}[p_{N-1}(q_{N-1}-q_{N-2})-E(p_{N-1},q_{N-2})\Delta t]}dp_{N-1}$$

$$\cdots\times \quad \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}[p_1(q_1-q_0)-E(p_1,q_0)\Delta t]}dp_1 \ , \tag{2.19}$$

e quindi:

$$\langle q_f|U(t_i,t_f)|q_i\rangle =$$

$$= \int e^{\frac{i}{\hbar}[p_N(q_N-q_{N-1})+p_{N-1}(q_{N-1}-q_{N-2})+\cdots+p_1(q_1-q_0)]}$$

$$\times e^{-\frac{i}{\hbar}[E(p_N,q_{N-1})+E(p_{N-1},q_{N-2})+\cdots+E(p_1,q_0)]\Delta t}$$

$$\times \frac{dp_N}{2\pi\hbar}\,\frac{dp_{N-1}dq_{N-1}}{2\pi\hbar}\cdots\frac{dp_1dq_1}{2\pi\hbar} \ . \tag{2.20}$$

Al limite per $N \to \infty$ o, equivalentemente, per $\Delta t \to 0$, l'ultima espressione diventa:

$$\begin{aligned}
\langle q_f|U(t_i,t_f)|q_i\rangle &= \\
&= \int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}[p(t)\dot{q}(t)-E(p(t),q(t))]dt}\prod_t \frac{dp\,dq}{2\pi\hbar} \\
&= \int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}L[q(t),p(t),t]dt}\prod_t \frac{dp\,dq}{2\pi\hbar} \\
&= \int e^{\frac{i}{\hbar}I[q(t),p(t),t]}\prod_t \frac{dp\,dq}{2\pi\hbar} \ ,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

dove:

$$L[q(t),p(t),t] = p(t)\dot{q}(t) - E\,[p(t),q(t))] \tag{2.22}$$

è la Lagrangiana espressa nello spazio delle fasi, e:

$$I = \int_{t_i}^{t_f} L\, dt \tag{2.23}$$

è l'azione.

Abbiamo così ottenuto il risultato principale: l'elemento di matrice dell'operatore evoluzione temporale (cioè l'ampiezza di transizione tra i due stati considerati q_i e q_f), si trova integrando il funzionale di Feynman $e^{\frac{i}{\hbar} I[q(t),p(t),t]}$, su tutte le traiettorie $p(t)$ e $q(t)$ nello spazio delle fasi, con valori fissi q_i e q_f agli istanti t_i e t_f rispettivamente.

Siamo così arrivati ad una espressione quantistica funzione della sola azione classica.

Feynman stesso usò una espressione leggermente differente dell'integrale di cammino. Se infatti l'Hamiltoniana è quadratica negli impulsi:

$$H(P,Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q)\,, \tag{2.24}$$

allora l'integrazione sulle variabili p e q può essere effettuata esplicitamente. Se nell'integrale relativo a questo tipo di Hamiltoniana:

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left[p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-V(q)\right]dt} \prod_t \frac{dp\, dq}{2\pi\hbar} \tag{2.25}$$

si considera la trasformazione:

$$p(t) \to p(t) + m\,\dot{q}(t)\,, \tag{2.26}$$

allora è possibile separare l'integrazione su p e q:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle =$$

$$= \int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left[(p+m\dot{q})\dot{q}-\frac{(p+m\dot{q})^2}{2m}-V(q)\right]dt}\prod_t \frac{d(p+m\dot{q})dq}{2\pi\hbar}$$

$$= \int e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\frac{p^2}{2m}dt}\prod_t \frac{dp}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{m\dot{q}^2}{2}-V(q)\right]dt}\prod_t dq$$

$$= \frac{1}{N}\int \prod_t dq\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} L\, dt}$$

$$= \int \mathcal{D}[\amalg(\sqcup)]\, \rceil^{\frac{\rangle}{\langle}\mathcal{I}[\amalg(\sqcup)]}\,, \tag{2.27}$$

dove:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \tag{2.28}$$

è la Lagrangiana del sistema; la quantità:

$$\frac{1}{N} = \int e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\frac{p^2}{2m}dt}\prod_t \frac{dp}{2\pi\hbar} \tag{2.29}$$

è l'inverso del fattore di normalizzazione, che è ovviamente indipendente da q_i e q_f, ed è una funzione solamente dell'intervallo di tempo $t_f - t_i$; infine:

$$\mathcal{D}[\amalg(\sqcup)] = \frac{\infty}{\mathcal{N}}\prod_{\sqcup} \lceil\amalg \tag{2.30}$$

rappresenta la misura sullo spazio di tutte le configurazioni $q(t)$.

Quest'ultima forma dell'integrale di cammino, espressa nello spazio delle configurazioni, anche se meno generale della precedente, è quella più conosciuta, anche perché applicabile nella maggior parte dei casi. Espressa in questa forma, l'ampiezza di transizione $\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle$ si trova considerando tutte le traiettorie nel piano $[q, t]$, che connettono i due punti estremi. Ogni cammino $q(t)$ dà un contributo proporzionale a $e^{\frac{i}{\hbar}I[q(t)]}$, un fattore che ha modulo unitario, e dipende dal cammino solo tramite il fattore di fase $I[q(t)]/\hbar$.

Il fatto notevole è che tutti i cammini contribuiscono all'ampiezza di transizione in ugual misura, ed è solamente la differenza dei valori dei fattori di fase per i diversi cammini che determina il comportamento di un sistema.

Il particolare cammino per cui l'azione è un estremo – $\delta I = 0$ – o, come si dice più comunemente, il cammino di minima azione, è l'unico cammino $q_{cl}(t)$ che una particella segue in fisica classica. Nel caso quantistico, d'altra parte, tutte le traiettorie contribuiscono all'integrale di cammino. Ciò che rende $q_{cl}(t)$ particolare, è che esso è il cammino per cui la fase è un estremo, quindi la differenza di fase tra il cammino classico e quelli vicini cambia poco rapidamente.

I cammini lontani da quello classico, non essendo in prossimità di un estremo per l'azione, hanno invece differenze di fase maggiori con quelli vicini. Perciò quando si sommano i contributi di tutti i cammini, solamente in vicinanza del cammino classico se ne trovano molti quasi in fase l'uno con l'altro, per cui si sommano costruttivamente, in modo coerente.

In situazioni per cui è $I[q(t)] \gg 1$, come nel caso classico di una particella macroscopica, le differenze di fase sono più marcate, e questo fatto porta a selezionare la sola traiettoria classica. Tuttavia, quando $I[q(t)] \approx 1$, cioè nel caso quantistico, anche i cammini lontani da quello classico possono essere ancora approssimativamente in fase, e contribuiscono tutti alla somma. In questo caso il comportamento della particella non potrà più essere adeguatamente descritto dalla fisica classica.

Il caso di un sistema con più gradi di libertà può essere trattato in modo analogo. Usando la notazione vettoriale:

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \qquad q = (q^1, q^2, \ldots, q^n) \tag{2.31}$$

$$p\,\dot{q} = \sum_i p_i\,\dot{q}^i \qquad\qquad \frac{dp\,dq}{2\pi\hbar} = \prod_i \frac{dp_i\,dq^i}{2\pi\hbar} \tag{2.32}$$

si possono interpretare le formule precedenti anche per il caso multidimensionale.

2.2 L'integrale di Feynman in teoria dei campi

Il formalismo che ha portato alla formulazione dell'integrale di Feynman in meccanica quantistica, può essere facilmente generalizzato alla teoria dei campi che, da un punto di vista della dinamica Hamiltoniana, è un sistema con un numero infinito di gradi di libertà [12].

Per esempio, consideriamo un campo scalare neutro $\phi(x)$, funzione dei punti dello spazio-tempo x, e sia:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\rho\phi) \tag{2.33}$$

la densità di Lagrangiana, che dipende solo dal campo e dalle sue derivate prime. Sia $I(M)$ l'integrale d'azione, definito per una regione arbitraria M dello spazio-tempo:

$$I(M) = \int_M d^4x\,\mathcal{L}(\phi, \partial_\rho\phi)\ , \tag{2.34}$$

e imponiamo che, per una variazione del campo che si annulli sul contorno di M, l'azione abbia un valore stazionario. Come è noto, tale condizione conduce alle equazioni di Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)}\right) = 0\ , \tag{2.35}$$

che rappresentano le equazioni del moto per i campi.

Per quantizzare il sistema classico, descritto dalle (2.35), usando il formalismo canonico della meccanica quantistica non relativistica, è necessario introdurre variabili coniugate. Pertanto ad un istante fissato t suddividiamo lo spazio in un reticolo di cellette uguali di volume ϵ^3. Approssimiamo il valore del campo nella cella con il suo valor medio all'interno della cella stessa; il sistema è quindi descritto dall'insieme discreto di coordinate generalizzate:

$$q_i(t) \equiv \phi_i(t) = \frac{1}{\epsilon^3} \int_{M_i} d^3x \, \phi(\mathbf{x}, t) \; , \tag{2.36}$$

dove l'integrazione è sulla i^{ma} cella di dimensione ϵ^3.

Su questo reticolo discreto, le derivate spaziali dei campi devono essere sostituite dalle differenze dei valori dei campi in due celle contigue; la Lagrangiana è perciò data da:

$$L = \int d^3x \, \mathcal{L} \xrightarrow{\text{discr}} \sum_i \epsilon^3 \mathcal{L}_i \left(\phi_i(t), \phi_{i\pm s}(t), \dot{\phi}_i(t) \right) \; , \tag{2.37}$$

dove $\dot{\phi}_i(t)$ è la media della derivata temporale di ϕ sulla i^{ma} cella, e $\phi_{i\pm s}(t)$ è il valor medio del campo nella cella contigua.

Gli impulsi coniugati alle $\phi_i(t)$ sono:

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i(t)} = \epsilon^3 \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\phi}_i(t)} \equiv \epsilon^3 \pi_i(t) \; . \tag{2.38}$$

L'Hamiltoniana del sistema discreto è allora data da:

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L \\ &= \sum_i \epsilon^3 \left(\pi_i(t) \dot{\phi}_i(t) - \mathcal{L}_i \right) \\ &= \sum_i \epsilon^3 \mathcal{H}_i(\pi_i, \phi_i, \phi_{i\pm s}) \; . \end{aligned} \tag{2.39}$$

Al limite per $\epsilon^3 \to 0$, il campo coniugato a $\phi(x)$ è definito da:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \; . \tag{2.40}$$

La Lagrangiana e l'Hamiltoniana diventano:

$$L(t) \;\; = \;\; \int d^3x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\rho \phi) \; , \tag{2.41}$$

$$H \;\; = \;\; \int d^3x \, \mathcal{H}(\S) \; , \tag{2.42}$$

dove le integrazioni sono estese a tutto lo spazio per t fissato, e la densità di Hamiltoniana $\mathcal{H}$ è definita da:

$$\mathcal{H}(\S) = \pi(\S)\not\forall(\S) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\rho \phi) \; . \tag{2.43}$$

Si può quindi approssimare la teoria interpretando le coordinate e gli impulsi coniugati della approssimazione discreta, come operatori di Heisenberg, e sottoponendoli alle usuali regole di commutazione a tempi uguali che, nel limite al continuo, assumono la forma:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i \, \hbar \, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \; . \tag{2.44}$$

Con queste prescrizioni è possibile estendere al formalismo della teoria dei campi la formula (2.21) ottenuta nel paragrafo precedente, che esprime l'operatore di evoluzione temporale in termini dell'integrale di cammino [13]:

$$\langle \phi_f(\mathbf{x}) | U(t_i, t_f) | \phi_i(\mathbf{x}) \rangle =$$

$$= \int d\phi_{N-1} \cdots d\phi_1 \quad \frac{\epsilon^3}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon^3 [\pi_N(\phi_N - \phi_{N-1}) - \mathcal{H}(\pi_N, \phi_{N-\infty}) \cdot \sqcup]} d\pi_N$$

$$\times \quad \frac{\epsilon^3}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon^3[\pi_{N-1}(\phi_{N-1}-\phi_{N-2})-\mathcal{H}(\pi_{\mathcal{N}-\infty},\phi_{\mathcal{N}-\in})\cdot\sqcup]}d\pi_{N-1}$$

$$\cdots\times \quad \frac{\epsilon^3}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon^3[\pi_1(\phi_1-\phi_0)-\mathcal{H}(\pi_\infty,\phi_\imath)\cdot\sqcup]}d\pi_1 \; . \qquad (2.45)$$

Nel limite al continuo, questa espressione diventa:

$$\langle\phi_f(\mathbf{x})|U(t_i,t_f)|\phi_i(\mathbf{x})\rangle =$$

$$= \int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left[\pi(\vec{x},t)\dot\phi(\vec{x},t)-\mathcal{H}(\vec{\S},\sqcup)\right]d^3x\,dt}\prod_t \frac{d\pi(\mathbf{x},t)}{2\pi\hbar}\,d\phi(\mathbf{x},t)\; . \qquad (2.46)$$

Se, in particolare, si considera un sistema in cui la densità di Hamiltoniana sia quadratica negli impulsi coniugati, come, ad esempio, nel caso di un campo scalare neutro descritto dalla densità di Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\infty}{\in}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \frac{\Updownarrow^\in}{\in}\phi^\in - \mathcal{V}(\phi)\; , \qquad (2.47)$$

si può considerare la separazione nelle variabili ϕ e π, e l'elemento di matrice dell'operatore di evoluzione temporale diventa:

$$\begin{aligned}\langle\phi_f(\mathbf{x}),t_f|\phi_i(\mathbf{x}),t_i\rangle &= \langle\phi_f(\mathbf{x})|e^{-i\mathcal{H}(\sqcup_\lceil-\sqcup_\rangle)}|\phi_i(\mathbf{x})\rangle \\ &= \frac{1}{N}\int e^{i\int_{x_i}^{x_f}\mathcal{L}(\phi,\dot\phi)\lceil^\triangle\S}\prod_x d\phi(x) \\ &= \int\mathcal{D}[\phi(\S)]\;\rceil^{\rangle\mathcal{I}[\phi(\S)]}\; . \qquad (2.48)\end{aligned}$$

In teoria dei campi, tutte le quantità fisiche, e in particolare i propagatori di Feynman, sono derivabili dalla ampiezza di transizione da vuoto a vuoto in presenza di sorgenti esterne $J(\mathbf{x},t)$ [14]. Questa ampiezza, che indichiamo con $W[J]$, può essere calcolata tramite la (2.48) aggiungendo alla Lagrangiana un termine:

$$\int d^3x\, J(\mathbf{x},t)\, \phi(\mathbf{x},t) \tag{2.49}$$

nel limite $t_i \to -\infty$ e $t_f \to \infty$; riconsiderando l'espressione generale:

$$W[J] = \int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}[\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathcal{H}(\S)+\mathcal{J}(\S)\phi(\S)]\lceil\sqcup\lceil\ni\S}\,. \tag{2.50}$$

Il funzionale $W[J]$ è in generale un integrale oscillatorio e mal definito anche nell'approssimazione discreta del reticolo. Esistono due modi per risolvere questo problema:

1. porre un fattore di convergenza del tipo $e^{-\beta\phi^2}$ con $\beta > 0$;

2. definire $W[J]$ nello spazio euclideo, ponendo $x^0 \to -ix^4$, per cui, nella versione euclidea $W_E[J]$, l'esponente dell'integrando è definito negativo. Recenti progressi in teoria dei campi indicano infatti che, se si può costruire una teoria nello spazio euclideo che soddisfi certi assiomi appropriati, allora esiste una corrispondente teoria di campo nello spazio di Minkowski, ottenuta come continuazione analitica della prima.

Capitolo 3

GLI ISTANTONI

In generale, gli integrali di cammino non possono essere calcolati in modo esatto. Si ricorre perciò ad approssimazioni di varia natura.

La più diffusa è la teoria delle perturbazioni che, tramite il formalismo dei diagrammi di Feynman, permette di ottenere uno sviluppo asintotico delle ampiezze in funzione delle costanti di accoppiamento delle teorie.

Un diverso metodo, di genere non perturbativo, è dato dalla cosiddetta approssimazione semiclassica. Questo metodo fa ricorso al formalismo euclideo e ad una approssimazione del punto a sella attorno ad una soluzione classica delle equazioni del moto. Affinché il contributo di tale soluzione all'integrale di cammino sia non nullo, essa deve avere, come vedremo tra poco, azione finita.

Le soluzioni classiche localizzate ad azione finita della versione euclidea delle equazioni di campo di un certo modello, vengono dette *istantoni* [15]. A livello classico, gli istantoni non sono molto differenti dalle soluzioni *solitoniche* statiche ottenute dalla versione minkowskiana delle equazioni di campo indipendenti dal tempo. Infatti, nella maggior parte dei casi, gli istantoni di un modello in N dimensioni, sono essenzialmente equivalenti ai solitoni statici dello stesso modello in $N+1$ dimensioni.

Tuttavia, nelle loro conseguenze sulla teoria di campo quantistica corrispondente, gli istantoni sono molto differenti dai solitoni. Mentre i secondi descrivono stati di particelle estese, i primi danno luogo a effetti di tunnelling che possono significativamente influenzare lo stato di vuoto.

Nel seguito ci occuperemo solo degli istantoni, in quanto è la fisica ad essi relativa che sarà utile per lo studio di effetti di tunnelling nell'ambito della gravità quantistica.

Consideriamo più in dettaglio la versione euclidea di una teoria; essa prevede la sostituzione della metrica di Minkowski $g^{\mu\nu}(g^{00} = -1\ ;\ g^{ij} = \delta^{ij})$, con la metrica euclidea $\delta^{\mu\nu}$.

Il quadrivettore spazio-tempo $(x^\mu)_{Min}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, è sostituito da $(x^\mu)_{Euc}$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$. Le componenti di $(x^\mu)_{Euc}$ sono ancora reali, ma la teoria euclidea è invariante per trasformazioni $O(4)$ piuttosto che per trasformazioni lorentziane.

Un sistema euclideo non è equivalente ad un sistema minkowskiano riscritto in termini di differenti coordinate. Per esempio, mentre $(x^\mu)_{Min}$ ha quattro componenti reali con $-(x^0)^2 + \mathbf{x}^2$ invariante, $(x^\mu)_{Euc}$ ha ancora quattro componenti reali, ma con $\sum_{\mu=1}^4 (x^\mu)^2$ invariante. I due sistemi sono fisicamente differenti; tuttavia è possibile pensare al sistema euclideo come alla continuazione analitica del sistema minkowskiano. Se prendiamo la coordinata tempo reale $ct = x^0$ del sistema di Minkowski e consideriamo la continuazione a valori immaginari, allora:

$$(x^4)_{Euc} \equiv -i(x^0)_{Min} = -ict$$

può servire come quarta componente reale del vettore euclideo, con le restanti coordinate x^1, x^2, x^3 invariate.

Nello spazio minkowskiano, dove il tensore metrico ha "segnatura" $(- + ++)$, bisogna distinguere tra vettori controvarianti x^μ e vettori covarianti $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$. Nello spazio piatto euclideo, invece, dato che il tensore metrico è $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$, con "segnatura" $(+ + ++)$, i vettori covarianti e controvarianti sono identici componente per componente e non è necessario distinguere tra i due.

L'azione euclidea è definita come $(-i)$ volte la continuazione dell'azione minkowskiana:

$$I_{Euc} = -i(I_{Min})_{cont} \ . \tag{3.1}$$

Il fattore extra $(-i)$ non influenza le equazioni classiche, ma è introdotto per convenienza nel contesto quantistico.

Come esempio, consideriamo il sistema di Klein-Gordon minkowskiano che è definito dall'azione:

$$I_{Min} = \int dx^0 \int d^3x \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^0}\right)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \ . \tag{3.2}$$

L'equazione del moto per tale campo è, come è noto:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\phi - m^2\phi = 0 \ . \tag{3.3}$$

Per ottenere il corrispondente sistema euclideo, consideriamo la continuazione:

$$ct \to -ix^4 \ ;$$

perciò:

$$\begin{aligned} I_{Min} &= \int -i\,dx^4 \int d^3x\,\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial(-ix^4)}\right)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right] \\ &= i\left\{\int dx^4 \int d^3x\,\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x^4}\right)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right]\right\} \\ &= iI_{Euc} \ , \end{aligned} \tag{3.4}$$

dove:

$$I_{Euc} = \int dx^4 \int d^3x \, \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x^4} \right)^2 + (\boldsymbol{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] \qquad (3.5)$$

è l'azione euclidea, che dà le equazioni di campo:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2} + \boldsymbol{\nabla}^2 \right) \phi - m^2 \phi = 0 \; . \qquad (3.6)$$

A differenza dell'equazione di Klein-Gordon minkowskiana, che contiene un operatore differenziale di tipo iperbolico, quest'ultima contiene un operatore differenziale di tipo ellittico, che ammette un insieme differente di soluzioni non singolari reali.

I sistemi di interesse fisico, naturalmente, sono immersi nello spaziotempo minkowskiano; ci si potrebbe quindi chiedere perché si voglia studiare un sistema fisico nella più artificiale geometria euclidea. Uno dei motivi è che alcuni aspetti delle teorie di campo quantistiche minkowskiane possono essere convenientemente esplorati a partire da soluzioni classiche della versione euclidea delle sue equazioni di campo.

Notevole tra questi aspetti è il fenomeno del tunnelling quantistico tra stati fondamentali degeneri.

3.1 Istantoni in meccanica quantistica

La maggior parte delle soluzioni istantoniche sono non perturbative, cioè non possono essere ottenute a partire dalle soluzioni della corrispondente parte lineare delle equazioni di campo, e quindi trattando i termini non lineari in modo perturbativo.

Per illustrare la fisica degli istantoni, consideriamo un semplice esempio in meccanica quantistica: il moto di una particella di massa m che si muove in un potenziale unidimensionale, del tipo mostrato in figura.

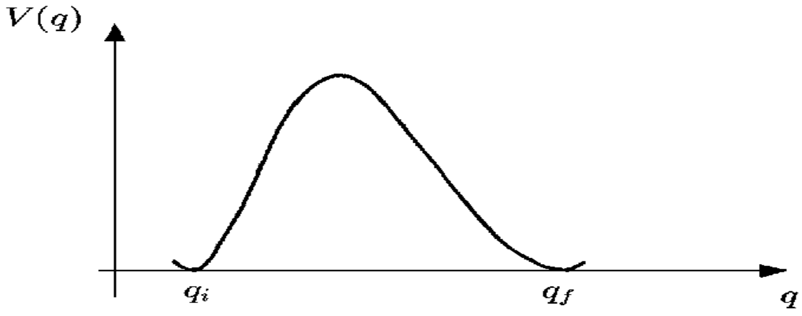

Figura 3.1: Il potenziale $V(q)$.

Classicamente questo moto è descritto dalla Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \ . \tag{3.7}$$

Dal punto di vista quantistico, a questo sistema è associata l'Hamiltoniana:

$$H(P, Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q) \ . \tag{3.8}$$

Se consideriamo il fenomeno del tunnelling attraverso una barriera di potenziale definita dalla funzione $V(q)$, l'ampiezza di transizione è un risultato noto in meccanica quantistica, dato dalla approssimazione di Wentzel, Kramers, Brillouin (WKB):

$$T(E) = e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{q_i}^{q_f} dq \sqrt{2m[V(q)-E]}} \, [1 + O(\hbar)] \ , \tag{3.9}$$

dove $T(E)$ rappresenta l'ampiezza di transizione della barriera e dove q_i e q_f sono i punti di inversione classici all'energia E.

Come è noto, questa espressione è ottenuta a partire da una approssimazione semiclassica, cioè una approssimazione di piccolo $\hbar$.

Questa approssimazione è applicabile quando la lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = h/p$ associata alla particella è piccola rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema in esame; in questo caso le proprietà del sistema sono vicine a quelle classiche [4].

Questo tipo di approssimazione viene effettuato considerando, nella equazione di Schrödinger indipendente dal tempo:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + [E - V(q)]\,\psi = 0 \tag{3.10}$$

la sostituzione formale:

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}S(q)}\ ; \tag{3.11}$$

si cerca, per la funzione $S(q)$, uno sviluppo in serie di potenze di $\hbar$:

$$S = S_0 + \frac{\hbar}{i}S_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_2 + \cdots\ . \tag{3.12}$$

Allora, poiché il sistema è supposto semiclassico nelle sue proprietà, solamente i primi termini di questo sviluppo danno un contributo alla funzione d'onda.

Applicando questo tipo di procedimento al calcolo della probabilità di tunnelling attraverso una barriera di potenziale, si arriva alla già citata approssimazione WKB (3.9), valida per potenziali lentamente variabili e lontano dai punti di inversione.

Ciononostante il fenomeno del tunnelling non può essere visto in alcun ordine di una teoria delle perturbazioni, in quanto l'ampiezza $T(E)$ si annulla più rapidamente di ogni potenza di $\hbar$.

Poiché, per il problema in esame, conosciamo l'ampiezza di tunnelling calcolata con un metodo noto (approssimazione WKB), cercheremo di riderivare alcune proprietà formali di questo sistema tramite i metodi basati sulla fisica degli istantoni. Lo strumento essenziale sarà la versione euclidea dell'integrale di cammino di Feynman [16, 17].

La propagazione di una particella in meccanica quantistica, nella formulazione dell'integrale di cammino espresso nello spazio delle configurazioni, è descritta, come già ricavato nel precedente capitolo, dal kernel:

$$\begin{aligned} K(q_f, q_i; t_f - t_i) &= \langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H (t_f - t_i)} | q_i \rangle \\ &= \int \mathcal{D}[\amalg(\sqcup)]\ ]^{\frac{\rangle}{\langle} \mathcal{I}[\amalg(\sqcup)]} , \end{aligned} \tag{3.13}$$

dove l'azione minkowskiana è:

$$I = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right] . \tag{3.14}$$

Come sappiamo, K è l'ampiezza di transizione per cui una particella nel potenziale $V(q)$ osservata in q_i all'istante t_i, sarà osservata in q_f all'istante t_f.

La versione euclidea di questa espressione si ottiene tramite la rotazione di Wick dell'asse dei tempi:

$$t \rightarrow it = \tau \qquad \Leftrightarrow \qquad t = -i\tau . \tag{3.15}$$

In questo caso l'azione diventa:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} -i\, d\tau \left[-\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{-i\, d\tau} \right)^2 + V(q) \right] \\ &= i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right] \\ &= i\, I_E , \end{aligned} \tag{3.16}$$

dove:

$$I_E = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right] \tag{3.17}$$

è l'azione euclidea; perciò:

$$e^{\frac{i}{\hbar} I[q(t)]} \to e^{\frac{i}{\hbar} i I_E[q(\tau)]} = e^{-I_E[q(\tau)/\hbar]} \; . \tag{3.18}$$

Inoltre:

$$H(t_f - t_i) \to H[-i(\tau_f - \tau_i)] = -iH(\tau_f - \tau_i) \; , \tag{3.19}$$

da cui:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)} \to e^{-\frac{i}{\hbar}(-i) H(\tau_f - \tau_i)} = e^{-H(\tau_f - \tau_i)/\hbar} \; , \tag{3.20}$$

e quindi l'ampiezza di transizione diventa:

$$\begin{aligned} K_E(q_f, q_i; \tau_f - \tau_i) &= \langle q_f | e^{-H(\tau_f - \tau_i)/\hbar} | q_i \rangle \\ &= \int \mathcal{D}[\Pi(\tau)] \; \rceil^{-\mathcal{I}_\mathcal{E}[\Pi(\tau)]/\langle} \; . \end{aligned} \tag{3.21}$$

L'espressione $\langle q_f | e^{-H(\tau_f - \tau_i)/\hbar} | q_i \rangle$ è interessante perché, se consideriamo un insieme completo di autostati di energia:

$$H|n\rangle = E_n |n\rangle \; , \tag{3.22}$$

allora:

$$\begin{aligned} \langle q_f | e^{-H(\tau_f - \tau_i)/\hbar} | q_i \rangle &= \sum_n \langle q_f | e^{-H(\tau_f - \tau_i)/\hbar} | n \rangle \langle n | q_i \rangle \\ &= \sum_n e^{-E_n(\tau_f - \tau_i)/\hbar} \langle q_f | n \rangle \langle n | q_i \rangle . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Dunque, per grandi intervalli $\tau_f - \tau_i$, il termine dominante di questa espressione è quello corrispondente alla funzione d'onda dell'autostato di minore energia (stato fondamentale).

L'ultimo membro della (3.21), cioè l'integrale di Feynman nello spazio euclideo è altrettanto interessante, perché può essere facilmente calcolato nel limite semiclassico, tramite l'approssimazione di fase stazionaria, anche nota come metodo del punto a sella [18].

Secondo questa approssimazione, se $(I_E)_{cl}$ è l'azione classica – cioè l'azione per cui è $\delta I_E = 0$ – allora, nel limite di piccolo $\hbar$ l'integrale è asintoticamente uguale a:

$$\int \mathcal{D}[q(\tau)]\; e^{-I_E[q(\tau)]/\hbar} \simeq \mathcal{C} \times e^{-(I_E)_{cl}/\hbar} \, . \tag{3.24}$$

Applichiamo ora questa approssimazione al potenziale introdotto in precedenza, denotando i suoi minimi con q_i e q_f.

L'azione euclidea è data dalla (3.17):

$$I_E = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right] \, .$$

Il moto classico è descritto dalle equazioni di Euler-Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial L_E}{\partial q} & = & V'(q) \\ \dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial L_E}{\partial \dot{q}} \right) & = & m\ddot{q} \; ; \end{array} \right. \tag{3.25}$$

perciò:

$$-m \frac{d^2 q}{d\tau^2} + V'(q) = 0 \, . \tag{3.26}$$

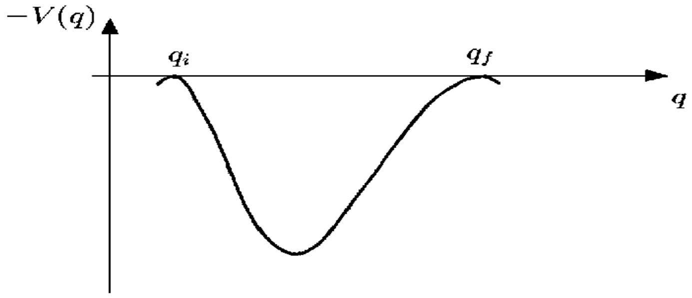

Figura 3.2: Il potenziale $-V(q)$.

Questa è l'equazione del moto per una particella di massa m che si muove nel potenziale $-V(q)$; perciò:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - V(q) \, . \tag{3.27}$$

Due soluzioni ovvie sono quelle in cui la particella sta fissa su uno dei due massimi q_i o q_f.

Tuttavia c'è un'altra soluzione potenzialmente interessante; quella in cui la particella inizia il moto in uno dei due massimi, per esempio q_i al tempo τ_i, e arriva alla cima del massimo opposto q_f al tempo τ_f.

Poiché nella approssimazione che utilizziamo, dobbiamo considerare un intervallo di tempo $\tau_f - \tau_i$ grande, focalizzeremo l'attenzione sulla soluzione per cui la particella passa da un massimo all'altro in un intervallo di tempo infinito; cioè consideriamo una soluzione dell'equazione del moto per $E = 0$. Perciò:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - V(q) = 0 \, , \tag{3.28}$$

cioè:

$$\frac{dq}{d\tau} = \sqrt{\frac{2}{m} V(q)} \, . \tag{3.29}$$

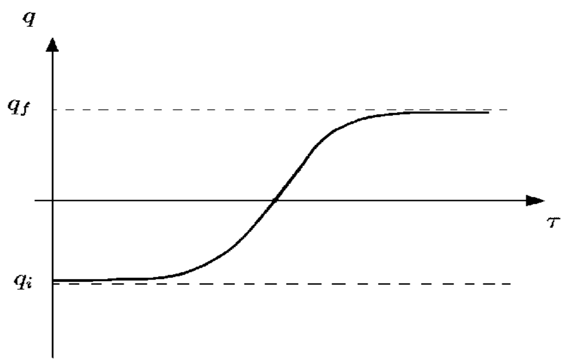

Figura 3.3: L'istantone.

Equivalentemente:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau = \int_{q_i}^{q_f} dq \left[\frac{2}{m}V(q)\right]^{-\frac{1}{2}} , \tag{3.30}$$

ossia:

$$\tau_f - \tau_i = \int_{q_i}^{q_f} dq \left[\frac{2}{m}V(q)\right]^{-\frac{1}{2}} . \tag{3.31}$$

Tale soluzione è chiamata un *istantone*.

A questo punto è facile derivare una semplice espressione per $(I_E)_{cl}$, cioè l'azione dell'istantone:

$$\begin{aligned} (I_E)_{cl} &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right] \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\, m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 \\ &= m\int_{q_i}^{q_f} dq\, \frac{dq}{d\tau} \\ &= \int_{q_i}^{q_f} dq\sqrt{2mV(q)}\, , \end{aligned} \tag{3.32}$$

e, in definitiva, nell'approssimazione di fase stazionaria:

$$\langle q_f|e^{-H(\tau_f-\tau_i)/\hbar}|q_i\rangle = \int \mathcal{D}[\amalg(\tau)]\ \rceil^{-\mathcal{I}[\amalg(\tau)]/\langle}$$

$$\begin{aligned} &\simeq e^{-(I_E)_{cl}/\hbar} \\ &= e^{-\frac{1}{\hbar}\int_{q_i}^{q_f} dq\sqrt{2mV(q)}} . \end{aligned} \tag{3.33}$$

Quest'ultima espressione costituisce il risultato fondamentale di tutta la discussione, in quanto è lo stesso integrale che appare nella formula della penetrazione in una barriera di potenziale, calcolata col metodo WKB, ottenuta però questa volta con il metodo istantonico.

Capitolo 4

L'INTEGRALE DI FEYNMAN IN GRAVITÀ QUANTISTICA

La teoria della relatività generale è una teoria completa: infatti essa prescrive non solo le equazioni che governano il campo gravitazionale, ma anche il moto dei corpi sotto l'influenza di questo campo.

Tuttavia non dà una descrizione completamente soddisfacente dell'universo osservato, per le due seguenti ragioni:

1. essa tratta il campo gravitazionale in un modo puramente classico, laddove gli altri campi osservati sembrano essere quantizzati;

2. alcuni teoremi [19] hanno mostrato che essa porta inevitabilmente a singolarità dello spazio-tempo. Le singolarità vengono predette all'inizio dell'espansione attuale dell'universo (il "*big-bang*") e nel collasso delle stelle per formare buchi neri. Nelle singolarità, la relatività generale classica non è più applicabile, e la teoria sarebbe dunque incompleta perché non fornirebbe condizioni al contorno per le equazioni di campo nei punti singolari.

Per entrambe queste ragioni, è auspicabile lo sviluppo di una teoria quantistica della gravità. Non ci sono prescrizioni ben definite per derivare una tale teoria dalla relatività generale classica, ma una tale teoria dovrebbe essere:

- completa
- consistente
- riconducibile alla relatività generale classica per corpi macroscopici e piccole curvature dello spazio-tempo.

Purtroppo non è ancora stata formulata una teoria che soddisfi questi tre requisiti, soprattutto per quanto riguarda il primo e il secondo.

Tentativi di quantizzare la gravità ignorando le proprietà topologiche e semplicemente tracciando diagrammi di Feynman corrispondenti a perturbazioni su uno sfondo di spazio-tempo piatto, non hanno avuto successo: sembra che ci sia una sequenza infinita di parametri di rinormalizzazione indeterminati. Il motivo è che in relatività generale classica, la teoria delle perturbazioni ha un campo limitato di validità. Per esempio, la teoria non può essere trattata come una perturbazione attorno ad uno spazio piatto.

Tuttavia sforzi in varie direzioni hanno portato a risultati parziali che sono così importanti che è difficile credere che non faranno parte di un quadro completo finale.

Il principale approccio per quantizzare la gravità è dato dall'integrale di cammino di Feynman nella formulazione euclidea [20]. Il punto di partenza per questo approccio è la generalizzazione dell' idea di Feynman secondo la quale si può rappresentare l'ampiezza di transizione:

$$\langle {}^3g_f, \phi_f, {}^3M_f | {}^3g_i, \phi_i, {}^3M_i \rangle \tag{4.1}$$

da uno stato iniziale con metrica ${}^3g_i$ e campi di materia ϕ_i su una superficie ${}^3M_i$, ad uno stato finale con una metrica ${}^3g_f$ e campi di materia ϕ_f su una superficie ${}^3M_f$, come una somma su tutte le configurazioni g e ϕ che assumono i dati valori sulle superfici al contorno ${}^3M_i$ e ${}^3M_f$, cioè:

$$\langle {}^3g_f, \phi_f, {}^3M_f | {}^3g_i, \phi_i, {}^3M_i \rangle = \int \mathcal{D}[\}, \phi]\;]^{\rangle \mathcal{I}[\}, \phi]/\langle} \,. \tag{4.2}$$

Nella (4.2):

$$\mathcal{D}[\}, \phi]$$

è una misura sullo spazio di tutte le configurazioni g e ϕ, e:

$$I[g, \phi]$$

è l'azione dei campi.

Nella formula di sopra abbiamo implicitamente assunto o che le varietà ${}^3M_i$ e ${}^3M_f$ e la regione tra esse compresa siano compatte, nel qual caso si avrebbe un universo chiuso, o che i campi gravitazionali e di materia si annullino in modo opportuno all'infinito spaziale, nel qual caso lo spazio sarebbe asintoticamente piatto.

4.1 L'azione gravitazionale

La teoria di Einstein non solo ci dice che lo spazio-tempo è curvo, ma specifica anche a quanto ammonta la sua curvatura.

Più precisamente, essa fornisce un insieme di equazioni di campo di estrema eleganza e compattezza, che correlano la curvatura dello spazio e del tempo con la distribuzione di materia e di energia nello spazio.

In forma covariante esse sono date da:

$$G_{\mu\nu} = C\, T_{\mu\nu} \;, \tag{4.3}$$

dove $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso. Tale tensore dipende dalla distribuzione di materia e di energia di campo (esclusa quella gravitazionale). Esso influenza le proprietà geometriche dello spazio – legate agli aspetti gravitazionali – che sono descritte dal tensore di Ricci:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \,, \tag{4.4}$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, $R_{\mu\nu}$ è il tensore di curvatura di Riemann contratto $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$, e $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$ è il tensore di curvatura di Riemann:

$$R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\beta} \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\tau\nu} \Gamma^{\tau}_{\beta\mu} \,. \tag{4.5}$$

Il tensore di Riemann dipende solo dalle componenti del tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, attraverso i simboli di Christoffel del I tipo definiti da:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} \left(\partial_\beta g_{\gamma\tau} + \partial_\gamma g_{\beta\tau} - \partial_\tau g_{\beta\gamma} \right). \tag{4.6}$$

La traccia del tensore contratto $R_{\mu\nu}$:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

è lo scalare di curvatura.

La proporzionalità tra tensore energia-impulso e tensore di Ricci è espressa, in unità di Lorentz-Heaviside (sistema di Gauss razionalizzato), dalla costante:

$$C = -\frac{8\pi G}{c^2} \,,$$

dove G è la costante di gravitazione universale.

Le equazioni di campo gravitazionali possono essere facilmente espresse in una forma variazionale. Infatti, consideriamo l'azione:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{c^2}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,(R+L_m) \\
&= \frac{c^2}{16\pi G}\int d^4x\,\mathcal{L}\ , \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

dove:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\}}\,(\mathcal{R}+\mathcal{L}_{\Updownarrow})$$

è la densità di Lagrangiana. È noto che:

$$\delta\int_M d^4x\,\sqrt{-g}\,R = \int_M d^4x\,\sqrt{-g}\,G_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}. \qquad (4.8)$$

Inoltre, se:

$$\sqrt{-g}\,L_m$$

è una densità scalare che dipende dalle componenti del tensore metrico $g^{\mu\nu}$ e da eventuali altre variabili di campo (potenziali elettromagnetici, campi di velocità etc.), tale che:

$$\delta\int_M d^4x\,\sqrt{-g}\,L_m = -C\int_M d^4x\,\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\ , \qquad (4.9)$$

allora, la condizione che l'azione sia stazionaria per variazioni della metrica che si annullano su ∂M (il contorno della regione compatta M), equivale a risolvere le equazioni di Euler-Lagrange, relative ai campi $g^{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})}\right) = 0\ ; \qquad (4.10)$$

queste portano direttamente alle equazioni di Einstein (4.3).

La variazione dell'azione I rispetto al tensore metrico non descrive però completamente il sistema fisico, ma solo i suoi aspetti gravitazionali. È però possibile scegliere l'espressione L_m in modo tale che la variazione di I rispetto alle variabili di campo addizionali associate a $T_{\mu\nu}$, dia luogo alle equazioni di campo relative a queste variabili. In questo caso il principio variazionale esteso $\delta I = 0$, dà una descrizione completa del sistema fisico.

Tuttavia, limitandosi alla sola variazione della metrica, l'azione non sarà un estremo se si hanno variazioni di $g^{\mu\nu}$ che si annullano sul contorno, ma le cui derivate normali $\partial_\rho g^{\mu\nu}$ non si annullano sullo stesso [21]. La ragione di ciò è che lo scalare di curvatura R contiene termini lineari nelle derivate seconde della metrica e perciò, integrando per parti, la variazione in questi termini può essere convertita in un integrale sul bordo ∂M che contiene le derivate normali della metrica nel contorno.

Per eliminare questo integrale di superficie e ottenere un'azione che sia stazionaria per soluzioni delle equazioni di Einstein rispetto alle variazioni della metrica, bisogna aggiungere all'azione un termine della forma:

$$\frac{c^2}{8\pi G}\int_{\partial M} d^3x\,\sqrt{\pm\,{}^3g}\,K\ , \tag{4.11}$$

dove K è la traccia della seconda forma fondamentale (o curvatura estrinseca [6]) del contorno, ${}^3g$ è la metrica in tre dimensioni indotta sul contorno, il cui segno è positivo o negativo a seconda che il contorno sia tipo-spazio o tipo-tempo.

La necessità di aggiungere il termine di superficie alla azione nell'approccio dell'integrale di Feynman, si può vedere considerando la situazione mostrata in figura, dove si considera la transizione da una metrica

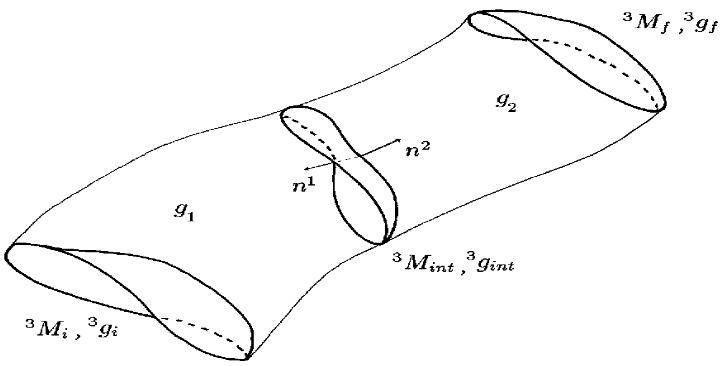

Figura 4.1: Le metriche al contorno.

^3g_i sulla superficie ^3M_i alla metrica $^3g_{int}$ sulla superficie $^3M_{int}$, e infine alla metrica ^3g_f sulla superficie ^3M_f.

Si vuole che l'ampiezza dallo stato iniziale a quello finale sia ottenuta sommando su tutti gli stati sulla superficie intermedia $^3M_{int}$, cioè:

$$\langle ^3g_f, {}^3M_f | {}^3g_i, {}^3M_i \rangle = \sum_{^3g_{int}} \langle ^3g_f, {}^3M_f | {}^3g_{int}, {}^3M_{int} \rangle \langle ^3g_{int}, {}^3M_{int} | {}^3g_i, {}^3M_i \rangle \, . \tag{4.12}$$

Questo sarà vero se e solo se:

$$I[g_1 + g_2] = I[g_1] + I[g_2] \, , \tag{4.13}$$

dove g_1 è la metrica tra ^3M_i e $^3M_{int}$, e g_2 è la metrica tra $^3M_{int}$ e ^3M_f e infine $[g_1 + g_2]$ è la metrica sulla regione tra ^3M_i e ^3M_f.

Poiché la derivata normale di g_1 in $^3M_{int}$ è in generale diversa da quella di g_2 in $^3M_{int}$, la metrica $[g_1 + g_2]$ avrà una funzione δ di Dirac nel tensore di Ricci, di valore $2(K^1 - K^2)$, dove K^1 e K^2 sono le seconde forme fondamentali sulla superficie $^3M_{int}$ nelle metriche g_1 e g_2 rispettivamente, definite rispetto alla normale diretta nel futuro. Questo significa che la relazione (4.13) sarà vera se e solo se l'azione è data da:

$$I = \frac{c^2}{16\pi G} \int_M d^4x \, \sqrt{-g} \, (R + L_m) + \frac{c^2}{8\pi G} \int_{\partial M} d^3x \, \sqrt{\pm\, ^3g} \, K \, . \tag{4.14}$$

4.2 Gli istantoni gravitazionali

Per metriche lorentziane g, con "segnatura" $(-+++)$ e campi di materia ϕ reali, l'azione $I[g,\phi]$ è reale e perciò l'integrale di Feynman oscilla e non converge.

Come in meccanica quantistica e in teoria dei campi, si può risolvere questa difficoltà utilizzando la formulazione euclidea dell'integrale di cammino. In tal modo, introducendo una coordinata tempo immaginaria $\tau = i\,t$, l'ampiezza di transizione (4.2) precedentemente considerata, diventa:

$$\langle\, {}^3g_f, \phi_f, {}^3M_f \,|\, {}^3g_i, \phi_i, {}^3M_i \rangle = \int \mathcal{D}[\},\phi]\, \rceil^{-\mathcal{I}_\mathcal{E}[\},\phi]/\langle}\,, \tag{4.15}$$

dove $I_E[g,\phi]$ rappresenta l'azione euclidea relativa a tutte le metriche definite positive nella continuazione analitica della varietà.

Come nel semplice esempio in meccanica quantistica considerato nel capitolo precedente, ci aspettiamo che il contributo dominante all'integrale di cammino nella versione euclidea, sia dato da metriche e campi vicine a quelle che rappresentano un estremo dell'azione, che siano cioè una soluzione delle equazioni di campo classiche. In effetti ciò è necessario se si vuole riottenere la teoria gravitazionale classica nel limite di sistemi macroscopici e in regioni dello spazio con piccola curvatura.

Utilizzando una approssimazione semiclassica analoga a quella discussa in precedenza, l'ampiezza di transizione (4.15) si può scrivere:

$$\langle\, {}^3g_f, \phi_f, {}^3M_f \,|\, {}^3g_i, \phi_i, {}^3M_i \rangle \simeq e^{-(I_E)_{cl}/\hbar}\,. \tag{4.16}$$

Un tale approccio costituisce una estensione alla teoria della gravitazione delle tecniche istantoniche già discusse, e permette lo studio di fenomeni gravitazionali di tunnelling quantistico, altrimenti proibiti da un punto di vista classico.

Per esempio, le variazioni della topologia spaziale della metrica, come quelle che si possono verificare nel decadimento di un buco nero in un sistema di buchi neri multipli, rappresentano processi classicamente proibiti [1], in quanto la topologia delle superfici tipo-spazio di Cauchy è conservata nell'evoluzione temporale di una teoria classica, come quella di Einstein. Tuttavia un approccio semiclassico della versione euclidea dell'integrale di Feynman permette di studiare questi fenomeni da un punto di vista quantistico, secondo una generalizzazione della formula WKB (3.9) discussa in precedenza.

Un istantone gravitazionale è definito come una soluzione regolare delle equazioni di campo gravitazionali euclidee, ad azione finita. Esso connette due regioni: una iniziale, con metrica ${}^3g_i$ e sezione spaziale ${}^3M_i$, ed una finale, con metrica ${}^3g_f$ e sezione ${}^3M_f$. Come nel caso discusso per la meccanica quantistica, queste regioni devono essere separate da un intervallo tipo-tempo infinito, che deve essere ruotato nel piano complesso tramite una rotazione di Wick $\tau = it$. Le geometrie che sono connesse da tale storia di tunnelling, sono contenute nella quadri-geometria dell'istantone , in modo che gli stati iniziale e finale costituiscano le sue regioni asintotiche.

Per quanto detto è chiaro che non è sempre possibile ottenere degli istantoni gravitazionali che connettano due stati arbitrari [22]. Oltre al fatto che l'azione gravitazionale euclidea non è sempre definita positiva, si verifica che la continuazione euclidea delle soluzioni di alcune equazioni di

[1]In effetti, complicazioni topologiche localizzate, come i cunicoli ("*wormholes*") di Wheeler [23], sono possibili anche a livello classico, ma solo in vicinanza delle singolarità, dove, come è noto, le leggi della fisica non sono più applicabili.

campo gravitazionali, è regolare solo se la coordinata tempo immaginaria τ ha periodo finito, come per esempio si verifica nel caso della metrica di Schwarzschild.

Tuttavia recentemente [44] è stato analizzato un caso interessante di istantoni gravitazionali, dati dalle soluzioni euclidee di buchi neri multipli in relatività generale e in presenza di un campo di Maxwell, cioè i buchi neri estremi di Reissner-Nordström (che descriveremo, assieme a quelli di Schwarzschild, nel prossimo capitolo). Nella continuazione analitica, il tempo euclideo non ha periodo finito, e ciò rende possibile l'esistenza di istantoni con regioni asintotiche di topologia differente.

Nel seguito considereremo una interessante generalizzazione nell'ambito della teoria delle corde di queste soluzioni di buchi neri multipli.

Capitolo 5

BUCHI NERI CARICHI IN RELATIVITÀ GENERALE

5.1 L'elemento di linea di Schwarzschild

Le equazioni di campo di Einstein per lo spazio privo di materia si possono ottenere a partire dall'azione:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g}\, R \ , \tag{5.1}$$

e variando rispetto alle componenti del tensore metrico; le equazioni risultanti:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{5.2}$$

sono però non lineari, e perciò difficili da risolvere.

Tuttavia, imponendo delle condizioni di simmetria – dettate da requisiti fisici – sull'elemento di linea, si possono semplificare notevolmente le equazioni di campo in casi particolari.

Un tale caso è l'elemento di linea indipendente dal tempo e sfericamente simmetrico; le equazioni di campo risultanti sono state risolte esattamente da Schwarzschild nel 1916.

Questa soluzione è di particolare importanza poiché corrisponde al problema fondamentale ad un corpo della astronomia classica. In effetti le sole verifiche sperimentali attendibili delle equazioni di campo (5.2), come la precessione del perielio dell'orbita di Mercurio, il red-shift gravitazionale e l'incurvamento dei raggi luminosi in presenza di un campo gravitazionale, sono basati sull'elemento di linea di Schwarzschild [1].

La richiesta che una soluzione per le equazioni di campo (5.2), espressa in coordinate polari sferiche, sia indipendente dal tempo e radialmente simmetrica, è esprimibile dall'elemento di linea:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}c^2dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\ . \tag{5.3}$$

La condizione aggiuntiva che tale soluzione tenda asintoticamente alla metrica di Minkowski (spazio piatto) a grandi distanze (condizione di regolarità asintotica), è esprimibile dalle condizioni al contorno:

$$\lim_{r\to\infty} \nu(r) = \lim_{r\to\infty} \lambda(r) = 0\ . \tag{5.4}$$

Dal tensore metrico corrispondente:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{\nu(r)} & & & \\ & e^{\lambda(r)} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

si ricavano facilmente le componenti $R_{\mu\nu}$, per cui, applicando le (5.2), si ricava che l'elemento di linea deve avere la forma:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\ , \tag{5.6}$$

dove:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{5.7}$$

è il raggio di Schwarzschild, essendo M la massa del corpo che genera il campo.

L'importanza di questo elemento di linea è che esso non rappresenta solo il campo gravitazionale di una stella (sfericamente simmetrica), ma anche un buco nero sferico neutro.

Si noti che per $r = r_s$ accade qualcosa di anomalo; infatti l'elemento

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$$

tende a zero, mentre l'elemento

$$g_{11} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}$$

diverge. Da quanto detto finora non è chiaro se la singolarità sia insita nella geometria o se sia invece dovuta ad una scelta sbagliata delle coordinate (come per esempio si verifica nel caso dei due poli di una sfera S^2 parametrizzata in coordinate polari sferiche). In casi come questo si controlla se le singolarità possano essere rimosse introducendo un nuovo sistema di coordinate; il criterio più semplice è basato sull'esame della regolarità dei tre invarianti [2]:

$$R = R^{\mu}_{\mu}; \quad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}; \quad R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{5.8}$$

associati al tensore di curvatura; questi sono tutti regolari nella superficie presunta singolare $r = r_s$.

Questo fatto suggerisce che nessuna vera singolarità sia presente, ma piuttosto che sia il solo sistema di coordinate che diventa singolare.

Per meglio comprendere le condizioni fisiche nell'intorno della superficie $r = r_s$, consideriamo le geodetiche più semplici, le radiali, quelle per cui $\vartheta, \varphi = cost.$:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2. \tag{5.9}$$

Nel caso di un fotone è $ds^2 = 0$, (geodetica "*light-like*"); in tal caso la coordinata tempo $t = t(r)$, cioè il tempo misurato da un osservatore a riposo posto all'infinito, è:

$$dt = -\frac{1}{c}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr \ , \tag{5.10}$$

e quindi il fotone, per attraversare la distanza finita:

$$\int_{l(r_0)}^{l(r_s)} dl = \int_{r_0}^{r_s} \sqrt{g_{11}}\, dr = \int_{r_0}^{r_s} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} dr < +\infty \ , \tag{5.11}$$

impiega, per un osservatore distante, un tempo infinitamente lungo:

$$\int_{t(r_0)}^{t(r_s)} dt = -\frac{1}{c}\int_{r_0}^{r_s} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr \to +\infty \ . \tag{5.12}$$

Analoga considerazione vale per una particella materiale ($ds^2 < 0$: geodetica "*time-like*"); in tal caso la funzione $t = t(r)$ è:

$$dt = -\frac{E_\tau}{c}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(-c^2 + E_\tau^2 + c^2\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} dr \ , \tag{5.13}$$

dove:

$$E_\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \ , \tag{5.14}$$

e quindi, integrando nello stesso intervallo:

$$\int_{t(r_0)}^{t(r_s)} dt = -\frac{E_\tau}{c}\int_{r_0}^{r_s} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(-c^2 + E_\tau^2 + c^2\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \to +\infty \ . \tag{5.15}$$

Tuttavia la particella materiale misura un tempo proprio τ (definito da $ds^2 = -c^2 d\tau^2$) che, esplicitando rispetto alla coordinata radiale è :

$$d\tau = -\left(-c^2 + E_\tau^2 + c^2\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} dr \ ; \tag{5.16}$$

integrando nello stesso intervallo:

$$\int_{\tau(r_0)}^{\tau(r_s)} d\tau = -\int_{r_0}^{r_s}\left(-c^2 + E_\tau^2 + c^2\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} dr < +\infty \ . \tag{5.17}$$

Questo è un caso estremo di dilatazione dei tempi, in cui un intervallo di tempo finito è visto come infinito da un osservatore distante.

Perciò, nel momento in cui una particella attraversa la superficie $r = r_s$, non accade nulla di particolare, non essendo presente alcuna singolarità metrica. Ma se la particella emette radiazione, un osservatore distante vedrà la sua luce spostata verso il rosso, poiché la sorgente è sotto l'influenza di un forte campo gravitazionale. Nel momento in cui essa raggiunge l'orizzonte, il red-shift è così forte che la radiazione non è più visibile in alcuna regione dello spettro.

Similmente il tempo proprio misurato da una particella per raggiungere la singolarità $r = 0$ partendo da $r = r_s$ è anch'esso finito:

$$-\int_{r_s}^{0}\left(-c^2 + E_\tau^2 + c^2\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} dr < +\infty \ . \tag{5.18}$$

Perciò una particella all'interno di $r = r_s$ inevitabilmente raggiungerà la singolarità centrale, in cui la densità e la curvatura dello spazio-tempo diventano infinite e le leggi della relatività generale non sono più applicabili.

Inoltre, eventuali segnali mandati dall'interno della superficie $r = r_s$ devono viaggiare verso il futuro temporale ma, all'interno di tale regione, il tempo crescente equivale a distanze radiali decrescenti. Ciò si può vedere considerando, per $r > r_s$ l'intervallo tipo-tempo:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2\, dt^2 < 0 \; ; \tag{5.19}$$

questo, per $r < r_s$, diventa positivo e quindi tipo-spazio, per cui, all'interno di $r = r_s$ le coordinate radiale e temporale si scambiano di ruolo [5].

Dunque, il fotone e qualunque altra particella materiale, una volta arrivati alla superficie $r = r_s$, non hanno alcuna possibilità di emergere; questa superficie è perciò chiamata un *orizzonte degli eventi*. Così, dal punto di vista di un osservatore distante, il collasso gravitazionale genera la comparsa di un corpo "congelato" che non può emettere alcun segnale. Un tale sistema materiale viene chiamato *buco nero*.

5.2 La soluzione di Reissner-Nordström

Anche in considerazione degli sviluppi seguenti è opportuno ricordare i buchi neri carichi di Reissner-Nordström. La corrispondente soluzione esprime il campo esterno statico e sfericamente simmetrico di una distribuzione di massa carica [24].

Le equazioni di campo si possono ottenere, tramite un approccio variazionale, a partire dall'azione di Einstein-Maxwell che, in unità per cui $c = G = \hbar = C = 1$, è:

$$I = \int d^4x\, \sqrt{-g}\, \left[R - \frac{1}{2} F^2\right] \; . \tag{5.20}$$

La variazione rispetto alle componenti del tensore metrico $g^{\mu\nu}$ porta allora alle equazioni di campo generali di Einstein (4.3):

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \; ,$$

dove:

$$T_{\mu\nu} = \left[F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} F_{\rho\tau} F^{\rho\tau} g_{\mu\nu} \right] \tag{5.21}$$

è il tensore energia-impulso dovuto al campo elettromagnetico .

Una coppia delle equazioni di Maxwell si può esprimere nella forma covariante:

$$\{\partial_\lambda F_{\mu\nu}\} = 0 \ , \tag{5.22}$$

dove $\{_{\lambda\ \mu\ \nu}\}$ è l'operatore di antisimmetrizzazione su tutte le permutazioni di (λ, μ, ν). Come è noto, questa relazione esprime il fatto che il tensore di campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ è un tensore antisimmetrico chiuso e, come tale, è anche esatto [1], cioè ammette un potenziale vettore; perciò $F_{\mu\nu}$ può essere scritto nella forma:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ ; \tag{5.23}$$

in tal modo le (5.22) sono automaticamente soddisfatte.

A questo punto, variando l'azione rispetto al potenziale vettore A_μ, si può ottenere in forma covariante la seconda coppia delle equazioni di Maxwell per regioni dello spazio prive di cariche:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \, \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \, F^{\mu\nu} \right) = 0 \ , \tag{5.24}$$

o, in forma più compatta:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{5.25}$$

dove ∇_μ è l'operatore di differenziazione covariante definito da:

$$\nabla_\mu \xi^\nu = \partial_\mu \xi^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} \xi^\rho \ . \tag{5.26}$$

La risoluzione delle equazioni di campo porta allora all'elemento di linea di Reissner-Nordström che, nelle unità usate, si può scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 \\ &\quad +r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\ , \end{aligned} \tag{5.27}$$

dove M è un parametro associato alla massa che crea il campo e Q è un parametro correlato alla carica elettrica o magnetica.

In particolare, nel caso di carica magnetica, che ci interesserà in seguito [1], la soluzione per le componenti angolari del tensore $F_{\mu\nu}$ è data da:

$$F_{ij} = \frac{Q}{r^2}\varepsilon_{ij} \qquad (i,j=(2,3))\ . \tag{5.28}$$

Poiché, per grande r, il termine $\frac{Q^2}{r^2}$ nella metrica può essere ignorato e dato che i corpi celesti in pratica non sono carichi, l'influenza del campo elettromagnetico sulla metrica è trascurabile in astrofisica. Tuttavia l'influenza del termine $\frac{Q^2}{r^2}$ può diventare importante a livello microscopico, quando gli effetti della meccanica quantistica dominano.

Si noti che la soluzione di Reissner-Nordström (5.27) mostra divergenze nelle componenti della metrica in $r=0$ e negli zeri di g_{00}, ossia:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-Q^2}\ . \tag{5.29}$$

Come per la soluzione di Scwarzschild, la singolarità in $r=0$ è una singolarità di curvatura non rimovibile (anche se di diversa natura [25]),

[1] Qui e nel seguito consideriamo buchi neri con carica magnetica, anziché elettrica, perché questi sono quantisticamente stabili, in quanto, non esistendo particelle elementari con carica magnetica, i buchi neri magnetici non possono scaricarsi tramite creazione di coppie particelle-antiparticelle [26].

mentre quelle in $r = r_{\pm}$ sono singolarità di coordinate che possono essere eliminate con una opportuna estensione analitica della metrica. In questo caso tuttavia bisogna distinguere i tre casi: $M^2 > Q^2$, $M^2 = Q^2$ e $M^2 < Q^2$.

1. Per $M^2 > Q^2$, le due radici $r = r_{\pm}$ sono reali e distinte. Uno studio delle geodetiche radiali dimostra che la superficie esterna $r = r_+$ rappresenta un orizzonte degli eventi posto a distanza spaziale finita da un qualunque punto esterno ad essa. La superficie interna $r = r_-$ rappresenta un altro tipo di orizzonte, detto di Cauchy, che sembra essere instabile per piccole perturbazioni [37].

2. Per $M^2 = Q^2$, si ha il caso definito massimamente carico, o estremo, in cui la metrica è singolare in $r = 0$ e i due orizzonti si fondono nell'unico orizzonte $r = r_+ = r_- = M$.

3. Per $M^2 < Q^2$, la metrica presenta una sola singolarità in $r = 0$, in quanto le due radici $r = r_{\pm}$ nella (5.29) diventano complesse. Tuttavia in questo caso una sfera materiale non può subire il collasso gravitazionale perché, per $M^2 < Q^2$ la repulsione coulombiana prevarrebbe sull'attrazione gravitazionale. L'assenza di orizzonti e l'impossibilità del collasso suggeriscono ciò che Penrose, nel 1969, ha definito come "ipotesi della censura cosmica", la quale sostiene che, dal collasso gravitazionale di un oggetto materiale, non si possano formare delle singolarità – in cui le leggi della fisica cessano di valere –, a meno che queste non siano nascoste da un orizzonte; cioè singolarità nude non possono nascere spontaneamente a partire da una situazione iniziale regolare (naturalmente tale ipotesi non preclude la possibilità di singolarità già esistenti, come quella del big-bang).

Per quanto detto la condizione $M^2 = Q^2$ rappresenta il caso limite di un buco nero estremo massimamente carico, in cui la repusione coulombiana è tale da bilanciare esattamente l'attrazione newtoniana [25].

L'importanza del buco nero estremo carico è data anche dal fatto che, secondo i risultati di Hawking [27], un buco nero carico di massa $M > Q$ tende, a causa di un processo quantistico (come vedremo nel prossimo paragrafo), ad evaporare, sino a raggiungere il valore estremo $M = Q$, al qual punto la temperatura di Hawking si annulla e l'evaporazione cessa. Perciò si ritiene che le soluzioni estreme siano il punto terminale del processo di evaporazione di Hawking e corrispondano a stati fondamentali stabili [26, 43].

Nel caso estremo la metrica di Reissner-Nordström assume la forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right) \ . \quad (5.30)$$

Con il cambiamento di coordinate $r = \rho + m$, si ha:

$$1 - \frac{M}{r} = \left(1 + \frac{M}{\rho}\right)^{-1} \ , \quad (5.31)$$

e quindi l'elemento di linea si può scrivere in coordinate isotrope nella forma conforme :

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{M}{\rho}\right)^{-2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{\rho}\right)^2 \left[d\rho^2 + \rho^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2)\right] \ . \quad (5.32)$$

Si noti che, con questa trasformazione, si è ottenuto un elemento di linea che è indipendente dalle particolari coordinate spaziali usate e che più si avvicina alla nozione intuitiva di spazio basata sulla geometria euclidea.

5.2.1 Proprietà della metrica estrema

Lo studio delle geodetiche radiali della metrica estrema di Reissner-Nordström ci fornisce utili informazioni sulla struttura della geometria spazio-temporale [5]; si ha infatti che l'orizzonte $\rho = 0$ si trova, a differenza dell'orizzonte di Schwarzschild, a distanza spaziale infinita da un qualunque punto esterno ρ_0 :

$$\int_{l(\rho_0)}^{l(0)} dl = \int_{\rho_0}^{0} \left(1 + \frac{M}{\rho}\right) d\rho = \Big[\rho + M \ln \rho\Big]_{\rho_0}^{0} \to \infty \,. \tag{5.33}$$

Tuttavia la distanza propria misurata da una particella per raggiungere l'orizzonte da un punto esterno, si mantiene finita:

$$\begin{aligned} \int_{s(\rho_0)}^{s(0)} ds \quad &= \quad \int_{\rho_0}^{0} \left[\left(1 + \frac{M}{\rho}\right)^{-2} + E^2\right]^{-1/2} d\rho \\ &\overset{\rho \to 0}{\simeq} \quad -\frac{1}{E} \int_{\rho_0}^{0} d\rho < \infty \,, \end{aligned} \tag{5.34}$$

dove il parametro E è definito da:

$$E = \left(1 + \frac{M}{\rho}\right) \frac{dt}{ds} \,. \tag{5.35}$$

Inoltre, come nel caso di Schwarzschild e in quello di Reissner-Nordström non estremo, la metrica è asintoticamente piatta all'infinito:

$$\lim_{\rho \to \infty} ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2\right) \,, \tag{5.36}$$

mentre in prossimità dell'orizzonte $\rho = 0$ è:

$$\lim_{\rho \to 0} ds^2 \simeq \left\{-\frac{\rho^2}{M^2} dt^2 + \frac{M^2}{\rho^2} d\rho^2\right\} + \left\{M^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2\right)\right\} \,. \tag{5.37}$$

La metrica è data dalla somma di due termini indipendenti. La quantità al primo termine rappresenta uno spazio-tempo bidimensionale di curvatura costante negativa:

$$R = -\frac{2}{M^2} \tag{5.38}$$

e definisce la metrica di una pseudosfera H^2; la quantità al secondo membro rappresenta invece una sfera S^2, cioè uno spazio bidimensionale di curvatura costante positiva. Pertanto, in prossimità dell'orizzonte, la soluzione ha la forma:

$$H^2 \times S^2 \,, \tag{5.39}$$

e tale spazio viene detto di Bertotti-Robinson [28, 29].

5.2.2 Equilibrio statico di buchi neri estremi multipli

I buchi neri estremi di Reissner-Nordström sono importanti anche nella generalizzazione alla teoria gravitazionale di Einstein di un sistema di particelle cariche puntiformi in equilibrio statico. Infatti, come è noto, nella teoria newtoniana, un sistema di particelle cariche puntiformi può rimanere in equilibrio statico se le cariche Q_i sono tutte dello stesso segno e correlate alle masse M_i dalla relazione:

$$|Q_i| = G^{\frac{1}{2}}\, M_i \tag{5.40}$$

(o, nelle unità usate, con $G = 1$: $|Q_i| = M_i$). Indipendentemente da come queste particelle sono disposte, se questa condizione è soddisfatta, le repulsioni elettrostatiche bilanciano esattamente le attrazioni gravitazionali.

Nel 1947 Majumdar e Papapetrou [30, 31] scoprirono indipendentemente una classe di soluzioni statiche alle equazioni di Einstein-Maxwell in assenza di sorgenti, che corrispondono a questa situazione Newtoniana.

Si può verificare [32] che le geometrie di Majumdar-Papapetrou o hanno singolarità nude (eventualità non accettabile), o rappresentano l'equilibrio statico tra buchi neri estremi di Reissner-Nordström. Le sole geometrie di Majumdar-Papapetrou che rappresentano buchi neri multipli sono quelle che hanno monopoli puntiformi come sorgenti e con orizzonti dotati di topologia sferica; una soluzione per cariche magnetiche è esprimibile nella forma:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -V^{-2}dt^2 + V^2 d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} && (5.41)\\
F_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{\ \ k}\,\partial_k V\ , && (5.42)
\end{aligned}
$$

dove:

$$V = \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{M_n}{\rho_n}\right) \qquad (5.43)$$

e:

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$$

rappresenta il vettore posizione di un generico punto della sezione spaziale.

Come vedremo in seguito, la metrica estrema di Reissner-Nordström rappresenta il caso limite einsteiniano di una metrica più generale derivata dalla teoria delle corde.

5.3 Cenni di termodinamica

È possibile ottenere una comprensione molto più completa della fisica dei buchi neri, se si prendono in considerazione, oltre che le loro proprietà gravitazionali, anche quelle termodinamiche.

Poiché la gravità è una forza sempre attrattiva, esiste una tendenza naturale per i sistemi autogravitanti a crescere, piuttosto che a ridursi. Nel caso dei buchi neri, nessuna particella può uscire dall'orizzonte, cosicché esso agisce come una sorta di membrana ad un senso: le particelle possono cadere nel buco e renderlo più grande, ma non uscire, in modo che diventi più piccolo.

Questo fatto portò Bekenstein nel 1972 ad associare la grandezza sempre crescente di un buco nero alla seconda legge della termodinamica, secondo cui esiste una tendenza asimmetrica unidirezionale nella crescita di entropia. Nello stesso anno Hawking perfezionò l'intuizione, dimostrando che, da un punto di vista *classico*, l'area della superficie dell'orizzonte degli eventi non può decrescere in alcun processo, cioè:

$$\frac{dA}{dt} \geq 0 \,. \tag{5.44}$$

Questo teorema implica il risultato fondamentale che un singolo buco nero non può mai biforcarsi in due più piccoli.

Nel caso generale di buchi neri che possiedono carica elettrica o magnetica Q e momento angolare J, l'area dell'orizzonte dipende da M, Q e J secondo la formula di Smarr [2] (c = G = 1):

$$A = 4\pi \left[2M^2 - Q^2 + 2M^2 \left(1 - \frac{Q^2}{M^2} - \frac{J^2}{M^4} \right)^{1/2} \right] . \tag{5.45}$$

Tuttavia l'associazione dell'area dell'orizzonte all'entropia del buco nero porta ad alcune difficoltà fondamentali. Infatti, se un buco nero possiede entropia, deve essere caratterizzato anche da una temperatura, e dovrebbe quindi emettere uno spettro di radiazione. Questo, naturalmente, contrasterebbe con la sua stessa definizione di essere nero, e non poter emettere alcun tipo di radiazione.

Non c'è modo di risolvere questo problema classicamente. Infatti, secondo la teoria classica, il buco nero, oltre ad avere temperatura nulla, dovrebbe avere anche entropia infinita.

I problemi della entropia infinita e delle temperatura nulla si possono risolvere se si tiene conto della natura *quantistica* della materia.

Nel 1974 Hawking dimostrò che i buchi neri non sono neri: essi irradiano energia in modo continuo. La dimostrazione si basa sull'applicazione della meccanica quantistica ai campi elettromagnetici vicino ad un buco nero. Infatti i fotoni, che finora abbiamo classicamente considerato come particelle che seguono traiettorie geodetiche nello spazio-tempo, in accordo al principio di indeterminazione di Heisenberg, non possono essere localizzati con precisione arbitraria. Vicino all'orizzonte, questo fatto cambia drasticamente il comportamento dei fotoni reali da ciò che avviene per particelle idealizzate di massa nulla. Senza entrare nei dettagli del calcolo di Hawking, che usa le tecniche della teoria dei campi quantistica su uno spazio tempo curvo, delineeremo solo le fasi essenziali del ragionamento.

Una forma del principio di indeterminazione è data dalla (1.2):

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h \ ,$$

dove ΔE è l'indeterminazione minima nell'energia di una particella che risiede in uno stato quantistico per un tempo Δt. Pertanto lo spazio ordinario è caratterizzato da fluttuazioni del vuoto nei campi elettromagnetici, che consistono di coppie di fotoni prodotti in un evento e che si ricombinano in un altro. Tali coppie violano la conservazione dell'energia, ma non violano alcuna legge fisica, se hanno una durata inferiore al tempo $\Delta t \simeq h/\Delta E$. Ora, come detto in precedenza, lo spazio-tempo vicino all'orizzonte di un buco nero è perfettamente regolare e, in particolare localmente piatto, perciò queste fluttuazioni saranno presenti anche in questa regione. Se si considera una fluttuazione che produce due fotoni, uno di energia E e l'altro di energia $-E$, nello spazio-tempo piatto il fotone ad energia negativa non sarebbe in grado di propagarsi liberamente, e si ricombinerebbe con uno ad energia positiva entro il tempo $t \simeq h/E$. Ma, se creato appena fuori dell'orizzonte, ha la possibilità di attraversarlo prima che trascorra questo tempo. Una volta all'interno dell'orizzonte, esso può propagarsi liberamente, in quanto – come ad esempio visto nel caso della metrica di Schwarzschild – in questa regione la coordinata tempo t è una coordinata spaziale, pertanto l'energia negativa del fotone in questa regione è legata soltanto al segno della quantità di moto. Il risultato netto è che un fotone viene creato. Il calcolo rigoroso di Hawking, basato su una approssimazione semiclassica, mostra che, nel caso di Schwarzschild, i fotoni vengono emessi con uno spettro caratteristico di corpo nero, con una temperatura:

$$T = \frac{h}{8\pi k M} , \tag{5.46}$$

dove k è la costante di Boltzmann.

I buchi neri perciò non sono neri, ma emettono radiazione in modo continuo, con una temperatura inversamente proporzionale alla loro massa. Si noti che, solo nel caso classico per $h \to 0$, si riottiene che il buco è perfettamente nero ($T = 0$).

Una conseguenza della radiazione di Hawking è che un buco nero, irradiando, tende a perdere energia, e quindi massa, provocando l' "evaporazione" e infine la scomparsa dello stesso.

Nel caso di un buco nero di Reissner-Nordström, invece, la temperatura è data da:

$$T = \frac{h}{2\pi k} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)^2} , \tag{5.47}$$

ed esiste uno stato $Q = M$, detto estremo, che corrisponde a temperatura nulla. Il processo di evaporazione in questo caso si arresterà quando la massa del buco nero raggiunge tale valore.

Su basi quantistiche è possibile osservare come anche l'entropia di un buco nero debba mantenersi finita. Infatti non si possono scegliere particelle di energia arbitrariamente piccola per costituire un buco nero, come si può vedere ancora dal principio di indeterminazione. Se questo viene espresso nella forma ($c = 1$):

$$\Delta\lambda \cdot \Delta E \geq h \ ,$$

allora la lunghezza d'onda λ di de Broglie associata alla particella deve essere minore del diametro del buco nero. Per esempio, per un buco nero di Schwarzschild, dovrà essere $\lambda \simeq 2M$ ($G = c = 1$), e l'energia minima della particella dell'ordine $E \simeq h/M$. In questo caso il numero massimo di particelle che possono costituire un buco nero di massa M sarà:

$$N \simeq \frac{M}{E} \simeq \frac{M^2}{h} \ .$$

Una stima dell'entropia è dunque:

$$S \simeq kN \simeq \frac{k}{h} M^2 \ .$$

In particolare per un buco nero di Schwarzschild, l'area dell'orizzonte è:

$$A = 16\pi M^2 \ ,$$

da cui:

$$S \simeq \frac{k}{h} A \ .$$

Si noti il fatto interessante che, nel limite classico per $h \to 0$ si ottiene che il valore dell'entropia S diverge ma, fatto ancora più interessante, abbiamo trovato una relazione che mostra la proporzionalità diretta tra l'area dell'orizzonte A e l'entropia S, come originariamente proposto da Bekenstein. Un calcolo più preciso che tiene conto del risultato di Hawking [35], mostra che la relazione esatta è:

$$S = \frac{k}{h}\frac{A}{4} \, . \tag{5.48}$$

5.3.1 Le leggi della termodinamica dei buchi neri

Da quanto detto è chiaro che, su basi quantistiche, è possibile formulare le leggi della termodinamica dei buchi neri analoghe a quelle valide per un sistema classico [33].

Principio zero

Il principio zero della termodinamica dei buchi neri afferma che, in equilibrio termodinamico, esiste un parametro di temperatura T comune per l'intero sistema. La temperatura è di solito associata alla gravità superficiale κ dalla relazione:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi k} \, , \tag{5.49}$$

dove:

$$\kappa = 8\pi h \, \frac{\partial M}{\partial A} \, , \tag{5.50}$$

e si dimostra che è costante sulla superficie dell'orizzonte degli eventi.

È immediato verificare che, per esempio, ancora nel caso di Schwarzschild, vale la relazione:

$$\kappa = \frac{h}{4M} \, ,$$

da cui si riottiene la (5.46).

È interessante notare che la temperatura di Hawking può essere calcolata anche nel formalismo delle funzioni termiche di Green [34], considerando la continuazione analitica euclidea al tempo immaginario $\tau = i\,t$. Infatti l'orizzonte dei buchi neri classici rappresenta una singolarità conica delle soluzioni delle equazioni di Einstein nella continuazione euclidea, come avviene per esempio nella metrica di Schwarzschild e in quella non estrema di Reissner-Nordström. Tale singolarità può essere rimossa se si attribuisce al tempo immaginario un certo periodo β:

$$\tau \to \tau + \beta\ .$$

La configurazione non singolare può essere interpretata come contributo alla funzione di partizione, con periodo proporzionale all'inverso della temperatura che compare nella formula di Hawking:

$$\beta = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{1}{k}\,\frac{2\pi k}{\kappa} = \frac{1}{kT}\ , \tag{5.51}$$

dove $T = \frac{\kappa}{2\pi k}$ è esattamente la temperatura di Hawking (5.46).

Tale conclusione è particolarmante importante in considerazione del fatto che, nella descrizione dei fenomeni di tunnelling mediati da istantoni gravitazionali, sono accettabili solo le soluzioni euclidee alle equazioni di campo che siano regolari senza bisogno di imporre condizioni di periodicità nella coordinata tempo immaginaria, in modo che l'istantone medî un processo tra due stati asintotici a temperatura nulla.

Primo principio

In termodinamica classica, il primo principio asserisce che la variazione delle grandezze che esprimono il passaggio di un sistema termodinamico attraverso due configurazioni di equilibrio, deve verificare la conservazione dell'energia totale del sistema.

Anche nel caso dei buchi neri è possibile mostrare che vale una tale relazione, se si osserva che la formula di Smarr (5.45) può essere posta nella forma differenziale:

$$dM = (8\pi h)^{-1}\kappa dA + \Omega dJ + \Phi dQ \ . \tag{5.52}$$

Da quanto detto, se A gioca il ruolo dell'entropia (che definiremo con più precisione nella definizione del secondo principio) e κ è associata alla temperatura, si può scrivere la stessa formula nella forma:

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ \ , \tag{5.53}$$

dove il primo termine è familiare in termodinamica, mentre gli ultimi due descrivono semplicemente il lavoro fatto (energia estratta) dalle variazioni nel momento angolare (ΩdJ) e nella carica elettrica o magnetica (ΦdQ).

Secondo principio

Il teorema dell'area di Hawking:

$$\frac{dA}{dt} \geq 0$$

e l'associazione dell'area dell'orizzonte degli eventi A all'entropia del buco nero S, suggeriscono l'esistenza di una seconda legge della termodinamica dei buchi neri:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \ .$$

Tuttavia il teorema dell'area era stato formulato da Hawking nell'ambito della fisica classica. Il processo di evaporazione quantistico fa sì che il buco nero possa perdere massa, quindi diminuire l'area del suo orizzonte e con essa l'entropia:

$$\frac{dS}{dt} \leq 0 \ .$$

Tuttavia è chiaro che la radiazione emessa deve possedere una entropia S_{rad}, per cui se si considera, durante il processo, la variazione totale di entropia dell'intero sistema buco nero più radiazione, si ripristina il secondo principio nella forma più generale:

$$\frac{dS_{tot}}{dt} \geq 0 \ , \tag{5.54}$$

dove $S_{tot} = S + S_{rad}$.

Capitolo 6

BUCHI NERI CARICHI NELLA TEORIA DELLE CORDE

6.1 Generalità

Le teorie delle corde sono oggi considerate tra i migliori candidati per una teoria della gravità quantistica. È perciò naturale che siano state largamente studiate le loro implicazioni sulla teoria della gravità, in particolare in quelle situazioni in cui la relatività generale classica sembra mostrare dei limiti, cioè nello studio dei buchi neri.

Tuttavia al presente, il formalismo della teoria delle corde è ancora troppo complesso per poter trattare direttamente questi problemi, per cui si è cercato di ricavare dalla teoria delle azioni efficaci a bassa energia, a partire dalle quali è possibile utilizzare le tecniche della teoria dei campi, per studiare dei modelli trattabili. Le azioni efficaci a bassa energia che vengono considerate, correggono l'azione classica di Einstein con l'introduzione di campi scalari come il dilatone e i campi di modulo, accoppiati in modo non minimale ai campi classici. Il dilatone che considereremo in seguito è un campo scalare privo di massa che è contenuto nello spettro a bassa energia della corda e descrive i suoi modi armonici di vibrazione [1]. I campi di modulo (o *compattoni*) derivano invece dal processo di riduzione dimensionale dalle dieci dimensioni in cui è formulata la teoria delle corde alle ordinarie quattro dimensioni dello spazio-tempo osservato: il loro valore è direttamente correlato al raggio dello spazio esadimensionale compattificato.

Le soluzioni di buchi neri carichi che si studiano nel contesto di azioni efficaci a bassa energia, mostrano delle proprietà che li rendono molto differenti dai buchi neri della teoria gravitazionale classica di Einstein, come ad esempio quelli di Reissner-Nordström. Queste soluzioni, quando espresse in termini della metrica delle corde, sono caratterizzate da una geometria che, nel limite estremo, non mostra alcuna singolarità. Inoltre queste soluzioni possiedono proprietà termodinamiche peculiari, differenti da quelle degli ordinari buchi neri della relatività generale.

I primi modelli di azioni efficaci a bassa energia nella teoria delle corde, modificavano l'azione di Einstein con la introduzione del solo campo dilatonico. Queste azioni si riconducevano con buona approssimazione ai buchi neri della relatività generale nel caso di grande massa ($M \gg M_P$) e in regioni lontane dalla singolarità.

Quando però si vogliono risolvere problemi di gravità quantistica, e cioè in prossimità delle singolarità o per buchi neri di piccola massa ($M \simeq M_P$), bisogna considerare delle azioni efficaci più complete rispetto a quelle che contengono un singolo campo dilatonico; si possono prendere in considerazione varie correzioni:

1. l'azione della corda si può considerare come uno sviluppo pertur-

[1] Recentemente sono state studiate azioni delle corde a bassa energia con un termine di massa per il dilatone [37], che dovrebbero essere più appropriate da un punto di vista fisico; esse prevedono, tra l'altro, una più ampia varietà di buchi neri.

bativo nella tensione inversa della corda α' [36]. Si possono allora considerare nell'azione termini di ordine superiore nel tensore di curvatura $R_{\mu\nu}$;

2. anche quando si considera il settore degli stati privi di massa nello spettro delle corde, si dovrebbe considerare il contributo del campo di modulo della varietà compattificata;

3. una correzione all'azione efficace a bassa energia può apparire nel livello della corda a un "*loop*". Considerando effetti della corda a un "loop", si può accoppiare il compattone al tensore di campo elettromagnetico di Maxwell $F_{\mu\nu}$, per ottenere nuove soluzioni di buco nero.

6.2 L'azione efficace a bassa energia

Nel seguito, considereremo una azione efficace quadridimensionale a bassa energia ricavata dalla teoria della corda eterotica [38]; essa tiene conto dell'accoppiamento non minimale alla gravità di un campo di modulo, dovuto ad effetti di soglia ad un "loop"; in unità di misura in cui $c = \hbar = G = 1$, essa è data da:

$$I = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\, e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{2}{3}(\nabla\psi)^2 - \left(1 + e^{2\left(\phi - \frac{q}{3}\psi\right)}\right)F^2\right], \tag{6.1}$$

dove ϕ è il dilatone; ψ è il compattone ottenuto dalla riduzione dimensionale della teoria in dieci dimensioni; g è il determinante del tensore metrico; R è lo scalare di curvatura; $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore di campo elettromagnetico di Maxwell; infine q è una costante di accoppiamento che, in principio, può essere determinata da calcoli a un "loop".

L'azione considerata è fondamentale nell'ambito della teoria efficace delle corde in quanto, a partire da questa, è possibile utilizzare le ordinarie tecniche utilizzate in teoria dei campi, per ricavare soluzioni esatte di buchi neri. Soluzioni esatte possono essere ottenute se l'azione viene semplificata tramite l'ansatz:

$$e^{-2\phi} = \frac{q^2}{3} e^{-\frac{2}{3}q\psi} \; , \tag{6.2}$$

che equivale a porre:

$$\psi = \frac{3}{q}\phi + cost. \; . \tag{6.3}$$

Perciò:

$$\nabla\psi = \frac{3}{q}\nabla\phi \qquad \Leftrightarrow \qquad (\nabla\psi)^2 = \frac{9}{q^2}(\nabla\phi)^2 \; . \tag{6.4}$$

Dunque, l'azione efficace considerata si riduce a:

$$I = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\, e^{-2\phi}\left[R + \left(4 - \frac{6}{q^2}\right)(\nabla\phi)^2 - \left(1 + \frac{3}{q^2}\right)F^2\right] \; . \tag{6.5}$$

Introduciamo a questo punto una nuova costante k, che parametrizza la teoria:

$$k = \frac{3 - 2q^2}{3 + 2q^2} \; , \tag{6.6}$$

ed esplicitiamo rispetto alla costante di accoppiamento q:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{1-k}{1+k}} \qquad (-1 \leq k \leq 1) \; . \tag{6.7}$$

Con questa sostituzione, l'azione si semplifica nella forma finale:

$$I = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\, e^{-2\phi}\left[R - \frac{8k}{1-k}(\nabla\phi)^2 - \frac{3+k}{1-k}F^2\right] \; . \tag{6.8}$$

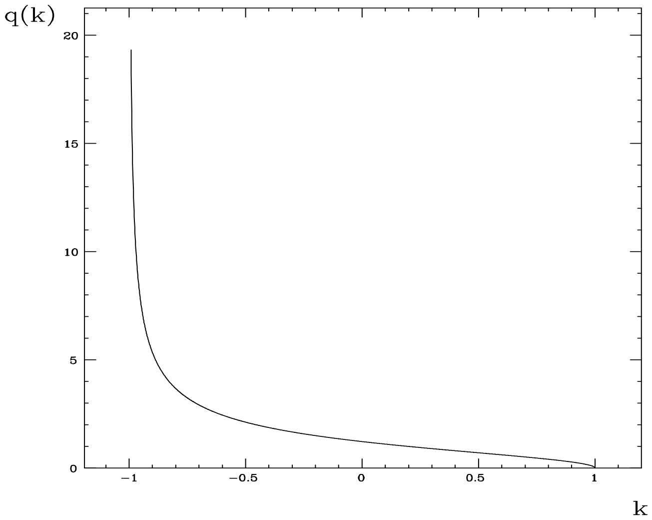

Figura 6.1: La funzione di accoppiamento $q(k)$.

Si noti il particolare andamento della funzione $q(k)$: nel limite singolare per $k = 1$ è $q = 0$; il dilatone si disaccoppia e ci si riconduce alla teoria di Einstein-Maxwell. Nel limite per $k = -1$, si ha che $q \to \infty$ e l'azione si riduce all'azione delle corde standard in assenza dell'accoppiamento del modulo; questa situazione corrisponde alla soluzione ricavata da Garfinkle, Horowitz e Strominger (soluzioni GHS) [40]. Da notare che, in questo limite, nonostante l'assenza del compattone, è sempre presente il dilatone che, in tale modello, cambia drasticamente molte proprietà dei buchi neri rispetto a quelli di Reissner-Nordström.

6.3 Le equazioni di campo

Deriviamo le equazioni di campo partendo dall'azione:

$$I = \int d^4x \, \mathcal{L} \; , \tag{6.9}$$

dove:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\}} \, \rceil^{-\in\phi} \left[\mathcal{R} - \frac{\forall\|}{\infty - \|} (\nabla\phi)^{\in} - \frac{\ni + \|}{\infty - \|} \mathcal{F}^{\in} \right] \tag{6.10}$$

è la densità di Lagrangiana ad essa relativa. Per descrivere in modo completo il sistema fisico, dobbiamo considerare la variazione dell'azione rispetto alle variabili di campo A_μ, ϕ, $g_{\mu\nu}$, cioè consideriamo le equazioni di campo di Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\tau} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\tau)}\right) &= 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \phi)}\right) &= 0 \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\right) &= 0\ ,
\end{aligned} \tag{6.11}$$

che, risolte, portano al sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
&(a)\quad \nabla_\mu\left(e^{-2\phi}F^{\mu\nu}\right) = 0 \\
&(b)\quad R = \frac{8k}{1-k}\left(\nabla^2\phi - (\nabla\phi)^2\right) - \frac{3+k}{1-k}\,F^2 \\
&(c)\quad R_{\mu\nu} = 4\,\frac{1+k}{1-k}\,\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - 2\,\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \left[2\,(\nabla\phi)^2 - \nabla^2\phi\right] \\
&\qquad\qquad +2\,\frac{3+k}{1-k}\left[F_{\mu\rho}F^\rho{}_\nu - \frac{1}{4}F^2 g_{\mu\nu}\right]\ ,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

dove $\nabla^2\phi$ è il d'Alembertiano del campo scalare ϕ, $\nabla\phi$ il quadrigradiente.

Queste equazioni ammettono soluzioni di buco nero carico, con configurazioni di monopolo magnetico del campo di Maxwell, date da:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1-\frac{r_+}{r}\right)\left(1-\frac{r_-}{r}\right)^k dt^2 + \left(1-\frac{r_+}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{r_-}{r}\right)^{-1} dr^2 \\
&\quad + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$e^{-2\phi} = \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-k}{2}} \tag{6.14}$$

$$F_{ij} = \frac{Q}{r^2}\varepsilon_{ij} \qquad (i,j = (2,3)) \; . \tag{6.15}$$

I due parametri r_+ e r_- sono correlati alla carica magnetica Q e alla massa M della soluzione, dalle relazioni [39]:

$$M = \frac{1}{2}r_+ + \frac{3-k}{4}r_- \tag{6.16}$$

$$Q^2 = \frac{1-k}{4}r_+ r_- \; , \tag{6.17}$$

mentre la temperatura T e l'entropia S del buco nero, sono date da:

$$T = \frac{1}{4\pi r_+}\left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{\frac{1+k}{2}} \tag{6.18}$$

$$S = \pi r_+ \left(1 - \frac{r_-}{r_+}\right)^{\frac{1-k}{2}} \; . \tag{6.19}$$

6.4 Il buco nero estremo

Di particolare interesse sono le soluzioni che corrispondono ad un buco nero dilatonico estremo; questo è il caso limite in cui $r_+ = r_- = \alpha$. Infatti, in questo limite, la temperatura tende a zero, e il buco nero può essere considerato lo stato fondamentale nel processo di evaporazione di Hawking. In questo limite:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1+k} dt^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} dr^2 \\ &\quad + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right) \; . \end{aligned} \tag{6.20}$$

Posto $r = \rho + \alpha$, si ha infine la forma conforme dell'elemento di linea:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1+\frac{\alpha}{\rho}\right)^{-(1+k)} dt^2 + \left(1+\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 d\rho^2 + (\rho+\alpha)^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right) \\ &= -\left(1+\frac{\alpha}{\rho}\right)^{-(1+k)} dt^2 + \left(1+\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \left[d\rho^2 + \rho^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right] \; . \end{aligned} \tag{6.21}$$

Inoltre, nel caso estremo, il campo dilatonico è dato da:

$$e^{-2\phi} = \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1-k}{2}} = \left(1+\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{-1+k}{2}} \quad , \tag{6.22}$$

e il tensore di Maxwell da:

$$F_{ij} = \frac{\sqrt{1-k}}{2} \frac{\alpha}{(\rho+\alpha)^2} \varepsilon_{ij} \qquad (i,j=(2,3)) \; . \tag{6.23}$$

Nel limite $k \to 1$, la soluzione si riduce a quella di Reissner-Nordström (normalizzando opportunamente $F_{\mu\nu}$).

Le possibili singolarità per questa metrica si hanno per $\rho = 0$ e $\rho = -\alpha$ (che corrispondono rispettivamente a $r = \alpha$ e $r = 0$). Tuttavia, si noti che per $-\alpha < \rho < 0$ la componente della metrica g_{00} e il campo dilatonico ϕ diventano complessi [41], tranne nei casi in cui k è intero, per cui la soluzione non è prolungabile oltre l'orizzonte.

Un primo metodo per calcolare le singolarità per questa metrica è di vedere il comportamento dello scalare di curvatura. Si ha che :

$$R = -\frac{k^2+2k-3}{2} \frac{\alpha^2}{(\rho+\alpha)^2} \; , \tag{6.24}$$

per cui in prossimità della superficie $\rho = 0$ troviamo:

$$\lim_{\rho\to 0} R = -\frac{k^2+2k-3}{2} \; ; \tag{6.25}$$

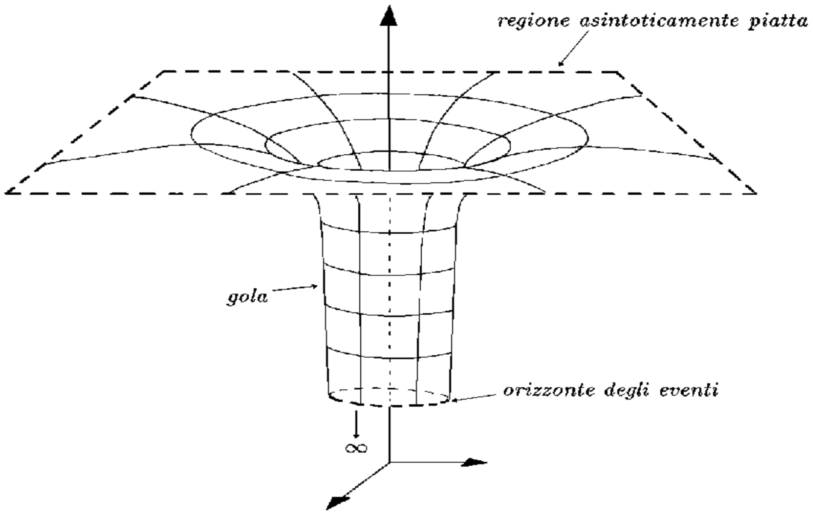

Figura 6.2: Sezione spaziale di un buco nero estremo dilatonico.

pertanto R è regolare e positivo per tutti i valori di k compresi nell'intervallo $-1 \leq k < 1$, e si annulla per $k = 1$.

Per completezza osserviamo che, in prossimità di $\rho = -\alpha$:

$$\lim_{\rho \to -\alpha} R = \infty \; ; \tag{6.26}$$

quindi, per tutti i valori di k, R presenta una vera singolarità in $\rho = -\alpha$.

Per meglio comprendere la natura della superficie $\rho = 0$ in cui c'è una singolarità di coordinate, calcoliamo la geodetica "*space-like*" da un punto $\rho_0 > 0$ a tale superficie; si ha:

$$\int_{l(\rho_0)}^{l(0)} dl = \int_{\rho_0}^{0} \left(1 + \frac{\alpha}{\rho}\right) d\rho = \Big[\rho + \alpha \ln \rho\Big]_{\rho_0}^{0} \to \infty \; ; \tag{6.27}$$

per $\rho = 0$ si ha quindi un orizzonte regolare posto a distanza spaziale infinita per tutti i valori di k.

Tuttavia le geodetiche "*time-like*" relative a questa distanza, e parametrizzate rispetto al tempo proprio ($\tau = \tau(\rho)$), si mantengono finite eccetto che nel limite GHS:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau(\rho_0)}^{\tau(0)} d\tau &= \int_{\rho_0}^{0} d\rho \left[-\left(1+\frac{\alpha}{\rho}\right)^{-2} + E_\tau^2 \left(1+\frac{\alpha}{\rho}\right)^{k-1} \right]^{-1/2} \\
&\overset{\rho\to 0}{\simeq} \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{0} d\rho\, \frac{1}{\rho} = \Big[\ln\rho\Big]_{\rho_0}^{0} \to +\infty & (k=-1) \\ \displaystyle\int_{\rho_0}^{0} d\rho\, \rho^{\frac{k-1}{2}} \propto \Big[\rho^{\frac{1+k}{2}}\Big]_{\rho_0}^{0} < +\infty & (-1 < k \leq 1)\,. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Infine le geodetiche "*light-like*", parametrizzate rispetto ad un parametro $\lambda(\rho)$ sono date da:

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda(\rho_0)}^{\lambda(0)} d\lambda &= \int_{\rho_0}^{0} d\rho \left(1+\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{1-k}{2}} \\
&\overset{\rho\to 0}{\simeq} \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{0} d\rho\, \frac{1}{\rho} = \Big[\ln\rho\Big]_{\rho_0}^{0} \to +\infty & (k=-1) \\ \displaystyle\int_{\rho_0}^{0} d\rho\, \rho^{\frac{k-1}{2}} \propto \Big[\rho^{\frac{1+k}{2}}\Big]_{\rho_0}^{0} < +\infty & (-1 < k \leq 1)\,. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Perciò la metrica (6.21) non è geodeticamente completa, in quanto le geodetiche tipo-tempo e tipo-luce hanno un'estensione finita in tutto l'intervallo di k, eccetto che nel limite per $k = -1$.

Questo significa che, nel caso limite in cui il campo di modulo è disaccoppiato ($k = -1$), l'orizzonte $\rho = 0$ non è solo a distanza spaziale infinita, ma anche a distanza propria infinita da ogni osservatore causale; invece, in tutti gli altri casi, compreso quello della relatività generale

$(-1 < k \leq 1)$, una particella impiega un tempo proprio finito per raggiungere l'orizzonte, oltre il quale però, in generale, la soluzione non può essere definita. La superficie $\rho = 0$ è dunque singolare se $k \neq \pm 1$, sia pure in modo più lieve che nel caso di una singolarità di curvatura.

È anche interessante studiare il comportamento della metrica in prossimità delle regioni asintotiche.

Vicino all'orizzonte $\rho = 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to 0} ds^2 &= -\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{-(1+k)} dt^2 + \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2 \left[d\rho^2 + \rho^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)\right] \\
&= \left\{-\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{-(1+k)} dt^2 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} d\rho^2\right\} + \left\{\alpha^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)\right\} \; ;
\end{aligned} \tag{6.30}$$

la metrica rappresenta, come nel caso particolare di Reissner-Nordström estremo, uno spazio di Bertotti-Robinson, costituito dalla somma di due termini. La quantità al primo termine rappresenta uno spazio-tempo bidimensionale di curvatura costante:

$$R = -\frac{1}{2}\alpha^{-2}(1+k)^2 \,, \tag{6.31}$$

e rappresenta quindi una pseudosfera H^2 (spazio anti-de Sitter) di curvatura costante negativa per tutti i valori di k compresi nell'intervallo $-1 < k \leq 1$, e si riduce allo spazio piatto per il solo caso GHS $(k = -1)$. La quantità al secondo termine è la sfera S^2 di raggio α, cioè uno spazio bidimensionale di curvatura costante positiva.

Inoltre nel limite estremo, vicino all'orizzonte, il campo magnetico assume il valore costante:

$$F_{ij} = \frac{\sqrt{1-k}}{2\alpha} \varepsilon_{ij} \; . \tag{6.32}$$

Infine, per $\rho \to \infty$ si ha:

$$\lim_{\rho \to 0} ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2 \right) \ , \tag{6.33}$$

per cui la metrica è asintoticamente piatta all'infinito per ogni k, con il campo magnetico che tende a zero come un monopolo.

6.5 Soluzioni di buchi neri estremi multipli

È possibile generalizzare le soluzioni (6.21) al caso di buchi neri estremi multipli in equilibrio statico, secondo un procedimento simile a quello utilizzato da Majumdar e Papapetrou nel caso di Einstein-Maxwell [40]. Basandosi sulle (6.21) - (6.23), si suppone che la soluzione abbia la forma:

$$ds^2 = -V^{-(1+k)} dt^2 + V^2 d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \tag{6.34}$$

$$e^{-2\phi} = V^{\frac{k-1}{2}} \tag{6.35}$$

$$F_{ij} = \frac{\sqrt{1-k}}{2} \varepsilon_{ij}{}^{k} \, \partial_k V \ , \tag{6.36}$$

dove:

$$V = V(\mathbf{x}) \ ,$$

e:

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$$

rappresenta il vettore posizione di un generico punto della sezione spaziale, e si cercano le condizioni che deve soddisfare V per risolvere le equazioni di campo.

L'equazione (6.12.a):

$$\nabla_\mu \left(e^{-2\phi} F^{\mu\nu} \right) = 0$$

è banalmente soddisfatta per la antisimmetria del tensore $F^{\mu\nu}$.

La verifica della seconda equazione (6.12.b):

$$R = \frac{8k}{1-k}\left(\nabla^2\phi - (\nabla\phi)^2\right) - \frac{3+k}{1-k}\,F^2$$

è più laboriosa, in quanto bisogna calcolare le quantità $\nabla^2\phi$, $(\nabla\phi)^2$, F^2 ed R; si ha:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\nu\phi\right) \\
&= \frac{1-k}{4}\,V^{-3}\,\boldsymbol{\nabla}^2 V + \frac{-1+k^2}{8}\,V^{-4}\,(\boldsymbol{\nabla}V)^2 \qquad (6.37) \\
(\nabla\phi)^2 &= g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi \\
&= \frac{(1-k)^2}{16}\,V^{-4}\,(\boldsymbol{\nabla}V)^2 \qquad (6.38) \\
F^2 &= F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1-k}{2}\,V^{-4}\,(\boldsymbol{\nabla}V)^2 \qquad (6.39) \\
R &= R_\mu{}^\mu \\
&= (k-3)\,V^{-3}\,\boldsymbol{\nabla}^2 V - \frac{k^2+2k-3}{2}\,V^{-4}\,(\boldsymbol{\nabla}V)^2\ , \qquad (6.40)
\end{aligned}$$

dove l'operatore $\boldsymbol{\nabla}$ è il gradiente nello spazio piatto 3-dimensionale. Sostituendo nella equazione di campo, si ha che questa è identicamente soddisfatta se:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 V = 0\ . \qquad (6.41)$$

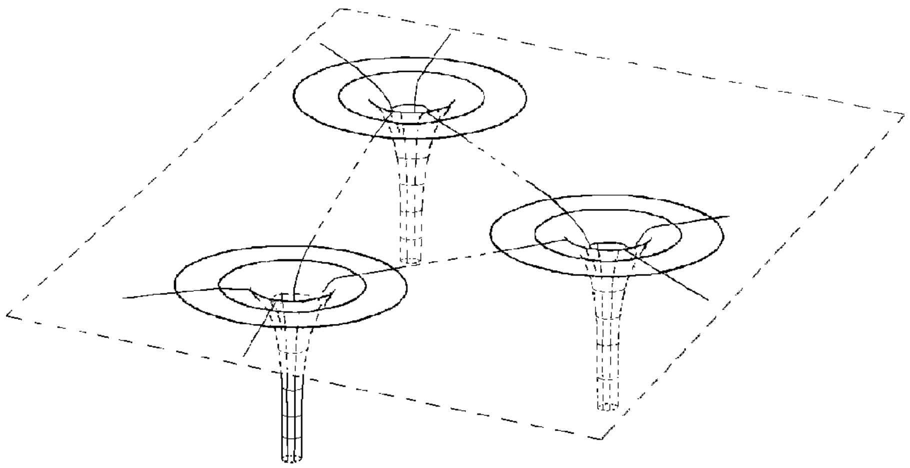

Figura 6.3: Sezione spaziale della configurazione multipla di buchi neri estremi.

Analogamente si prova che l'ansatz scelto verifica anche la terza equazione di campo (6.12.c):

$$R_{\mu\nu} = 2\,\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + 2\,e^{-2a\phi}F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}e^{-2a\phi}F^2\ .$$

La condizione $\boldsymbol{\nabla}^2 V = 0$ è, come è noto, l'equazione di Laplace dell'elettrostatica e della teoria gravitazionale newtoniana, ed esprime in forma locale le proprietà dello spazio in cui non sono presenti cariche o masse.

Si può scegliere per V una espressione che, in generale, nel caso di una soluzione per buchi neri multipli, sia del tipo:

$$V = c + \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\rho_n}\ , \tag{6.42}$$

dove $\rho_n = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|$, con $\mathbf{x}_n$ che denota la posizione dell'n^{mo} buco nero.

V soddisfa l'equazione di Laplace in tutti i punti tranne $\mathbf{x}_n$, dove è singolare, e corrisponde ad una distribuzione di cariche puntiformi. Quando

$\mathbf{x}$ si avvicina ad un particolare punto, diciamo il j^{mo}, il corrispondente termine nella somma domina, cosicché:

$$V \simeq c + \frac{\alpha_j}{\rho_j}\,.$$

Per $c = 1$ si ha l'estensione ad N buchi neri del caso già discusso, per cui la metrica è del tipo di Bertotti-Robinson vicino all'orizzonte $\rho_j = 0$ di ciascuno dei buchi neri, e tende asintoticamente alla metrica di Minkowski all'infinito. Come dimostreremo esplicitamente per la metrica “canonica”, questa soluzione corrisponde a N masse in cui gravità, elettromagnetismo e forze scalari si equilibrano in uno spazio asintoticamente piatto.

Per $c = 0$ invece, si ottiene una soluzione che, in prossimità del j^{mo} termine, è:

$$V = \frac{\alpha_j}{\rho_j}\,,$$

e rappresenta ancora uno spazio di Bertotti-Robinson, ma in questo caso la soluzione è di Bertotti-Robinson anche all'infinito, con:

$$V = \frac{\alpha_\infty}{\rho}\,,$$

dove:

$$\alpha_\infty = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\,.$$

6.6 La metrica “canonica”

Nel capitolo precedente abbiamo descritto la soluzione di buchi neri multipli nell'usuale sistema di Einstein-Maxwell, nota come soluzione di Majumdar-Papapetrou, che rappresenta l'equilibrio statico tra buchi neri estremi di Reissner-Nordström, in cui l'attrazione gravitazionale e la repulsione elettrostatica si bilanciano esattamente. Recentemente [40] è stata studiata la soluzione di buchi neri multipli nella teoria delle corde in un sistema di Einstein-Maxwell modificato dalla presenza di un campo scalare dilatonico, accoppiato in modo non minimale ($k = -1$) al campo di Maxwell F, dove la condizione di equilibrio deve tener conto anche della forza scalare.

È perciò interessante considerare l'interpolazione tra questi due casi estremi. Tale studio è stato discusso da Shiraishi [42] nel caso multidimensionale, a partire da una azione modificata dilatonica, che è correlata all'azione delle corde (6.8) da noi considerata dalla trasformazione conforme della metrica:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{-2\phi} g_{\mu\nu} \ . \tag{6.43}$$

In termini della metrica "canonica", l'azione assume la forma:

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[\hat{R} - 2(\hat{\nabla}\hat{\phi}) - e^{-2a\hat{\phi}} \hat{F}^2 \right] \ , \tag{6.44}$$

dove:

$$a\hat{\phi} = \phi \quad ; \quad a\hat{F} = F$$
$$a = \sqrt{\frac{1-k}{3+k}} \ .$$

Le equazioni di campo relative a questa azione sono (omettendo per brevità il simbolo "ˆ"):

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \nabla_\mu \left(e^{-2a\phi} F_{\mu\nu} \right) = 0 \\
&(b) \quad \nabla^2 \phi + \frac{1}{2}\, a\, e^{-2a\phi} F^2 = 0 \\
&(c) \quad R_{\mu\nu} = 2\, \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + 2\, e^{-2a\phi} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} e^{-2a\phi} F^2 \ .
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Una soluzione per queste equazioni di campo, nel caso di buchi neri magnetici estremi multipli, è data da:

$$ds^2 = -V^{-\frac{3+k}{2}} dt^2 + V^{\frac{3+k}{2}} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \tag{6.46}$$

$$e^{-2a\phi} = V^{\frac{-1+k}{2}} \tag{6.47}$$

$$F_{ij} = \frac{\sqrt{3+k}}{2} \varepsilon_{ij}{}^{k} \partial_k V , \tag{6.48}$$

che si ottiene applicando la trasformazione conforme (6.43) alle soluzioni ottenute prima per le equazioni di campo relative all'azione (6.8).

V è una funzione che deve, come prima, soddisfare la condizione:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 V = 0 .$$

Nel caso di un singolo buco nero estremo si può ancora considerare una espressione del tipo:

$$V = 1 + \frac{\alpha}{\rho} ; \tag{6.49}$$

tuttavia lo scalare di curvatura relativo a questa metrica è:

$$R = -\frac{k^2 + 2k - 3}{8} \frac{\rho^{\frac{-1+k}{2}}}{(\rho + \alpha)^{\frac{7+k}{2}}} , \tag{6.50}$$

e, in prossimità di $\rho = 0$:

$$\lim_{\rho \to 0} R = \begin{cases} \to \infty & (-1 \leq k < 1) \\ 0 & (k = 1) . \end{cases} \tag{6.51}$$

Perciò, nell'intervallo $-1 \leq k < 1$, la superficie $\rho = 0$ rappresenta una vera singolarità di curvatura, non schermata da alcun orizzonte , e quindi non ritenuta fisicamente accettabile secondo la già accennata ipotesi di Penrose.

Tuttavia, nel limite $k = 1$, si riottiene il caso di Reissner-Nordström estremo, in cui la superficie $\rho = 0$ non presenta alcuna singolarità.

Lo studio delle geodetiche radiali mostra alcuni aspetti peculiari della metrica "canonica"; infatti le geodetiche "*space-like*" si mantengono finite per tutti i valori di k (eccetto, naturalmente, nel caso già discusso $k = 1$):

$$\begin{aligned}\int_{l(\rho_0)}^{l(0)} dl &= \int_{\rho_0}^{0} d\rho \left(1 + \frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{3+k}{4}} \\ &\overset{\rho\to 0}{\simeq} \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{0} d\rho\, \rho^{-\frac{3+k}{4}} \propto \left[\rho^{\frac{1-k}{4}}\right]_{\rho_0}^{0} < \infty & (-1 \leq k < 1) \\ \displaystyle\int_{\rho_0}^{0} d\rho\, \frac{1}{\rho} = \left[\ln \rho\right]_{\rho_0}^{0} \to +\infty & (k = 1)\ . \end{cases}\end{aligned} \tag{6.52}$$

Inoltre, relativamente alla stessa distanza,per tutti i valori di k, si mantengono finite le geodetiche "*time-like*":

$$\begin{aligned}\int_{\tau(\rho_0)}^{\tau(0)} d\tau &= \int_{\rho_0}^{0} d\rho \left[-\left(1 + \frac{\alpha}{\rho}\right)^{-\frac{3+k}{2}} + E_\tau^2\right]^{-1/2} \\ &\overset{\rho\to 0}{\simeq} \frac{1}{E_\tau}\int_{\rho_0}^{0} d\rho = -\frac{\rho_0}{E_\tau} < +\infty\ ,\end{aligned} \tag{6.53}$$

e "*light-like*":

$$\int_{\lambda(\rho_0)}^{\lambda(0)} d\lambda = \frac{1}{E_\lambda}\int_{\rho_0}^{0} d\rho - \frac{\rho_0}{E_\lambda} < +\infty\ , \tag{6.54}$$

dove:

$$E_\lambda = \left(1 + \frac{\alpha}{\rho}\right)^{-\frac{3+k}{2}} \frac{dt}{d\lambda}\ .$$

6.6.1 Equilibrio statico nel limite classico

Per la soluzione multipla di buchi neri dilatonici massimamente carichi, possiamo scegliere per V una espressione del tipo:

$$V = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\rho_n} , \tag{6.55}$$

che dà una metrica di Bertotti-Robinson in prossimità di ciascuno degli N orizzonti, ed è asintoticamente piatta all'infinito.

Nell'analizzare la condizione di equilibrio statico, bisogna osservare che il sistema in esame è governato da tre tipi di forze: l'attrazione gravitazionale, la repulsione magnetica e la forza scalare attrattiva mediata dal dilatone ϕ.

Per definire i valori delle masse, delle cariche magnetiche e delle cariche scalari, consideriamo il limite classico a bassa energia delle soluzioni (6.46) - (6.48).

Per il calcolo delle masse M_i osserviamo che le componenti spaziali della metrica canonica:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\rho_n}\right)^{\frac{3+k}{2}} \delta_{ij} \\ &\overset{\rho\to\infty}{\simeq} \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{3+k}{2} \frac{\alpha_n}{\rho_n}\right) \delta_{ij} \qquad (i,j = (1,2,3)) \ , \end{aligned} \tag{6.56}$$

nel limite asintotico per $\rho \to \infty$ devono tendere al limite newtoniano:

$$g_{ij} \to \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{2M_n}{\rho_n}\right) \delta_{ij} \ , \tag{6.57}$$

dove M_n è la massa dell'n^{mo} buco nero. Segue che le soluzioni asintoticamente piatte descrivono una distribuzione di buchi neri estremi con masse:

$$M_n = \frac{3+k}{4}\,\alpha_n\ . \tag{6.58}$$

Analogamente, le componenti spaziali del tensore di campo elettromagnetico:

$$F_{ij} = \frac{\sqrt{3+k}}{2}\,\varepsilon_{ij}{}^{k}\,\partial_k\left(1+\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n}{\rho_n}\right)\ , \tag{6.59}$$

tendono al limite classico:

$$F_{ij} \to -\sum_{n=1}^{N}\frac{Q_n}{r^2}\,\varepsilon_{ij}{}^{k}\,\partial_k\,\rho_n\ , \tag{6.60}$$

dove Q_n è la carica magnetica dell'n^{mo} buco nero. Si ha perciò:

$$Q_n = \frac{\sqrt{3+k}}{2}\,\alpha_n\ . \tag{6.61}$$

Infine si possono definire le cariche scalari Σ_n dal comportamento asintotico del dilatone:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4}\sqrt{(1-k)(3+k)}\,\ln\left(1+\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n}{\rho_n}\right)\\ &\overset{\rho\to\infty}{\simeq} \frac{1}{4}\sqrt{(1-k)(3+k)}\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{\alpha_n}{\rho_n}\right)^{1+s}}{1+s}\ ,\end{aligned} \tag{6.62}$$

che, nel limite per $\rho\to\infty$ deve ridursi a:

$$\phi \to \sum_{n=1}^{N}\frac{\Sigma_n}{\rho_n}\ ; \tag{6.63}$$

si ha dunque:

$$\Sigma_n = \frac{1}{4}\sqrt{(1-k)(3+k)}\,\alpha_n\ . \tag{6.64}$$

La condizione di equilibrio statico tra gli N buchi neri estremi sarà allora espressa dal bilanciamento della forza attrattiva di Newton:

$$F_N = \frac{M_i M_j}{\rho^2} = \frac{3+k}{16}\,\frac{\alpha_i \alpha_j}{\rho^2}\ , \tag{6.65}$$

della forza repulsiva di Coulomb:

$$F_Q = \frac{q_i q_j}{\rho^2} = \frac{3+k}{4}\,\frac{\alpha_i \alpha_j}{\rho^2}\ , \tag{6.66}$$

e della forza scalare dilatonica attrattiva:

$$F_D = \frac{\Sigma_i \Sigma_j}{\rho^2} = \frac{(1-k)(3+k)}{16}\,\frac{\alpha_i \alpha_j}{\rho^2}\ ; \tag{6.67}$$

deve cioè essere:

$$F_{tot} = F_N - F_Q + F_D = 0\ . \tag{6.68}$$

Una semplice sostituzione algebrica mostra allora che tale condizione è identicamente soddisfatta per tutti i valori di k, e rappresenta una generalizzazione al caso dilatonico della soluzione di Majumdar-Papapetrou della relatività generale.

Capitolo 7

ISTANTONI GRAVITAZIONALI NELLA TEORIA DELLE CORDE

7.1 La continuazione analitica euclidea

Come discusso in precedenza, il processo di evaporazione dei buchi neri tende a portare un buco nero carico nello stato di minima temperatura, che è dato dallo stato estremo. L'entropia di un buco nero estremo è nulla (per $k \neq 1$) indipendentemente dalla carica, per cui è plausibile che esso possa scomporsi in buchi neri estremi di carica minore, a causa di fluttuazioni quantistiche. La probabilità di questo processo può essere calcolata tramite metodi semiclassici, se viene trovato un istantone opportuno che medî la transizione.

Un tale istantone è dato dalla continuazione euclidea della soluzione (6.34) al tempo immaginario, nel caso $c = 0$. Questo istantone generalizza, nell'ambito della teoria delle corde, l'istantone che media la divisione e la ricombinazione di diversi universi di Bertotti-Robinson, nel processo analizzato da Brill [44] relativamente al caso della relatività generale ($k = 1$).

Il legame con i buchi neri estremi è dovuto al fatto che questi sono approssimati molto bene da universi di Bertotti-Robinson nelle loro regioni asintotiche.

Se si realizza una rotazione di Wick dell'asse dei tempi:

$$t \to it = \tau \qquad \Leftrightarrow \qquad t = -i\tau \ , \tag{7.1}$$

si ha:

$$-g_{00}\, dt^2 = g_{00}\, d\tau^2 \ , \tag{7.2}$$

per cui l'elemento di linea (6.34) diventa:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -V^{-(1+k)}dt^2 + V^2 d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} \\ &\to \quad V^{-(1+k)}d\tau^2 + V^2 d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} \ . \end{aligned} \tag{7.3}$$

I campi scalare e dilatonico di Maxwell (6.35) e (6.36) sono dati da:

$$e^{-2\phi} = V^{\frac{k-1}{2}} \tag{7.4}$$

$$F_{ij} = \frac{\sqrt{1-k}}{2}\, \varepsilon_{ij}{}^{k}\, \partial_k V \ , \tag{7.5}$$

con:

$$V = \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\rho_n} \ . \tag{7.6}$$

La metrica euclidea è, a differenza della controparte lorentziana, geodeticamente completa. L'elemento di linea rappresenta un istantone in cui la regione asintotica dello stato iniziale si ha nel limite per $\rho \to \infty$, nel qual caso $V \to \frac{\alpha_\infty}{\rho}$, con $\alpha_\infty = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n$, e che rappresenta un universo di Bertotti-Robinson nel tempo immaginario.

La regione asintotica dello stato finale la si ottiene per $\rho_j \to 0$ ($j = 1, \ldots, N$), nel qual caso $V \to \frac{\alpha_j}{\rho_j}$, per cui la metrica è di Bertotti-Robinson anche in questo limite.

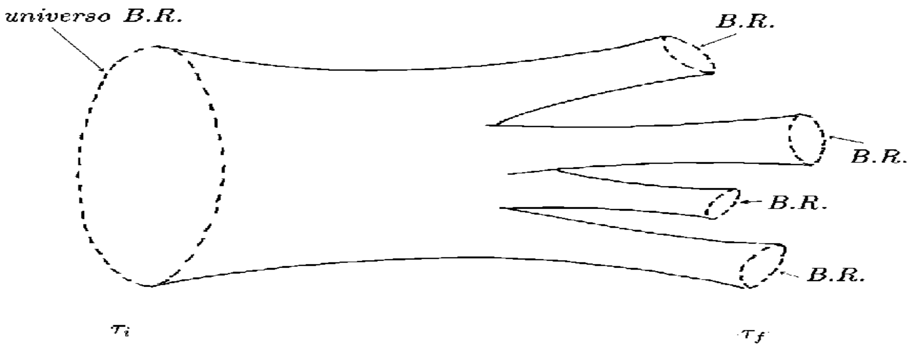

Figura 7.1: L'istantone interpola gli $N+1$ universi di Bertotti-Robinson.

Dunque, l'istantone interpola $N+1$ universi di Bertotti-Robinson, che corrispondono alle sue $N+1$ regioni asintotiche. Ciò che rende tale soluzione un istantone proprio è il fatto che le metriche euclidee (7.3) sono regolari, senza che sia necessario imporre alcuna condizione di periodicità nella coordinata tempo immaginaria. Questo, in relazione alla (5.51), è confermato del fatto che i buchi neri estremi definiti da questa metriche hanno temperatura nulla per ogni valore di k.

7.2 Calcolo dell'azione

Per calcolare la probabilità di tunnelling tra un universo di Bertotti-Robinson e gli N universi dello stesso tipo, bisogna calcolare l'azione euclidea dell'istantone (7.3), che rappresenta il contributo dominante in una approssimazione semiclassica dell'integrale di Feynman. Si osservi che, nel tempo immaginario:

$$\sqrt{-g} \quad \rightarrow \quad \sqrt{g} \tag{7.7}$$

$$d^4x = dt\, d^3x \quad \rightarrow \quad -i\, d\tau\, d^3x = -i\, d^4x\ , \tag{7.8}$$

ma:

$$R \rightarrow R \tag{7.9}$$

$$(\nabla\phi)^2 \rightarrow (\nabla\phi)^2 \tag{7.10}$$

$$F^2 \rightarrow F^2 \,. \tag{7.11}$$

Perciò l'azione della corda:

$$I = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,e^{-2\phi}\left[R - \frac{8k}{1-k}(\nabla\phi)^2 - \frac{3+k}{1-k}F^2\right] \tag{7.12}$$

diventa:

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \frac{1}{16\pi}\int -i\,d^4x\,\sqrt{g}\,e^{-2\phi}\left[R - \frac{8k}{1-k}(\nabla\phi)^2 - \frac{3+k}{1-k}F^2\right] \\ &= iI_E \,, \end{aligned} \tag{7.13}$$

dove I_E è l'azione euclidea:

$$I_E = -\frac{1}{16\pi}\int d^4x\,\sqrt{g}\,e^{-2\phi}\left[R - \frac{8k}{1-k}(\nabla\phi)^2 - \frac{3+k}{1-k}F^2\right]. \tag{7.14}$$

Tuttavia, come sappiamo, questa azione contiene derivate seconde della metrica che devono essere eliminate integrando per parti, in modo da ottenere un'azione che sia quadratica nelle derivate prime del tensore metrico, come richiesto dall'approccio dell'integrale di cammino. Perciò, per assicurare l'unitarietà della teoria, è necessario introdurre nell'azione un integrale di superficie della forma:

$$-\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M} d^3x\,\sqrt{{}^3g}\,e^{-2\phi}K \,, \tag{7.15}$$

dove K è la traccia della seconda forma fondamentale [45] sul contorno ∂M della varietà di integrazione M. Nella nostra metrica diagonale, è data da:

$$K_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\, n^{\mu} \partial_{\mu}\, {}^{3}g_{\rho\sigma} \ ; \tag{7.16}$$

la sua traccia è:

$$\begin{aligned} K &= {}^{3}g^{\rho\sigma} K_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\, {}^{3}g^{\rho\rho}\, n^{\mu} \partial_{\mu}\, {}^{3}g_{\rho\rho} \\ &= \frac{1}{2}\, n^{\mu} \partial_{\mu} \ln\left(g_{00}\, g_{22}\, g_{33}\right) \\ &= \frac{1}{2}\, n^{\mu} \partial_{\mu} \ln\left({}^{3}g\right) . \end{aligned} \tag{7.17}$$

Usando le equazioni di campo relative al campo scalare ϕ, l'integrale di volume può essere convertito in un integrale di superficie; infatti abbiamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\rho}\phi)} \right) \ , \tag{7.18}$$

con:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -2\sqrt{g}\, e^{-2\phi} \left[R - \frac{8k}{1-k} (\nabla\phi)^2 - \frac{3+k}{1-k} F^2 \right] \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\rho}\phi)} \right) &= -\frac{16k}{1-k} \sqrt{g}\, \nabla_{\mu} \left(e^{-2\phi} \partial^{\mu}\phi \right) . \end{aligned} \tag{7.19}$$

Perciò:

$$e^{-2\phi} \left[R - \frac{8k}{1-k} (\nabla\phi)^2 - \frac{3+k}{1-k} F^2 \right] = \frac{8k}{1-k} \nabla_{\mu} \left(e^{-2\phi} \partial^{\mu}\phi \right) . \tag{7.20}$$

Quindi l'azione euclidea può essere scritta nella forma seguente:

$$I_E = -\frac{1}{16\pi} \int_M d^4x\, \sqrt{g}\, \frac{8k}{1-k} \nabla_{\mu} \left(e^{-2\phi} \partial^{\mu}\phi \right)$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M} d^3x\,\sqrt{{}^3g}\,e^{-2\phi}K \\
= & -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M} d^3x\,\sqrt{{}^3g}\,e^{-2\phi}\left[\frac{4k}{1-k}\,n_\mu\partial^\mu\phi + K\right] \\
= & -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M} d^3x\,\sqrt{{}^3g}\,e^{-2\phi}n^\mu\left[\frac{4k}{1-k}\,\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\,\partial_\mu \ln({}^3g)\right]\,. \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

Per le 3-superfici al contorno si possono scegliere i "cilindri" con superfici laterali:

$$\rho = P \quad , \quad -T \leq \tau \leq T \tag{7.22}$$

$$\rho_j = P_j \quad , \quad -T \leq \tau \leq T \; , \tag{7.23}$$

e basi superiore e inferiore:

$$\rho \leq P, \quad \rho_j \geq P_j, \quad \tau = T \tag{7.24}$$

$$\rho \leq P, \quad \rho_j \geq P_j, \quad \tau = -T \; , \tag{7.25}$$

calcolati nel limite $P \to \infty$, $P_j \to 0$, $T \to \infty$ [44].

Per il calcolo dell'azione, si noti che:

$$\phi = \phi(r) \quad ; \quad {}^3g = {}^3g(r) \; ,$$

e quindi:

$$n^\mu\partial_\mu\phi = n^1\partial_1\phi$$

$$n^\mu\partial_\mu \ln({}^3g) = n^1\partial_1 \ln({}^3g) \; .$$

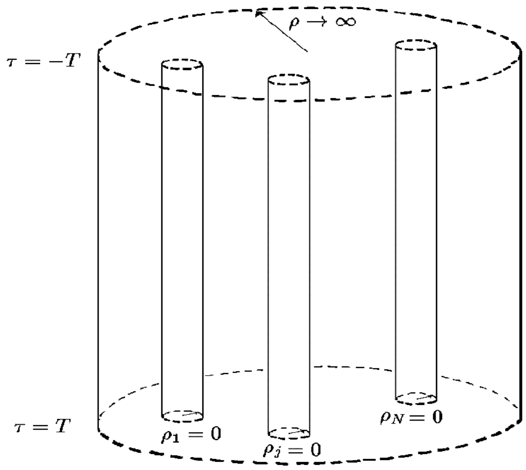

Figura 7.2: Sezione rappresentativa del dominio di integrazione $\vartheta = cost.$

Perciò, nelle basi superiore e inferiore, dove la normale n^μ è diretta secondo l'asse del tempo immaginario τ, l'integrale si annulla.

Sulle superfici laterali $\rho = P$, $\rho_j = P_j$, dove n^μ è diretto secondo la coordinata radiale ρ, si ha un contributo non nullo, in quanto n^μ ha solamente la componente radiale n^1 non nulla:

$$n^\mu = (0, a, 0, 0) = a\delta^{1\mu} \; ,$$

e deve essere:

$$n^\mu n_\mu = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = g_{11} n^1 n^1 = g_{11} a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{g_{11}} = g^{11} \; ,$$

cioè:

$$n^\mu = (0, \sqrt{g^{11}}, 0, 0) \; .$$

Perciò l'azione diventa:

$$\begin{aligned}
I_E &= -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M} d^3x\,\sqrt{{}^3g}\,e^{-2\phi}\sqrt{g^{11}}\left[\frac{4k}{1-k}\partial_\rho\phi+\frac{1}{2}\partial_\rho\ln({}^3g)\right] \\
&= -\frac{1}{8\pi}\int_{-T}^{T}dt\int_0^{\pi}d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\sqrt{V^{-(1+k)}V^2\rho^2V^2\rho^2\sin^2\vartheta}\,V^{\frac{-1+k}{2}}\,V^{-1} \\
&\quad\times\left[\frac{4k}{1-k}\partial_\rho\left(\frac{1-k}{4}\ln V\right)+\frac{1}{2}\,\partial_\rho\ln\left(V^{-(1+k)}V^2\rho^2V^2\rho^2\sin^2\vartheta\right)\right] \\
&= -\frac{1}{8\pi}\rho^2\int_{-T}^{T}dt\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\,[(3+k)\,\partial_\rho\ln V+2\,\partial_\rho\ln\rho)] \\
&= -\frac{T}{2}\,\rho^2\,[(3+k)\,\partial_\rho\ln V+2\,\partial_\rho\ln\rho)]\ . \qquad (7.26)
\end{aligned}$$

Se:

$$V=\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n}{\rho_n}\ , \qquad (7.27)$$

allora, come già detto, l'istantone descrive l'interpolazione di $N+1$ universi di Bertotti-Robinson, che corrispondono alle sue $N+1$ regioni asintotiche.

In vicinanza di ciascuna regione asintotica ($V=\frac{\alpha}{\rho}$), l'azione assume dunque la forma finale:

$$\begin{aligned}
I_E &= -\frac{T}{2}\rho^2\left[(3+k)\,\partial_\rho\ln\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)+2\,\partial_\rho\ln\rho\right] \\
&= \frac{-1+k}{2}\,\rho\,T\ , \qquad (7.28)
\end{aligned}$$

che deve essere calcolata sulle superfici dei cilindri.

Per la superficie laterale dello stato iniziale, l'azione diverge:

$$\lim_{\substack{\rho\to\infty\\ T\to\infty}} I_E=\lim_{\substack{\rho\to\infty\\ T\to\infty}}\frac{-1+k}{2}\,\rho\,T\to\infty\ , \qquad (7.29)$$

ma essa deve essere rinormalizzata sottraendo un uguale contributo dell'universo iniziale singolo di Bertotti-Robinson, in modo da avere un contributo nullo per la transizione $1 \to 1$.

Per le superfici laterali dello stato finale, il contributo della j^{ma} regione asintotica è indeterminato:

$$\lim_{\substack{\rho_j \to 0 \\ T \to \infty}} I_{E(j)} = \lim_{\substack{\rho_j \to 0 \\ T \to \infty}} \frac{-1+k}{2} \rho_j T = 0 \cdot \infty \; ; \tag{7.30}$$

in questo caso bisogna scegliere una opportuna prescrizione di regolarizzazione, in modo che sia unitaria la probabilità di transizione da uno stato iniziale ad uno finale identico. Questa può essere ottenuta considerando il limite $\rho_j \to 0$ prima del limite $T \to \infty$ [44]. Con questa prescrizione, si ottiene un contributo nullo anche dalle superfici laterali dello stato asintotico finale.

Si è quindi ottenuto che il contributo all'azione calcolato nelle basi e nelle superfici laterali del dominio di integrazione cilindrico è nullo.

C'è tuttavia un contributo non nullo all'azione dovuto ai bordi bidimensionali dei cilindri in:

$$\rho = P, \quad \rho_j = P_j, \quad \tau = T \tag{7.31}$$

$$\rho = P, \quad \rho_j = P_j, \quad \tau = -T \; ; \tag{7.32}$$

nei bordi, infatti, la seconda forma fondamentale K ha una discontinuità del tipo della funzione δ di Dirac, dovuta alla brusca inversione ad angolo retto della superficie. Il contributo all'azione della j^{ma} coppia di bordi è [46]:

$$I_{E(edge)_j} = 2 \left(-\frac{1}{8\pi} \right) e^{-2\phi(P_j)} \frac{\pi}{2} A_j \; , \tag{7.33}$$

dove A_j è l'area del j^{mo} bordo $\rho_j = 0$ che, essendo una superficie sferica di raggio α_j, è data da:

$$A_j = 4\pi\alpha_j^2 \; ; \tag{7.34}$$

inoltre:

$$e^{-2\phi(P_j)} = V_j^{\frac{-1+k}{2}} = \left(\frac{\alpha_j}{\rho_j}\right)^{\frac{-1+k}{2}} \quad , \tag{7.35}$$

perciò:

$$I_{E(edge)_j} = -\frac{\pi}{2}\,\rho_j^{\frac{-1+k}{2}}\,\alpha_j^{\frac{3+k}{2}} \; . \tag{7.36}$$

Dalla somma dei contributi delle N coppie di bordi, bisogna ancora sottrarre il valore di un termine dello stesso tipo per l'universo singolo iniziale di Bertotti-Robinson, dato da:

$$\begin{aligned} I_{E(edge)} &= -\frac{\pi}{2}\,\rho^{\frac{-1+k}{2}}\,\alpha_\infty^{\frac{3+k}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{2}\,\rho^{\frac{-1+k}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\right)^{\frac{3+k}{2}} \quad . \end{aligned} \tag{7.37}$$

Perciò il valore finale dell'azione euclidea è:

$$\begin{aligned} I_E &= \frac{\pi}{2}\left[\rho^{\frac{1-k}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\right)^{\frac{3+k}{2}} - \sum_{n=1}^{N}\rho_n^{\frac{1-k}{2}}\,\alpha_n^{\frac{3+k}{2}}\right] \\ &= \begin{cases} 0 & (-1 \le k < 1) \\ \dfrac{\pi}{2}\left[\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\right)^2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^2\right] & (k = 1)\; . \end{cases} \end{aligned} \tag{7.38}$$

Il valore finito dell'azione [1], rende la soluzione (7.3) un istantone proprio.

---

[1] L'annullarsi dell'azione come $\rho_j^{\frac{1-k}{2}}$ ($\rho_j \to 0$) per $k \neq 1$, è dovuto al fatto che al contributo divergente di $\rho^{\frac{1-k}{2}}$ (per $\rho \to \infty$), deve essere sottratto un uguale contributo dell'universo singolo iniziale di Bertotti-Robinson (vedi la discussione seguente l'equazione (7.29)).

Si noti che l'azione dell'istantone è nulla per tutti i valori di k eccetto che nel limite della relatività generale ($k = 1$). Sembra quindi che, quando la gravità è derivata dalla teoria delle corde, con una azione efficace quadridimensionale che, nel limite di bassa energia, prevede l'accoppiamento di un campo scalare dilatonico al campo di Maxwell, le probabilità per il decadimento di un universo di Bertotti-Robinson in due o più universi dello stesso tipo, non dipendano dai parametri α_j.

Come detto prima, questo risultato può essere esteso alla probabilità di decadimento di buchi neri carichi estremi, con parametro α_∞, in buchi neri di carica minore, di parametri α_j, in quanto le loro regioni asintotiche possono essere approssimate da universi di Bertotti-Robinson. Le probabilità ottenute in questo modo sono in accordo con la termodinamica dei buchi neri. Infatti, come si ricava immediatamente dalla (6.18) e (6.19), per il j^{mo} buco nero estremo, le cui regioni asintotiche sono approssimate da questi universi di Bertotti-Robinson, la temperatura T si annulla per ogni k, mentre l'entropia è data da:

$$S_j = \begin{cases} 0 & (-1 \le k < 1) \\ \\ \pi\alpha_j^2 & (k = 1)\ , \end{cases} \tag{7.39}$$

perciò l'azione euclidea è uguale alla metà della differenza delle entropie dei buchi neri le cui regioni asintotiche sono approssimate da universi di Bertotti-Robinson, e pertanto si annulla eccetto che nel limite della relatività generale:

$$I_E = \frac{1}{2}\left(S_\infty - \sum_{n=1}^{N} S_n\right)\ . \tag{7.40}$$

Ne segue che:

$$\langle f|i\rangle \simeq e^{-\frac{I_E}{\hbar}} = e^{-\frac{1}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\left(S_\infty - \sum_{n=1}^{N} S_n\right)\right]} = e^{-\frac{\Delta S}{2\hbar}}\ . \tag{7.41}$$

Ma questa espressione è proprio la probabilità associata dalla meccanica statistica ad una fluttuazione termodinamica in cui l'entropia S devia di una quantità ΔS dal suo valore di equilibrio S_∞ [47].

7.3 Conclusioni

L'istantone e la corrispondente funzione d'onda descrivono il decadimento di un universo di Bertotti-Robinson in due o più.

Ci si aspetta che un istantone analogo descriva il decadimento di un buco nero estremo dilatonico – che, nell'intervallo di variabilità di k, interpola i casi limite di Reissner-Nordström ($k = 1$) e GHS ($k = -1$) – in N buchi neri dello stesso tipo.

Come dimostrato originariamente da Brill [44], la probabilità di decadimento nel limite della relatività generale è soppressa come $e^{-\frac{I_E}{\hbar}}$, in accordo alla violazione della seconda legge della termodinamica dei buchi neri.

In questo lavoro è stato dimostrato che, nel caso più generale in cui l'azione gravitazionale è modificata dalla presenza di un campo scalare dilatonico accoppiato al campo di Maxwell, è nulla l'entropia degli stati iniziale e finale – e quindi anche l'azione euclidea – e il calcolo al primo ordine di approssimazione semiclassica mostra che non esiste una barriera di potenziale che impedisca il processo di divisione.

In definitiva, mentre nel limite della relatività generale, il processo che modifica la topologia dello spazio sembra essere importante solo alla scala di Planck ($\alpha_\infty \simeq M_\infty \simeq M_P$), nel caso dilatonico generale, dato che l'azione euclidea è nulla (e quindi indipendente dai parametri α_j), sembra essere possibile anche a livello macroscopico ($M_\infty \gg M_P$).

Naturalmente, questi risultati sono validi solo al primo ordine in una approssimazione semiclassica. Correzioni di ordine superiore potrebbero introdurre una lieve dipendenza dalla scala anche nel caso dilatonico. Queste conclusioni sono importanti in considerazione del fatto che i buchi neri massimamente carichi, come discusso, possono essere considerati lo stato fondamentale finale del processo di evaporazione di Hawking di buchi neri non estremi di data carica. Dai risultati ottenuti si può dedurre che, a differenza dei buchi neri estremi di Reissner-Nordström che, in generale, sembrano costituire una struttura stabile, i buchi neri estremi dilatonici potrebbero dividersi in buchi neri più piccoli negli ultimi stadi di evaporazione.

Bibliografia

[1] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer: *Introduction to general relativity*, Mac Graw-Hill 1965.

[2] H. Stephani: *General relativity*, Cambridge Univ. Press 1993.

[3] L. D. Landau, E. M. Lifšits: *Teoria dei campi*, Editori Riuniti Ed. MIR 1976.

[4] L. D. Landau, E. M. Lifšits: *Meccanica quantistica (non relativistica)*, Editori Riuniti Ed. MIR 1976.

[5] B. F. Schutz: *A first course in general relativity*, Cambridge Univ. Press 1985.

[6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: *Gravitation*, W. H. Freeman 1973.

[7] S. Weinberg: *Gravitation and cosmology*, John Wiley & sons 1972.

[8] H. B. Green: *Superstrings*, Scientific American, September 1986.

[9] D. Bailin, A. Love: *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, Inst. of Physics Publishing 1994.

[10] R. P. Feynman, A. R. Hibbs: *Quantum mechanics and path integrals*, Mac Graw-Hill 1965.

[11] J. S. Townsend: *A modern approach to quantum mechanics*, Mac Graw-Hill 1992.

[12] F. Mandl, G. Shaw: *Quantum field theory*, John Wiley & sons 1984.

[13] L. D. Faddev, A. A. Slavnov: *Gauge fields, introduction to quantum theory*, The Benjamin/Cummings 1980.

[14] E. S. Abers, B. W. Lee: *Gauge theories*, Phys. Rep. **9**, 1 (1992).

[15] R. Rajaraman: *Solitons and instantons*, North Holland 1989.

[16] S. Coleman: *Aspects of simmetry*, Cambridge Univ. Press 1988.

[17] S. Coleman: *Fate of the false vacuum: semiclassical theory*, Phys. Rev. **D15**, 2929 (1977).

[18] G. Arfken: *Mathematical methods for phisicists*, Academic Press 1968.

[19] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis: *The large scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, 1973.

[20] S. W. Hawking: *Euclidean quantum gravity*, in *Recent developments in gravitation*, Plenum Press 1979.

[21] S. W. Hawking: *The path-integral approach to quantum gravity*, in *General relativity; an Einstein centenary survey*, edited by S. W. Hawking, W. Israel; Cambridge Univ. Press 1979.

[22] A. Strominger in *Quantum cosmology and baby universes*, edited by S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran, S. Weinberg; World Scientific 1991.

[23] J. A. Wheeler: *Geons*, Phys. Rev. **97**, 511 (1955).

[24] F. De Felice, C. J. S. Clarke: *Relativity on curved manifolds*, Cambridge Univ. Press 1992.

[25] B. Carter in *Black holes*, edited by C. DeWitt, B. S. DeWitt; Gordon and Breach, New York 1973.

[26] G. W. Gibbons: *Vacuum polarization and the spontaneous loss of charge by black holes*, Comm. Math. Phys. **44**, 245 (1975).

[27] S. W. Hawking: *Particle creation by black holes*, Comm. Math. Phys. **43**, 199 (1975).

[28] B. Bertotti: *Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity*, Phys. Rev. **116**, 1331 (1959).

[29] I. Robinson: *A solution of the Einstein-Maxwell equations*, Bull. Akad. Polon. **7**, 351 (1955).

[30] S. D. Majumdar: *A class of exact solutions of Einstein's field equations*, Phys. Rev **72**, 930 (1947).

[31] A. Papapetrou: *A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge distribution*, Proc. Roy. Irish Acad. **A51**, 191 (1947).

[32] J. B. Hartle, S. W. Hawking: *Solutions of the Einstein-Maxwell equations with many black holes*, Comm. Math. Phys.**26**, 87 (1972).

[33] I. D. Novikov, V. P. Frolov: *Physics of black holes*, Kluwer Academic Pub. 1989.

[34] G. W. Gibbons, S. W. Hawking: *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, Phys. Rev. **D15**, 2752 (1976).

[35] P. C. W. Davies: *Thermodinamics of black holes*, Rep. Prog. Phys. **48**, 1313 (1978).

[36] S. Mignemi, N. R. Stewart: *Charged black holes in effective string theory*, Phys. Rev. **D47**, 5259 (1993).

[37] R. Gregory, J. A. Harvey: *Black holes with a massive dilaton*, Phys. Rev. **D47**, 2411 (1992).

[38] M. Cadoni, S. Mignemi: *Dilatonic black holes in theories with moduli fields*, Phys. Rev. **D48**, 5536 (1993).

[39] M. Cadoni, S. Mignemi: *Classical and semiclassical properties of extremal black holes with moduli fields*, Nucl. Phys. **B427**, 669 (1994).

[40] D. Garfinkle, G. Horowitz, A. Strominger: *Charged black holes in string theory*, Phys. Rev. **D43**, 3140 (1991).

[41] M. Cadoni, S. Mignemi: *Non-singular four-dimensional black holes and the Jackiw-Teitelboim theory*, Phys. Rev. **D51**, 4319 (1995).

[42] K. Shiraishi: *Multicentered solution for maximally charged dilaton black holes in arbitrary dimensions*, J. Math. Phys. **34**, 1480 (1993).

[43] S. B. Giddings, A. Strominger: *Dynamics of extremal black holes*, Phys. Rev. **D46**, 627 (1992).

[44] D. R. Brill: *Splitting of an extremal Reissner-Nordström throat via quantum tunnelling*, Phys. Rev. **D46**, 1560 (1992).

[45] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. J. Fomenko: *Geometria contemporanea*, Editori Riuniti Ed. MIR 1987.

[46] G. Hayward: *Gravitational action for spacetimes with nonsmooth boundaries*, Phys. Rev. **D47**, 3275 (1993).

[47] R. Kallosh, A. Linde, T. Ortín, A. Peet, A. Proyen: *Supersimmetry as a cosmic censor*, Phys. Rev. **D46**, 5278 (1992).

[48] S. Demelio, S. Mignemi: *Multi black holes and instantons in effective string theory*, preprint INFNCA-TH9612.

RINGRAZIAMENTI

Un sentitissimo grazie al dott. Salvatore Mignemi che mi ha guidato con pazienza e costanza nell'affascinante campo della gravità quantistica e per le numerose e interessanti discussioni sull'argomento.
Un ringraziamento particolare al prof. Alberto Devoto per la sua costante disponibilità.
Ringrazio il dott. Mariano Cadoni per alcune utili note.
Desidero infine ringraziare il dott. Maurizio Melis per i preziosi suggerimenti nella fase finale di stampa.