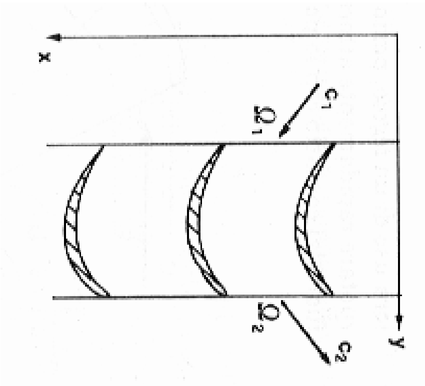
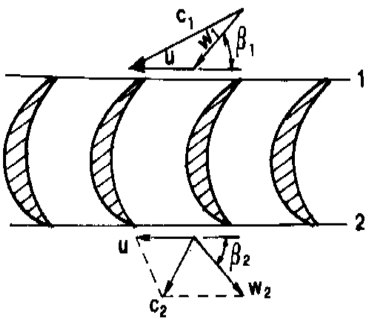
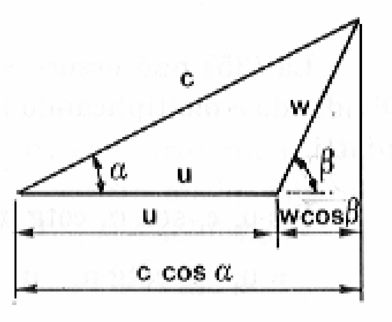
Vediamo ora l'aspetto funzionale di un elemento rotorico considerando l'efflusso sulla sezione media (l/D piccolo per l'alta pressione ed anche entro certi limiti per la media pressione). Consideriamo la sezione cilindrica effettuata sul diametro medio D e la srotoliamo su di un piano. La forma della palettatura dipenderà dalle caratteristiche dello stadio della macchina, dal grado di reazione ecc. A titolo di esempio avremo una configurazione di questo tipo:



L' asse x è parallelo e concorde con la velocità periferica u, mentre l' asse y è parallelo all' asse di rotazione della macchina e diretto secondo la velocità assiale del fluido.Le palette le consideriamo sottili in modo che le sezioni delle pale sono tracce (linee) ma nella realtà le pale hanno il loro spessore come in figura. Ai fini del nostro studio consideriamo l' efflusso monodimensionale come se le palette fossero infinitamente ravvicinate tra di loro così che i filetti di fluido ricopiano esattamente il profilo palare. Confondiamo la traccia sul piano del disegno della palettatura con lo scheletro della palettatura stessa

Triangolo delle velocità





$\bar{c}$ velocità assoluta del fluido

$\bar{w}$ velocità relativa

$\bar{u}$ velocità periferica della ruota

$\bar{c} = \bar{u} + \bar{w}$

a: angolo formato dalle direzioni positive di $\bar{u}$ e $\bar{c}$

b: angolo formato delle direzioni positive di $\bar{w}$ e $\bar{u}$

Notare che la velocità di trascinamento u per una macchina assiale è uguale in qualsiasi sezione $u_1 = u_2 = u$ in quanto la distanza radiale è la stessa. Nel modello monodimensionale l'angolo β ha il doppio significato di angolo fluidodinamico e costruttivo in quanto il fluido entra nel vano palare proiettato conformemente alla tangente al profilo nel punto di ingresso. Analogamente per l'uscita. Nel modello monodimensionale per il quale $\beta_{luidodinamico}=\beta_{costr.}$ le traiettorie di tutti i filetti fluidi sono identici tra di loro e ricopiano il profilo palare. Il disegno del triangolo delle velocità viene condizionato dalla scelta della direzione del vettore w e da una delle velocità.

LE FORMULE DI EULERO
MACCHINE ASSIALI

Supponendo ora di fare riferimento ad una palettatura, vogliamo per un generico valore della velocità periferica u, valutare la forza o coppia e la potenza trasmessa dal fluido sulla palettatura o viceversa. Applicando il teorema della quantità di moto ovvero il teorema del momento della quantità di moto in quanto per una macchina assiale è indifferente.

Applicando il teorema della quantità di moto

$$M(c_{2_j} - c_{1_j}) = F_{M_j} + F_{S_j} + (P_1\Omega_{1_j} - P_2\Omega_{2_j})$$

j indice che è associato all' asse della proiezione della equazione

asse x per le sollecitazioni tra fluido e palettatura nel senso del moto della palettatura

asse y per le spinte assiali che sollecitano le parti fisse della macchina, in particolare i cuscinetti

F_{M_j} forze di massa

F_{S_j} forze di superficie

$P_i\Omega_i$ forze di pressione

Trascuro le forze di massa e di pressione (cosa lecita per un aeriforme)

$$F_{S_x} = M(c_{2_x} - c_{1_x})$$

Con la simbologia che abbiamo adottato

$$F_{S_x} = M_0(c_2 \cos\alpha_2 - c_1 \cos\alpha_1)$$

Questa espressionie ci da la componente della forza trasmessa dal fluido alle superfici palari a contatto con il medesimo ed è relativa ad un vano palare

Se vogliamo la componente secondo x della forza trasmessa dalla palettatura sul fluido

$$F^e_{S_x} = -F_{S_x} = M_0(c_1 \cos\alpha_1 - c_2 \cos\alpha_2)$$

M_0 portata per un vano palare

$M = zM_0$ $\quad M =$ portata totale $\quad z =$ numero delle pale

La componente della forza trasmessa dal fluido sulla palettatura sarà positiva per macchine motrici, mentre la stessa componente esercitata dalla palettatura sul fluido sarà positiva per una macchina operatrice.

F_{S_y} è la forza trasmesa dal fluido sulla palettatura.

$$F_{S_y} = M_0(c_2 \sin\alpha_2 - c_1 \sin\alpha_1) + (P_2\Omega_2 - P_1\Omega_1)$$ (Non trascuro ora le forze di pressione)

La forza trasmessa dalla palettatura al fluido sarà pari a $F^{(e)}_{S_y}$

$$F^{(e)}_{S_y} = -F_{S_y} = M_0(c_1 \sin\alpha_1 - c_2 \sin\alpha_2) + (P_1\Omega_1 - P_2\Omega_2)$$

$$z\Omega_1 = \frac{\pi}{4}\left(D_1^2 - D_2^2\right) = \frac{\pi}{4}(D_1 - D_2)\,(D_1 + D_2) = \ldots\ldots \qquad \Omega_1 = \frac{\pi D_1 l_1}{z} \qquad \Omega_2 = \frac{\pi D_2 l_2}{z}$$

$D_1 = D_2,\ l_1 = l_2$ dal momento che abbiamo suposto $\dfrac{l}{D} << 1$

Volendo studiare la macchina sotto l'aspetto funzionale ciò che interessa è la componente della forza trasmessa dal fluido sulla palettatura nella direzione del moto. La valutazione della forza Fs_Y^e trasmessa dal fluido sulla palettatura ha interesse esclusivamente sotto l'aspetto costruttivo in quanto è la forza che rende dimensionabile il cuscinetto di spinta della macchina. Con riferimento allora alla Fs_X^e vogliamo ricavare la potenza trasmessa dal fluido sulla palettatura nel caso di una macchina motrice ovvero la potenza spesa sul fluido nel caso di una macchina operatrice (stessa equazione ma con i segni scambiati al secondo membro). Facciamo riferimento a una macchina motrice della quale abbiamo trovato la Fs_X. La potenza relativa ad un vano palare sarà:

$$P_0 = F_{s_x}^e \cdot u = M_0 u\left(c_1 \cos\alpha_1 - c_2 \cos\alpha_2\right)$$

Una grandezza di uso ricorrente nello studio delle turbomacchine è la potenza specifica, ovvero la potenza per unità di massa P, della quale noi prenderemo sempre il valore assoluto

$$M = M_0 z$$

$$P = P_0 z$$

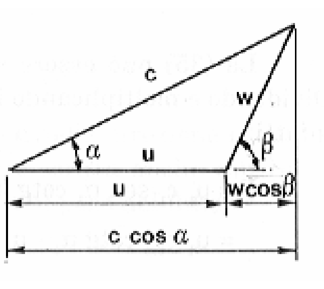
$$P = \frac{P}{M} = u(c_1 \cos\alpha_1 - c_2 \cos\alpha_2) \qquad \text{per una macchina motrice}$$

$$P = \frac{P}{M} = u(c_2 \cos\alpha_2 - c_1 \cos\alpha_1) \qquad \text{per una macchina operatrice}$$

La potenza trasmessa per unità di portata, ovvero il lavoro specifico, è proporzionale alla variazione della quantità di moto nella direzione della girante cioè nella direzione di u. Nella macchina operatrice abbiamo incremento della quantità di moto sempre nella direzione di moto della ruota. La formula della potenza appena vista costituisce la I° equazione di Eulero ma non è l'unica. La II° equazione di Eulero discende dalla prima e la si può ricavare applicando ai triangoli delle velocità il teorema delle proiezioni.
Dal triangolo delle velocità generico proiettando sulla direzione di u si ha:

$$c \cdot \cos\alpha = u + w \cos\beta$$

Possiamo scrivere questa espressione 2 volte, una per l'ingresso e l'altra per l'uscita

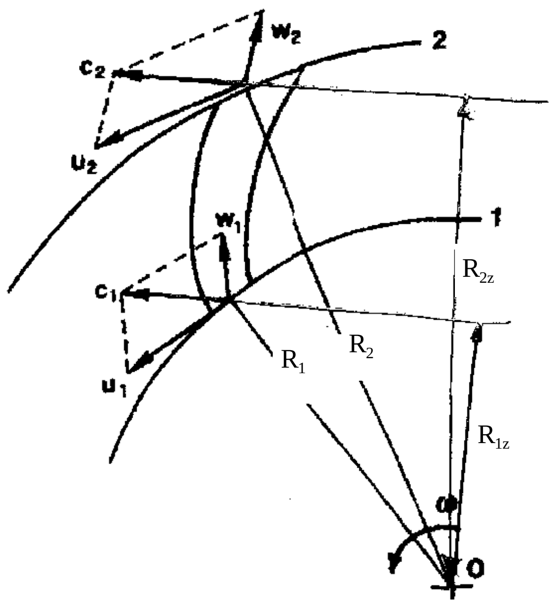


$$c_1 \cos\alpha_1 = u + w \cos\beta_1$$
$$c_2 \cos\alpha_2 = u + w \cos\beta_2$$
$$u_1 = u_2 \, (assiali)$$

SECONDA EQUAZIONE DI EULERO

$$P = u(w_1 \cos\beta_1 - w_2 \cos\beta_2) \qquad \text{per macchine motrici}$$
$$P = u(w_2 \cos\beta_2 - w_1 \cos\beta_1) \qquad \text{per macchine operatrici}$$

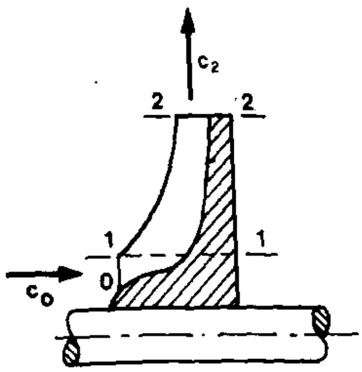
SCAMBIO DI POTENZA NELLE MACCHINE RADIALI



Esaminiamo ora una macchina radiale per la quale la componente radiale della velocità consemte lo smaltimento della portata, ad esempio una pompa. In questo caso valgono ancora le considerazioni sulla uniforme distribuzione dei parametri in quanto siamo sotto l'ipotesi di modello monodimensionale, le traiettorie del fluido ricopiano il profilo della pala. In figura abbiamo indicato i triangoli delle velocità in ingresso e in uscita. Faciamo riferimento ad una sezione passante per l'asse della macchina.

In questo caso $u_1 \neq u_2$

$$u_1 = \omega R_1 \qquad u_2 = \omega R_2 \qquad R_1 = \frac{D_1}{2} \qquad R_2 = \frac{D_2}{2}$$



Applicando i teorema del momento della quantità di moto tenendo ora conto che esendo le pressioni in senso ortogonale all'ingresso e all'uscita, non offrono alcun contributo al momento, trascurando le forze di massa, il che è ammissibile per un fluido aeriforme, avremo per m_{sz} con riferimento ad un vano palare

$$M_0 (c_2 R_{2_z} - c_1 R_{1_z}) = m_{s_z}$$

$$R_{1_z} = R_1 \cdot \cos\alpha_1 \qquad R_{2_z} = R_2 \cdot \cos\alpha_2$$

$$\Omega_1 = \pi \cdot D_1 b$$

$$\Omega_2 = \pi \cdot D_2 b$$

$$m_{s_z} = M_0 (c_2 \cos\alpha_2 R_2 - c_1 \cos\alpha_1 R_1)$$ macchina operatrice

$$P_0 = m_{s_z} \omega = M_0 \left(u_2 c_2 \cos\alpha_2 - c_1 \cos\alpha_1 \right)$$

$$P = zP_0$$

In termini di potenza specifica :

$$P = \frac{P}{M} = u_2 c_2 \cos\alpha_2 - u_1 c_1 \cos\alpha_1 \; > 0$$ macchine operatrici radiali

$$P = \frac{P}{M} = u_1 c_1 \cos\alpha_1 - u_2 c_2 \cos\alpha_2 \; > 0$$ macchine motricii radiali

$$P = u(c_1 \cos_1 - c_2 \cos\alpha_2)$$ macchine motrici assiali

$$P = u(c_2 \cos\alpha_2 - c_1 \cos\alpha_1)$$ macchine operatrici assiali

Dal punto di vista formale la formula della potenza specifica per una macchina assiale è un caso particolare della formula delle radiali nel senso che le velocità periferiche sono uguali tra di loro con riferimento alla prima equazione di Eulero. Applicando il teorema delle proiezioni alla seconda equazione, tenendo conto che u_1 ora è diverso da u_2, abbiamo

$$P = (u_2 w_2 \cos\hat{a}_2 - u_1 w_1 \cos\hat{a}_1) + u_1^2 - u_2^2 \qquad \text{macchine operatrici}$$

Nella seconda espressione abbiamo il termine delle u^2. Anche qui possiamo dire che il caso delle macchine assiali è un caso particolare delle macchine radiali nel senso che $u_1 = u_2$. Possiamo cioè vedere l'espressione della potenza per le macchine radiali come caso particolare delle assiali.

Terza espressione della formula di Eulero

Per il teorema di Carnot $\quad w^2 = u^2 + c^2 - 2uc \cdot \cos a \rightarrow uc \cdot \cos a = \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{w^2}{2}$

$$w_1^2 = u_1^2 + c_1^2 - 2u_1 c_1 \cos a_1 \qquad\qquad w_2^2 = u_2^2 + c_2^2 - 2u_2 c_2 \cos a_2$$

$$P = u_1 c_1 \cos\acute{a}_1 - u_2 c_2 \cos\acute{a}_2 = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} > 0 \qquad \text{motrice}$$

$$P = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} > 0 \qquad \text{operatrice}$$

Nel caso di macchina assiale $u_1 = u_2$ quindi abbiamo due soli termini. La III° espressione ci da qualche suggerimento sulle opportunità che vengono messe a disposizione dalle macchine assali e radiali. Per quanto riguarda la potenza specifica vediamo che a parità dei primi 2 termini, per una macchina radiale operatrice, converrà che sia $u_2 > u_1$, in maniera tale che il termine cinetico del moto di trascinamento contribuisca positivamente alla potenza specifica dello stadio. Viceversa per una macchina motrice sarebbe opportuno che fosse $u_1 > u_2$ per far si che il termine cinetico contribuisca positivamente all'espressione della potenza specifica dello stadio. Ci poniamo ora la domanda: perché non preferiamo che il termine delle u sia sottrattivo nelle macchine operatrici in quanto significherebbe conferire meno lavoro dall'esterno per mantenere in vita lo stadio? Risparmieremo lavoro ma otterremo anche un minore accrescimento del patrimonio energetico del fluido. Quindi si ha in generale tutto l'interesse che la potenza sia elevata in uno stadio a parità di ingombro e di costo sia per le macchine motrici e per quelle operatrici. Ecco perchè conviene che la potenza specifica sia la più elevata possibile. Nasce quindi la preferenza per le macchine di tipo centrifugo ($u_2 > u_1$, $R_2 > R_1$) nel caso di macchine operatici. Quando la scelta della macchina cade sulla macchina radiale, nel caso di macchina operatrice, conviene che sia di tipo centrifugo, cioè il moto del fluido è diretto dal centro alla periferia, in quanto il fluido essendo soggetto ad azioni inerziali di tipo centrifugo trova nella soluzione radiale centrifuga un comportamento conforme alle proprie tendenze. In una macchina motrice, nel caso si scegliesse la soluzione radiale, sarebbe naturale fare la scelta opposta ($u_1 > u_2$), ossia moto del fluido dalla periferia verso il centro, cioè la componente radiale della velocità, che poi è quella che garantisce lo smaltimento della portata, sarebbe diretta verso il centro e non verso la periferia e negli esempi dal punto di vista del calcolo sul modello monodimensionale è esattamente così.

Soltanto che il fluido sarà comunque -soggetto ad azioni inerziali di tipo centrifugo e quindi un moto centripeto , cioè dalla periferia verso il centro, troverebbe da parte del fluido una risposta contraria. Il fluido sarebbe costretto a muoversi in senso contrario alla sua inclinazione. Per questo motivo, salvo poche applicazioni di piccola taglia nelle quali l'effetto centripeto è tollerabile e non genera forti penalizzazioni sotto il profilo delle prestazioni, le macchine radiali nel campo delle macchine motrici sono impiegate pochissimo, salvo se molto piccole (ad esempio nei turbocompressori per motori a combustione interna). In passato sono state studiate alcune soluzioni particolari che però non rivestono una notevole importanza.