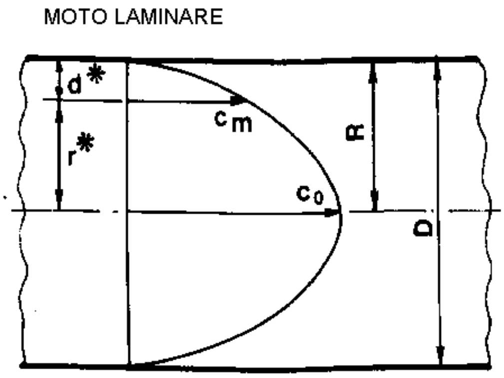
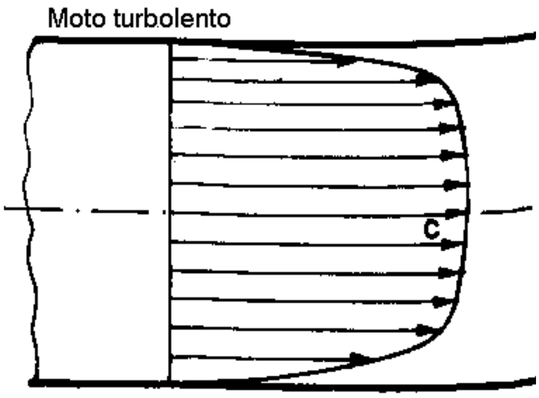
Flusso di un liquido in un condotto a sezione costante

Facciamo finta che il fluido sia monodimensionale in particolare per quanto riguarda la velocità. Le considerazioni che si fanno rimangono tali anche per tubi di flusso geometricamente più complicati. Consideriamo un condotto con un fluido (liquido o aeriforme indifferentemente) in quanto facciamo l'ipotesi che la densità sia costante in ogni sezione perpendicolare all'asse del tubo. Il moto del fluido nel condotto può essere laminare o turbolento





Esiste una fase di transizione tra i due tipi che dipende dal numero di Reynolds.

Re < 2100 moto laminare
Re > 2300 moto turbolento

$Re = D\, c\, \rho / \mu$

D = 2R diametro tubo
c = velocità
ρ = densità
μ = viscosità dinamica

A seconda che il moto sia laminare o turbolento le azioni viscose sulle pareti del tubo hanno importanza diversa. Per il moto laminare il profilo della velocità è parabolico mentre per quello turbolento è più appiattito (schiacciato). Questo in virtù del fatto che la viscosità essendo al denominatore ha un'influenza maggiore nel moto laminare che in quello turbolento. Se con c_0 indichiamo la velocità del fluido per x = 0 (assi come in figura) allora la velocità in un punto qualsiasi della sezione sarà uguale:

A) Per moto laminare se indico con c_0 la velocità massima si ha che la velocità c in un punto generico sarà data da: $|c| = c_0\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]$

R: raggio della sezione del tubo in corrispondenza del punto x

Dalla precedente si ricava che: $c_m = 0.5 c_0$

La c_m la si ragginge per x = $\frac{R}{\sqrt{2}} = 0.707R$

B) moto turbolento
$c = c_0$ (massima)
n dipende dal numero di Re ed è varia-
bile tra 1/8 e 1/7
$c_m = 0.84c_0$ per $x = R/2^{0.5}$

$$c = c_0\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)^n\right]$$

Nel caso di moto laminare possiamo assimilare il profilo delle velocità con un profilo costante (piatto). L'approssimazione sarà tanto più imprecisa, libera, che non con quello turbolento in quanto quest'ultimo si avvicina di più al profilo costante a parte le vicinanze delle pareti dove vi è la presenza dello strato limite. Si può anche valutare l'errore commesso che dipende :

a) dal fluido
b) dalla geometria del sistema
c) dalla grandezza che si valuta

A noi interessa soprattutto la portata, l'energia cinetica e la quantità di moto. Supponiamo ora che $c = c_m$ (profilo costante):

$$M = r\int_\Omega c\,d\Omega = rc_m\Omega$$

Se assumo $c \equiv c_m$ in definitiva calcolo correttamente la portata applicando il teorema della media.

Per quanto riguarda la quantità di moto invece:

$$q = r\int_\Omega c^2 d\Omega = rc_m^{'2}\Omega$$

In questo caso $c_m^{'} \neq c_m$ a meno che la velocità non sia costante.

$$E = \frac{1}{2}r\int_\Omega c^2 d\Omega = \frac{1}{2}rc_m^{''2}\Omega$$

$$c_m = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega c\,d\Omega$$

$$c_m^{'} = \sqrt{\frac{1}{\Omega}\int_\Omega c^2 d\Omega}$$

$$c_m^{''} = \sqrt[3]{\frac{1}{\Omega}\int_\Omega c^3 d\Omega}$$

Ci chiediamo ora quale è l'errore che si commette quando $c_m=c_{m1}=c_{m2}$ sulla quantità di moto e sull'energia cinetica, ovvero indicando con :

$$z^{'} = \left(\frac{c_m^{'}}{c_m}\right)^2; \qquad z^{''} = \left(\frac{c_m^{''}}{c_m}\right)^3$$

La quantità dell' errore è data da, indicando con z e z' i rapporti :

$$z' = \frac{\int_\Omega c^2 d\Omega}{c_m^2 \Omega} \quad ; z'' = \frac{\int_\Omega c^3 d\Omega}{c_m^3 d\Omega}$$

$z = z' = 1$ sè la velocità fosse uniforme.

La meccanica dei fluidi ci permette di valutare l'errore :

A) Nel caso laminare $z' = \frac{8}{6} = 1.35; z'' = 1.2$

B) Nel caso di moto turbolento R > 2300

$z' = 1.02 \approx 1.03; z'' = 1.06 \approx 1.10$

Inoltre la meccanica dei fluidi ci offre anche la correlazione tra z e z':

$$z'' = 3z' - 2$$

Questi valori numerici ci dicono molto sul quesito. In regime laminare si commette un errore elevato sulla quantità di moto ed un errore ancora più grande sull'energia cinetica tra il calcolo rigoroso e quello approssimato assumendo $c=c_m$. Per il moto turbolento l'errore è del 2-3% su ζ' e del 6-10% su ζ''. Mentre il primo è accettabile il secondo lo è abbastanza finche non si richiedono precisioni severe. Nelle applicazioni macchinistiche abbiamo a che fare di solito con regime turbolento per cui il modello monodimensionale conviene per quanto riguarda la distribuzione uniforme dei parametri. Gli altri parametri ,pressione e densità possono essere assunti uniformi con maggiore tranquillità a seconda della complicazione geometrica. Il parametro più nevralgico riguarda la distribuzione delle velocità. L'effetto monodimensionale è quello di cui si farà uso molto spesso perché in alcune occasioni si renderà necessario un modello bidimensionale o anche tridimensionale e questo deriva dal fatto che per motivi fluidodinamici la sezione del condotto sarà profilata in una certa maniera. La geometria imporrà alla velocità un modello non monodimensionale per la non uniforme distribuzione dei parametri lungo la sezione.

Meccanica dei fluidi comprimibili

E’ utile in questa sede ricordare che la fluidodinamica di un fluido dipende dalla velocità dello stesso a seconda in definitiva che la velocità sia maggiore o minore di quella del suono. Si definisce modulo di comprimibilità di un fluido E

$$E = -\frac{dp}{\frac{dv}{v}} = \frac{dp}{\frac{dr}{r}} = \frac{dp}{dr}r$$

Il reciproco del modulo di comprimibilità prende il nome di coefficiente di comprimibilità.

$$\frac{1}{\mathrm{E}} = e = -\frac{\frac{dv}{v}}{dp}$$

Al modulo di comprimibilità è legata la velocità c* di propagazione di una perturbazione.

$$c^* = \sqrt{\frac{E}{r}} = \sqrt{\frac{dp}{dr}}$$

Per un gas ideale abbiamo che poiché PV = RT e P = Aρ^k la precedente diventa

$$c^* = \sqrt{k\frac{p}{r}} = \sqrt{kRT}$$

il rapporto $\frac{\mathrm{p}}{r}$ determina in sostanza la velocità di propagazione.

Nella misura in cui aumenta la temperatura la velocità aumenta con esponente 0,5

In realtà i gas sono perfetti ma non ideali e di conseguenza i calori specifici a pressione e a volume costante sarano funzione della temperatura locale, tuttavia tali calori variano poco in campi di temperatura non molto ampi, per cui possiamo dire che k = cost.

Per l’ aria:

k=1,4   p=10^5 Pa ρ=1,2 Kg/m^3

A conti fatti :

$$c^* = \sqrt{k\frac{p}{r}} = \sqrt{1.4\frac{10^5}{1.25}} = 340m/s$$

Se in un fluido avviene una perturbazione finita, per un gas perfetto idealizzato la gasdinamica ci insegna che indicando con c** la velocità di propagazione finita avremo:

$$\frac{c^{**}}{c^{*}} = \sqrt{\frac{1}{2k}\left[(k-1)+(k+1)\frac{P'}{r}\right]}$$

$$P' : disturbata$$

$$P : indisturbata$$

$$\lim_{\frac{p'}{p}\to\infty} \to \frac{c^{**}}{c^{*}} = 1$$

La propagazione di una perturbazione in un aeriforme soggetto ad una certa velocità sarà diversa a seconda che la velocità del fluido è subsonica o supersonica.
A tale scopo definiamo il numero di Mach:

$$Ma = \frac{c}{c^{*}}$$

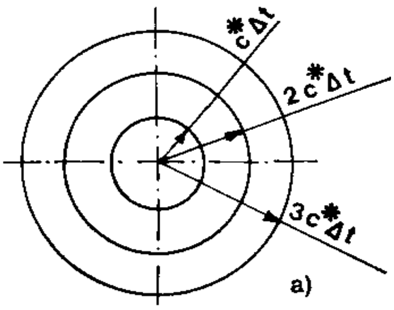
$$c^{*} = \sqrt{\frac{dP}{dr}} = \sqrt{\frac{kP}{r}} \text{ per aeriforme idealizzato}$$

c : velocità di propagazione delle piccole perturbazioni

Gli aeriformi sarano gas (perfetti) ideali in un range di temperatura, oppure vapore surriscaldato ove l'approssimazione è più libera

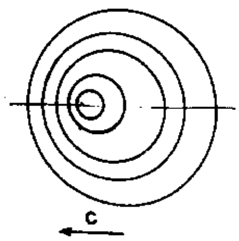
A seconda che $Ma < 1$, $Ma > 1$ $\Rightarrow$ La propagazione della perturbazione sarà diversa

Nell'ipotesi di gas perfetto idealizzato vediamo ora i vari casi che possono presentarsi:

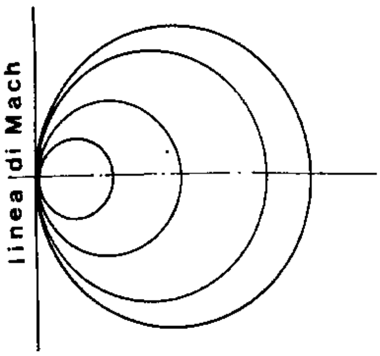


a) Se il fluido è inizialmente fermo il fronte si propaga con velocità c*. Nell'ipotesi di sorgente puntiforme i fronti di onda sono superfici sferiche. Dopo un intervallo di tempo Δt il fronte d' onda avrà raggio c*Δt, dopo un tempo 2Δt il raggio del fronte sarà diventato 2c*Δt e cosi via. In generale il raggio del fronte d'onda sarà dato da:

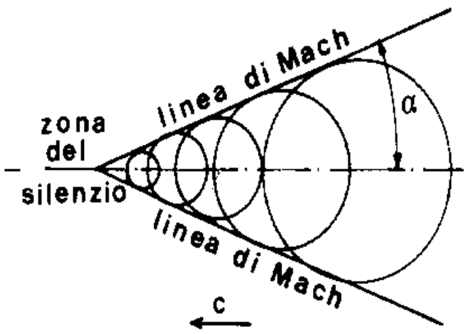
R = c*t



b) Caso in cui c > 0 ma c < c*. In questo caso dobbiamo comporre il moto del fluido con il moto della perturbazione. Lo spazio percorso dal fluido in un periodo di tempo t sarà uguale a ct mentre la velocità di propagazione c*t. A parte fenomeni di assorbimento la perturbazione si propagherà in tutto lo spazio anche se in maniera più limitata a monte.



c) Caso in cui la velocità del fluido è c = c* cioè pari alla velocità del suono locale. La perturbazione si propaga solo nel semispazio destro. Nella misura in cui il flusso si sposta la perturbazione si propaga in tutte le direzioni ma non può superare il piano di Mach.



d) Caso in cui c>c* , M_a>1. In questo caso si ha una ulteriore limitazione dello spazio investito dai fronti d'onda. Lo spazio non interessato dal fronte d'onda è detto in questo caso "zona del silenzio " ed è delimitato dal cono di Mach.

$c^* = c \sin\alpha \rightarrow \alpha = \arcsin c^*/c = 1/Ma$

In un condotto fisso o mobile (statore o rotore) di una turbomacchina, a seconda che il moto raggiunto dal flusso sia supersonico o meno, il condotto si comporterà in maniera radicalmente diversa nei confronti di una perturbazione. Una macchina non funziona mai a regime costante, ma vi sarà sempre un'oscillazione per cui la possibilità che si crei una perturbazione è un fatto quotidiano. Inoltre passando da un regime ad un altro in una macchina è possibile che la velocità del flusso venga alterata anche in maniera considerevole, passando da un regime di funzionamento ad alta velocità ad uno più basso scavalcando la zona transonica cioè da Ma > 1 a Ma < 1. La fenomenologia quindi della risposta di un condotto ad una perturbazione è quanto mai importante.