ANALISI DEI CONDOTTI DELLE TURBOMACCHINE

Facciamo riferimento a condotti che hanno il compito di accelerare un fluido, che espande a spese dell'entalpia, con un incremento di energia cinetica. Essi corrispondono agli elementi statorici delle turbomacchine o ugelli. Le ipotesi che facciamo sono :

1) Moto permanente
2) Modello e flusso monodimensionale
3) Fluido assimilato a gas ideale
4) Processo adiabatico isentropico

Il processo adiabatico isentropico è lecito per la sede ideale limite ma passando alla sede reale la trasformazione è adiabatica ma non isoentropica. Vogliamo valutare la velocità di uscita da un condotto. La geometria del condotto è definita da una ascissa curvilinea $\Omega(s)$
Potremo avere condotti puramente convergenti oppure convergenti - divergenti per le velocità supersoniche. Sia Ω_0 la sezione iniziale del condotto e siano p_o, ρ_o i parametri termodinamici del fluido. Approssimiamo la velocità iniziale c_0 nulla, che come ipotesi come vedremo non introduce approssimazioni notevoli nel calcolo. Ora ci chiediamo ,in una sezione qualsiasi, quale sarà la velocità del fluido?
Dobbiamo partire dall'equazione dell'energia in forma termica e meccanica:

Dalla forma termica $dQ + dL = dh + cdc + gdz$

$gdz = 0$ per un aeriforme

dQ = 0 perchè il processo è adiabatico

dL = 0 perchè le pareti del condotto sono rigide quindi resta: $\mathrm{dh} + \mathrm{cdc} = 0$

In termini meccanici

$\mathrm{dL} = \dfrac{\mathrm{dp}}{r} + cdc + gdz + dL_p$ diventa con le ipotesi di partenza: $\dfrac{\mathrm{dp}}{r} + cdc = 0$

Calcolare dh oppure $\dfrac{\mathrm{dp}}{r}$ è la stessa cosa come si vede dalle 2 espressioni dell' energia

Partiamo dalla equazione della energia in forma meccanica e la integriamo tra p_0 *e* p

$$\frac{c^2 - c_0^2}{2} = -\int_{p_0}^{P} \frac{dp}{r}$$

L' integrale deve esere calcolato sulla curva della trasformazione che abbiamo scelto.

nel nostro caso adiabatica isentropica $\dfrac{p}{r^k} = \dfrac{p_0}{r_0^k} = \cos t \;\rightarrow\; r = \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} r_0$

$p_{0,}\, r_0$ sono i valori dei due parametri che definiscono lo stato termodinamico del fluido in partenza che possiamo chiamare al ristagno

.

Questo perchè come possiamo ben vedere nella formula precedente c_0^2 è molto minore di c^2 e quindi lo possiamo trascurare. Negli efflussi che interessano nelle sezioni prossime all' uscita il valore di c è di un ordine di grandezza superiore rispetto a c_0 (qualche centinaio di metri al secondo).

$$\frac{c_0}{c} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{c_0^2}{c^2} = \frac{1}{100} \qquad c_0^2 << c^2$$

Trascuro c_0^2 rispetto a c_0 e consideriamo $c_0 = 0$ al ristagno per cui

$$\frac{c^2}{2} = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{r_0} \cdot \frac{k}{k-1} p_0^{\frac{k-1}{k}} \left[1 - \left(\frac{P}{p_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \Rightarrow \qquad c = \sqrt{\frac{2k}{k\text{-}1} \frac{P_0}{r_0} \left[1 - \left(\frac{P}{p_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \qquad \mathbf{I}$$

Questa è la formula di De Saint Venant che ci permette di valutare la velocità del fluido per l'efflusso considerato. Sotto quali condizioni si raggiunge la velocità sonica Ma = 1 ? Per fare ciò imponiamo che c = c* e di conseguenza cerchiamo il rapporto P/P_0 per cui si realizza.

$$\mathrm{M} = r\mathrm{c}\Omega \rightarrow \frac{M}{\Omega} = rc = \sqrt{\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{k}-1} \frac{P_0}{r_0} r^2 \left[1 - \left(\frac{P}{r_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

$$\frac{\mathrm{P}}{r^{\mathrm{k}}} = \frac{P_0}{r_0^k} \rightarrow r^{\mathrm{k}} = \frac{P}{P_0} r_0^k \rightarrow r = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}} r_0 \rightarrow r^2 = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2}{k}} r_0^2$$

da cui

$$rc = \frac{M}{\Omega} = \sqrt{\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{k}-1} P_0 r_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2}{k}} \left[1 - \left(\frac{P}{r_o}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

Durante l'efflusso per la continuità della portata in massa M = ρcΩ la sezione Ω del condotto dovrà variare in ragione inversa a quella del prodotto ρc. Infatti nella sezione d'ingresso $c_0 \approx 0$ per cui ρc = 0 mentre allo scarico ρ≈0 e allora ρc = 0. Esplorando il condotto lungo il suo asse ci sarà una sezione nella quale il prodotto ρc avrà un massimo relativo ed ivi l'area della sezione sarà la minima (sezione contratta Ω_c). Il rapporto P/P_0 si può determinare calcolando il massimo della funzione ρc (vedi libro di testo pag.79). Si ottiene che :

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad \mathrm{P_c} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} P_0 \qquad \mathbf{II}$$

Qualsiasi sia l' aeriforme che nell' ambito delle nostre trasformazioni trattiamo come gas ideale esiste un rapporto critico al di sotto del quale la velocità c è supersonica. Per il rapporto $P/P_0 = P_c/P_o$ abbiamo esattamente la velocità critica. Il rapporto critico viene a dipendere da k che come sappiamo oscilla entro una certa gamma di valori. Al variare dell'aeriforme abbiamo per esempio: gas monoatomici k = 1,66, P_c/P_o = 0,488 gas biatomici (aria) k = 1,4 P_c/P_0 = 0,528. Per il vapore surriscaldato k varia marcatamente, tra la temperatura di 550°C e la curva limite superiore k = 1,3 P_c/P_o = 0,546. Infine per il vapore saturo inteso come valore medio k = 1,135 P_c/P_o = 0,577. Anche variando di molto la tipologia del fluido il rapporto critico è compreso tra 0,5 e 0,55. Quando la pressione a valle è minore del 50% della pressione a monte l'efflusso passa da regime subsonico a regime supersonico. Nell'ipotesi che si raggiunge la velocità sonica e quindi si dovrà disegnare un condotto con una sezione contratta, con una sezione di minimo in uscita per far si che esso accompagni il processo del fluido, quanto vale la velocità critica nella sezione contratta ? Ovvero la velocità sonica nella sezione contratta? Dobbiamo valutare anzitutto il rapporto critico delle densità e delle temperature, cioè i parametri termodinamici che ci interessano in corrispondenza della sezione contratta.

Temperatura critica

$$\frac{T_c}{T_0} = \left(\frac{P_c}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \rightarrow \frac{T_c}{T_0} = \left[\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}} \qquad \frac{T_c}{T_0} = \frac{2}{k+1}$$

Densità critica

$$\frac{\mathrm{P_c}}{r_c^k} = \frac{P_0}{r_0^k} \rightarrow \frac{\mathrm{P_c}}{P_0} = \frac{r_c^k}{r_0^k} \rightarrow \frac{r_c}{r_0} = \left(\frac{\mathrm{P_c}}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}} = \left[\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{1}{k}} \qquad r_c = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} r_0 \qquad \textbf{III}$$

Dalle precedenti abbiamo:

$$\frac{\mathrm{P_c}}{r_c} = \frac{P_0}{r_0}\frac{2}{k+1} \qquad \textbf{IV}$$

La velocità del suono nella sezione contratta Ma = 1 sarà :

$$c_c = c_c^* = \sqrt{k\frac{P_c}{r_c}} \qquad \Rightarrow \qquad c_c^* = \sqrt{2\frac{k}{k+1}\frac{P_0}{r_0}} = \sqrt{\frac{2}{k+1}c_0^*} \qquad \textbf{V}$$

Avendo indicato con $c_0^* = \sqrt{\mathrm{k}\frac{P_0}{r_0}}$ la velocità sonica al ristagno

RIEPILOGO

$$c = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{r_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \qquad \mathbf{I}$$

$$\frac{p_c}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad \mathbf{II}$$

$$\frac{r_c}{r_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \qquad \mathbf{III}$$

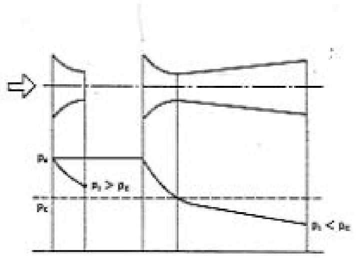
$$\frac{p_c}{r_c} = \frac{p_0}{r_0}\frac{2}{k+1} \qquad \mathbf{IV}$$

$$c_c = c_0^*\sqrt{\frac{2}{k+1}} \qquad \mathbf{V}$$

DIMESIONAMENTO DI MASSIMA

A questo punto abbiamo tutti i dati per effettuare un dimensionamento di massima di un ugello destinato ad accelerare il fluido. Vediamo come si può procedere.

Sia 1 la sezione di uscita indichiamo con Ω_1 l' area della sezione, Ω_c la sezione contratta.



a) $\mathrm{Ma}_1 < 1$ (ugello convergente)

L' intero efflusso è subsonico.

E' necessario che $\dfrac{P_1}{P_0} > \dfrac{P_c}{P_0}$

I dati sono : P_0, r_0, P_1 (di uscita) oppure $\dfrac{P_1}{P_0}$

Se vogliamo disegnare il condotto, cioè l' area della sezione in uscita dovremo preventivare la portata massima di fluido M desiderata.

In definitiva abbiamo 4 dati di progetto: 2 parametri termodinamici al ristagno, la pressione in uscita e la portata.

La portata in una sezione generica è : $M = r c \Omega$

la portata nella sezione di uscita è : $M = r_1 c_1 \Omega_1$

Dalla espressione I e dalla $\dfrac{P}{r^k} = \dfrac{P_0}{r_0^k}$ otteniamo $c_1 r_1$ per $\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{P_1}{P_0}$

Assegnata la M calcoliamo $\Omega_1 = \dfrac{M}{r_1 c_1}$

b) $\mathrm{Ma}_1 = 1$ (efflusso critico)

Disegneremo il condotto puramente convergente ma con tangente orizzontale nella sezione di uscita caratterizzata da un minimo relativo.

I n questo caso useremo le formule III e V

$$\frac{r_c}{r_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \qquad \text{e} \qquad c_c = c_0^* \sqrt{\frac{2}{k+1}}$$

calcoliamo c_c e r_c dopo di che valutiamo la sezione critica Ω_c

$$\Omega_c = \frac{M}{c_c r_c}$$

Se abbiamo un condotto puramente convergente ma disegnato male o meglio disegnato con una sezione di uscita estremale e imponiamo all'ambiente esterno una pressione uguale alla pressione critica, un rapporto $p_1/p_o = p_c/p_o$, il fluido uscirà dalla sezione ancora di poco subsonico e poi la sezione di minimo se la crea da solo proseguendo entro certi limiti la propria espansione fino al raggiungimento della velocità sonica creando un prolungamento del condotto convergente fino alla velocità critica. Tutto dipende dalle condizioni dell'ambiente a valle.

c) Efflusso supersonico $\mathrm{Ma} > 1$ ossia $\frac{P_1}{P_0} < \frac{P_c}{P_0}$ (condotto convergente divergente)

In questo caso il progetto di massima del condotto richiede, per una portata assegnata, di stabilire sia il valore della sezione contratta che della sezione di uscita in quanto il valore della sezione contratta è stabilito dalla portata che noi desideriamo e dalle condizioni a monte del fluido. Il valore di Ω_1 sarà commisurato dalla pressione P_1 che abbiamo assegnato nei dati di progetto oppure dal rapporto $\frac{P_1}{P_0}$

La condizione di sonicità per la portata M assegnata determina il valore di Ω_c mentre il valore della pressione desiderata allo scarico stabilirà con quale sezione finale potremo disegnare il condotto.

Usando la IV e la V determiniamo Ω_c, usando la I e la $\frac{p}{r^k}$ determiniamo Ω_1

La condizione di sonicità ci serve per calcolare Ω_c, la condizione di uscita del fluido ci permette di valutare la sezione Ω_1

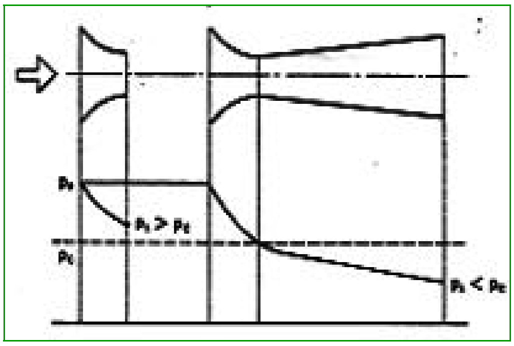
Ordine di grandezza di c_c rispetto a c_0*

Per un gas biatomico (aria) k = 1,4 $c_c = 0{,}913c_0$* tra il valore della velocità critica e il valore della velocità critica al ristagno esiste un rapporto 0,913 per un gas biatomico. Il fatto che la velocità sonica in uscita sia minore della velocità critica al ristagno è perché l'espansione è accompagnata anche da una diminuzione del rapporto p/ρ.

Nella misura in cui il fluido espande la temperatura diminuisce e più ci si sposta nell'espansione, minore è la velocità sonica. In altri termini se Ma = 1 la velocità critica si raggiunge per velocità tanto più basse quanto più bassa è la temperatura.

$$c = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{r_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \qquad (1)$$

$$\frac{p}{r^k} = \frac{p_0}{r_0^k} \qquad (2)$$



Disegno di massima

Il disegno in dettaglio richiede uno studio del condotto. Abbiamo calcolato Ω_1 nel caso di un condotto convergente divergente, Ω_c nel caso di un condotto sonico e la coppia Ω_c,Ω_1 nel caso di un condotto supersonico. La geometria fine del disegno viene stabilita dal costruttore con criteri che sono legati alla sua esperienza industriale. Il condotto convergente normalmente è disegnato molto corto perchè non esistono motivazioni che favoriscano l'allungamento del condotto. Non essendoci pericolo del distacco di vena, dato che la pressione del fluido diminuisce mentre la sezione si restringe, non c'è motivazione di allungare il tratto convergente perché comporta di solito un aumento delle perdite fluidodinamiche. Il tratto divergente invece viene disegnato molto allungato tant'è che i semiangoli di apertura del cono vengono contenuti entro valori piuttosto bassi dell'ordine di 4-6° e questo per evitare la formazione di distacchi di vena. Abbiamo criteri diversi a seconda del tipo di condotto.

CONO DI STODOLA

Prendiamo ora in considerazione un condotto convergente con la sezione terminale estremale disegnata correttamente per moto subsonico o supersonico.

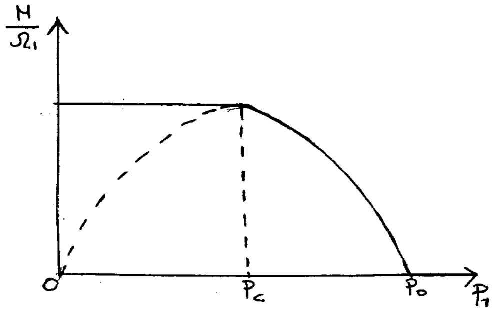
La portata in massa è data da $M = \rho c\Omega$ e nella sezione di uscita $\dfrac{M}{\Omega_1} = \rho_1 c_1$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \text{ e dalla } \frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{P_0}{\rho_0^k} \Rightarrow \rho_1 = \rho_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}$$

otteniamo:

$$\frac{\mathrm{M}}{\Omega_1} = c_1\rho_1 = \rho_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}}\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

Dalla relazione trovata osserviamo che la portata si annulla per $p_1/p_0 = 0$ e per $p_1/p_0 = 1$. Mentre la prima condizione è evidente non lo è la seconda. Quest'ultima si può giustificare pensando che essa comporti $p_1 = 0$ e quindi una massa volumica del fluido idealmente infinita, quindi quale che sia la velocità (sempre di valore finito) nell'unità di area della sezione d'uscita la massa non può che essere nulla. Costruendo un diagramma che riporta in ascisse la pressione a valle e in ordinate la portata in massa si ottiene per un valore fissato della pressione a monte p_0 una curva avente andamento ellittico.Essa ha un massimo in corrispondenza della sezione critica. Nell'ambiente il flusso si affaccia in condizioni soniche. La curva cosi ottenuta ha significato fisico solo a destra della pressione critica dato che per pressioni a valle inferiori si dimostra sperimentalmente che la portata in massa non varia.



La curva della portata ha perciò andamento rettilineo parallelo all'asse delle ascisse, nella zona a sinistra di p_c. Il diagramma ci permette di vedere come il condotto risponde alla variazione di pressione regnante all'esterno. Il valore della portata critica $M_c=\Omega_c\rho_c c_c$

$$\frac{M_c}{\Omega_c} = r_c c_c = r_c\sqrt{k\frac{p_c}{r_c}} = \sqrt{k p_c r_c}$$

$$\frac{p_c}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow p_c = p_0\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \frac{p_0}{r_0^k} = \frac{p_c}{r_c^k} \Rightarrow \frac{p_c}{p_0} = \frac{r_c^k}{r_0^k} \Rightarrow \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{p_c^k}{r_0^k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_c = r\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]^{\frac{1}{k}} \qquad \text{per cui} \quad \frac{M_c}{\Omega_c} = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} p_0 r_0}$$

Tutto questo è la portata per unità di sezione una volta che il condotto funzioni in regime sonico, quando il fluido esce in condizioni soniche. Il diagramma può essere ripetuto per qualsiasi valore della pressione p_0 a monte. Il tratto a portata costante, M/Ω_1 = cost e quello a portata variabile sono più o meno della stessa estensione, in quanto $p_0=0{,}5p_c$. Se su questo diagramma aggiungiamo l'asse delle pressioni p_0, delle pressioni a monte, non facciamo altro che tradurre questo diagramma in uno tridimensionale, in cui in un unica superficie si trovano tutte le sezioni a p_0 costante, ottenendo cosi il CONO DI STODOLA cioè una superficie conica nel senso della geometria descrittiva.